Научный Вестник МГТУ ГА

Civil Aviation High TECHNOLOGIES

Vol. 21, No. 02, 2018

Издается с 1998 г.

Научный Вестник МГТУ ГА решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ включен в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Главная редакция

Главный редактор: *Елисеев Б.П.*, заслуженный юрист РФ, проф., д.т.н., д.ю.н.,

ректор МГТУ ГА, Москва, Россия.

Зам. главного редактора: *Воробьев В.В.*, проф., д.т.н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия.

Ответственные секретари главной редакции:

Наумова Т.В., доцент, к.филос.н., доцент кафедры МГТУ ГА,

Москва, Россия;

Полешкина И.О., к.э.н., доцент кафедры МГТУ ГА, Москва,

Россия.

Члены главной редакции:

Козлов А.И., заслуженный деятель науки и техники РФ, проф., д.ф.-м.н., советник ректората МГТУ ГА, Москва, Россия;

Гаранина О.Д., почетный работник науки и техники РФ, проф., д.филос.н., профессор МГТУ ГА, Москва, Россия;

Туркин И.К., проф., д.т.н., зав. каф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Калугин В.Т., проф., д.т.н., декан МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия;

Лукин Д.С., заслуженный деятель науки РФ, проф., д.ф.-м.н., проф. МФТИ, Москва, Россия;

Шапкин В.С., заслуженный работник транспорта РФ, проф., д.т.н., Москва, Россия;

Дамиан Ривас Ривас, проф., PhD, проф. Университета Севильи, Севилья, Испания;

Сью Хаудзюнь, PhD, Университет военно-воздушных сил, Хиан, Китай;

Сайдахмедов Р.Х., проф., д.т.н., Ташкентский государственный технический университет им. Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан;

Франко Персиани, PhD, директор Межведомственного Центра промышленных исследований в аэронавтике, Болонский университет, Болонья, Италия;

Владимир Немец, PhD, Факультет транспортных наук, Отделение воздушного транспорта, Чешский технический университет, Прага, Чешская республика;

Станислав Сзабо, PhD, Факультет аэронавтики, Технический университет в Кошице, Кошице, Словацкая республика.

Ответственные редакторы выпуска:

Кузнецов В.Л., проф., д.т.н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия; *Самохин А.В.*, д.т.н, профессор МГТУ ГА, Москва, Россия.

Сайт: http://avia.mstuca.ru E-mail: v.kuznetsov@mstuca.aero Тел.: +7 (499) 458-84-16

Плата за публикацию в Научном Вестнике МГТУ ГА с аспирантов не взимается

Chief Editorial Board

Editor-in-chief: Boris Eliseev, Professor, Doctor of Sciences, Rector, Moscow State

Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Deputy Editor-in-chief: Vadim Vorobyev, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow

State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Executive Secretaries: Tatiana Naumova, Associate Professor, Candidate of Sciences, Moscow

State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Irina Poleshkina, Associate Professor, Candidate of Sciences, Moscow

State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia.

Members of the chief editorial Board:

Anatoly I. Kozlov, Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Olga D. Garanina, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Igor K. Turkin, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia;

Vladimir T. Kalugin, Professor, Doctor of Sciences, Dean, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

Dmitry S. Lukin, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;

Vacily S. Shapkin, Honored Worker of Transport of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, State Research Institute of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Damian Rivas Rivas, Professor, PhD, University of Seville, Seville, Spain;

Xu Haojun, PhD, Air Force Engineering University, Xi'an, China;

Ravshan H. Saydakhmedov, Professor, Doctor of Sciences, Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan;

Franco Persiani, PhD, Director of Centre, University of Bologna, Bologna, Italy;

Vladimir Nemez, PhD, Faculty of Transportation Sciences, Department of Air Transport, Czech Technical University in Prague, Chech Republic;

Stanislav Szabo, Associate Professor, PhD, Dean, Faculty of Aeronautics, Technical University of Košice, Košice, Slovak republic.

Issue Editors:

Valerij L. Kuznetsov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair,
 Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
 Aleksej V. Samokhin, Professor, Doctor of Sciences,
 Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia.

Web-site: http://avia.mstuca.ru E-mail: v.kuznetsov@mstuca.aero

Редакционный совет

Абрамов О.В., заслуженный деятель науки РФ, проф., д.т.н., Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Владивосток, Россия;

Акиншин Р.Н., проф., д.т.н., в.н.с., секция оборонных проблем МО РФ при президиуме РАН, Москва, Россия;

Брусов В.С., проф., д.т.н., проф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Вышинский В.В., проф., д.т.н., проф. МФТИ, г.н.с. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия;

Горелик А.Г., проф., д.ф-м.н., проф. МИФИ, Москва, Россия;

Гузий А.Г., д.т.н., зам. директора ПАО «Авиакомпания «ЮТэйр», Москва, Россия;

Давидов А.О., доцент, д.т.н., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", Харьков, Украина;

Красильщик И.С., проф., д.ф-м.н., проф. МНУ, Москва, Россия;

Кубланов М.С., проф., д.т.н., профессор МГТУ ГА, Москва, Россия.

Кузнецов С.В., проф., д.т.н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия;

Логвин А.И., заслуженный деятель науки РФ, проф., д.т.н., профессор МГТУ ГА, Москва, Россия;

Нечаев Е.Е., проф., д.т.н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия;

Пантелеев А.В., проф., д.ф-м.н., зав. каф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Рухлинский В.М., д.т.н., председатель комиссии МАК по связям с Международной организацией гражданской авиации, Москва, Россия;

Сарычев В.А., проф., д.т.н., г.н.с. АО «Радар-ММС», С-Петербург, Россия;

Татаринов В.Н., действительный член Академии электромагнетизма США, проф., д.т.н., проф. ТУСУР, Томск, Россия;

Увайсов С.У., проф., д.т.н., зав. кафедрой МТУ, Москва, Россия;

Халютин С.П., проф., д.т.н., ген. директор ООО «Экспериментальная мастерская НаукаСофт», Москва, Россия;

Харимонов С.А., проф., д.т.н., зав. каф., НГТУ, Новосибирск, Россия;

Ходаковский В.А., заслуженный деятель науки ЛССР проф., д.т.н., Рига, Латвия;

Чинючин Ю.М., проф., д.т.н., профессор МГТУ ГА, Москва, Россия;

Шахтарин Б.И., академик РАЕН, заслуженный деятель науки и техники РФ, проф., д.т.н., проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Юрков Н.К., заслуженный деятель науки РФ, почетный работник высшего профессионального образования РФ, проф., д.т.н., проф. ПГУ, Пенза, Россия.

Editorial council

Oleg V. Abramov, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia;

Ruslan N. Akinshin, Professor, Doctor of Sciences, Section of Applied Problems under the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;

Vladimir S. Brusov, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

Viktor V. Vyshinsky, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Institute of Physics and Technology, Chief Research Fellow, Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovskiy, Russia:

Andrej G. Gorelik, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;

Anatolij G. Guziy, Doctor of Sciences, UTair Airlines, Moscow, Russia;

Albert O. Davidov, Assistant Professor, Doctor of Sciences, National Aerospace University Kharkiv Aviation Institute, Kharkiv, Ukraine;

Iosif S. Krasilschik, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Independent University, Moscow, Russia;

Michael S. Kublanov, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Sergej V. Kuznetsov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Aleksandr I. Logvin, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation Moscow, Russia;

Evgenii T. Nechaev, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Andrej V. Panteleev, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Aviation Institute (State Research Centre), Moscow, Russia;

Victor M. Rukhlinskiy, Doctor of Sciences, Chairman of the Commission for Relations with ICAO Board, International and Interstate Organizations of the Interstate Aviation Committee, Moscow, Russia;

Valentin A. Sarychev, Professor, Doctor of Sciences, "Radar-MMS" Joint-Stock Company, St.Petersburg, Russia;

Viktor N. Tatarinov, Actual Member of the US Electrical Magnetism Academy, Professor, Doctor of Sciences, Tomsk State Radio Electronic and Control Systems University, Tomsk, Russia;

Saygid U. Uvaysov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Technological University, Moscow, Russia;

Sergey P. Khalyutin, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Sergey A. Kharitonov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;

Vladimir A. Hodakovsky, Honored Worker of Science of Latvian Soviet Socialist Republic, Professor, Doctor of Sciences, Riga, Latvia;

Yuriy M. Chinyuchin, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Boris I. Shakhtarin, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences, Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

Nikolay K. Urkov, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Penza State University, Penza, Russia.

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Кудрявцева И.А., Лебедев М.В.
Применение UD-модификации сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц
к решению задачи трассового анализа
Ивенин И.Б., Курилёнок А.С.
Оптимальное управление трафиком воздушных судов, следующих в аэродромной зоне на посадку
Рыбаков К.А.
О вычислении весовых коэффициентов в непрерывном фильтре частиц
Агеев В.Н.
О применимости искусственной нейронной сети для решения задачи аппроксимации
Горинов А.А.
Об аналитическом методе решения задачи Коши системы двух квазилинейных гиперболических
уравнений
Пантелеев А.В., Пановский В.Н.
Применение гибридного меметического алгоритма в задачах оптимального управления нелинейными
стохастическими системами с неполной обратной связью
Касимов Ю.Ф., Тимербаев М.И.
Экстремальность весов в индексных портфелях в стратегиях постоянной пропорции
Жильцов И.Е., Митрофанов А.К., Рудельсон Л.Е.
Оценка пропускной способности в задаче совместного планирования потоков воздушных судов
Кушнер Е.Н.
Инварианты обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса
Пукацкии А.М. Об асимптотической форме уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе
Самохин А.В., Дементьев Ю.И.
Моделирование уединенных волн уравнения КДВ-Бюргерса в диссипативно неоднородных средах
Шахтарин Б.И., Качармина Е.Г., Вельтищев В.В.
Анализ синтезатора частот с дробно-переменным коэффициентом деления делителя
АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА
Комраков Н.Ю., Мужичек С.М., Скрынников А.А.
Применение байесовского подхода построения логистической регрессии при обработке результатов
испытаний на стойкость элементов авиационных конструкций
ТРАНСПОРТ
Алексанян А.Р., Файнбург И.А., Евдокимова А.Д.
Комплексная технология повышения эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов
РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ
Козлов А.И., Маслов В.Ю.
Радиолокационный контраст при отражении электромагнитной волны от двух объектов
Краснитский Ю.А.
Две ферромагнитные сферы в однородном магнитном поле
Троицкий В.И.
Анализ влияния основных параметров и условий функционирования КЭСН летательных аппаратов
по микроволновому излучению покровов земной поверхности на эффективность их использования

CONTENTS

INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER ENGINEERING AND MANAGEMENT

Kudryavtseva I.A., Lebedev M.V.	
Application of modified unscented Kalman filter and unscented particle filter to solving tracking problems	8
Ivenin I.B., Kurilenok A.S.	
Optimal traffic management for aircraft coming into the aerodrome landing area	22
Rybakov K.A.	
Calculation of weight coefficients in continuous particle filter	32
Ageyev V.N.	
The solution of the approximation problem of nonlinear dependances using artificial neural networks	40
Gorinov A.A.	- 1
About analytical method for solving the cauchy problem of two quasilinear hyperbolic equations system	51
Panteleev A.V., Panovskiy V.N. Application of hybrid memetic algorithm in optimal control nonlinear stochastic systems with incomplete feedback	
problemsproblems argorithm in optimal control nonlinear stochastic systems with incomplete feedback	59
Kasimov Yu.F., Timerbaev M.I.	33
The extreme weights in the index portfolio of constant-proportion strategies	71
Zhiltsov I.E., Mitrofanov A.K., Rudel'son L.E.	
Air space capacity assessment regarding the problem of the collaborative management of air traffic flows	83
Kushner E.N.	
Invariants of generalized Rapoport-Leas equations	96
Lukatsky A.M.	
On the asymptotic form of the Landau-Lifshitz equation on a three-dimensional torus	105
Samokhin A.V., Dementyev Yu.I.	
Modelling of the KdV-Burgers equation solitary waves in dissipative nonhomogeneous media	114
Shakhtarin B.I., Kacharmina E.G., Veltishev V.V.	
Analysis of fractional-n frequency synthesizers	122
AVIATION, ROCKET AND SPACE TECHNOLOGY	
Komrakov N.Yu, Muzhichek S.M., Skrynnikov A.A.	
Application of bayesian approach of logistic regression formation while processing the tests results on the durability	
of aircraft constructions elements	132
TRANSPORT	
Aleksanyan A.R., Fainburg I.A., Evdokimova A.D.	
	143
RADIO ENGINEERING AND COMMUNICATIONS	
Kozlov A.I., Maslov V.Yu.	
Radar location contrast in the reflection of electromagnetic wave from two objects	153
Krasnitsky Yu.A.	100
Two ferromagnetic spheres in uniform magnetic field	162
Troitsky V.I.	
Analisis of the influence of the main parameters and condition of work of aircraft cesn on the efficency of their use	
methods of mathematical modeling	171

Vol. 21, No. 02, 2018

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.24

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-8-21

ПРИМЕНЕНИЕ UD-МОДИФИКАЦИИ СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА И СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА ЧАСТИЦ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТРАССОВОГО АНАЛИЗА

И.А. КУДРЯВЦЕВА¹, М.В. ЛЕБЕДЕВ¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17-08-00530 А

В работе рассматривается решение задачи оценивания вектора состояния дискретной стохастической системы по имеющимся наблюдениям с использованием модификации сигма-точечного фильтра Калмана (Unscented Kalman Filter, UKF) и сигма-точечного фильтра частиц (Unscented Particle Filter, UPF), построенных на основе UDразложений ковариационных матриц, при этом используется скаляризованная форма записи уравнений фильтра Калмана. Идея метода частиц заключается в использовании набора случайных точек (частиц) с ассоциированными весами, аппроксимирующих апостериорную плотность вероятности. В силу того, что апостериорное распределение неизвестно, для генерации частиц выбирается иное распределение – распределение значимости. Алгоритм сигма-точечного фильтра частиц является разновидностью фильтров частиц со встроенной процедурой получения параметров распределения значимости, которое полагается гауссовским, на основе Unscentedпреобразования. С помощью разработанных алгоритмов проведено численное решение задачи трассового анализа для двух случаев. В первом случае рассматривается задача определения координат подвижного объекта только по зашумленным наблюдаемым значениям его пеленга (задача пассивной локации). Во втором случае рассматривается задача активной локации, когда наблюдателю доступны, помимо пеленга, зашумленные значения дистанции до сопровождаемого объекта. Кроме того, в модель движения в задаче активной локации добавлен дополнительно маневр, как угол направления вектора скорости. При численном моделировании для случая активной локации в качестве наблюдений выступал произвольный маневр, отличный от заданного в модели движения с целью проверки робастности рассматриваемых алгоритмов к изменению модели движения для наблюдаемого объекта.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, методы Монте-Карло, UD-преобразование, Unscented-преобразование, сигма-точечный фильтр Калмана, сигма-точечный фильтр частиц.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное решение задачи оценивания состояния линейной стохастической системы по результатам линейных зашумленных наблюдений доставляет фильтр Калмана. Однако применение данного алгоритма сопряжено с рядом ограничений, например, ограничений, возникающих при применения данного алгоритма к нелинейным системам с гауссовскими и негауссовскими шумами. Для преодоления данного ограничения для случая нелинейной системы с аддитивными гаусовскими шумами в [1] предложен алгоритм сигма-точечного фильтра Калмана. В случае нелинейной модели с негауссовскими случайными воздействиями широко применимы фильтры частиц [2].

В работе рассматривается решение задачи сопровождения цели для пассивного и активного режима с помощью разработанных модификации алгоритмов сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц на основе UD-разложений матриц ковариации. Для решения рассматриваемой задачи существуют иные подходы [3–5], в частности метод псевдоизмерений [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть состояния динамической системы X_k , k=0,1,2,... подчиняются следующему разностному уравнению:

$$X_{k+1} = f(X_k, V_k), \quad X_0 \sim p(x), \ k = 0, 1, 2, ...,$$
 (1)

где $X_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, X_0 — начальное состояние системы с известным законом распределения $p(x), f(x,v) \colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ — известная вектор-функция, $V_k \in \mathbb{R}^n$ — дискретный векторный белый шум с математическим ожиданием m_v и ковариационной матрицей Σ_v .

Случайный процесс X_k , k=0,1,2,... доступен косвенным наблюдениям, удовлетворяющим уравнению

$$Y_{k+1} = g(X_{k+1}, W_{k+1}), k = 0, 1, 2, ...,$$
 (2)

где $Y_k \in \mathbb{R}^q$ — вектор измерений, $g(x,w) \colon \mathbb{R}^{n+q} \to \mathbb{R}^q$ — известная вектор-функция, $W_k \in \mathbb{R}^q$ — дискретный векторный белый шум с математическим ожиданием m_w и ковариационной матрицей Σ_w .

Требуется получить вектор оценки \hat{X}_k состояния процесса X_k по результатам наблюдений $Y_1^k = \{Y_1, ..., Y_k\}$ с использованием модификаций алгоритмов сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц на основе UD-разложения матриц ковариаций.

UD-МОДИФИКАЦИЯ СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Сигма-точечный фильтр Калмана, в основе алгоритма которого лежит Unscented-преобразование, впервые был предложен в работах [1] как альтернатива классической реализации с целью преодоления ограничений, преимущественно связанных с применением процедуры фильтрации Калмана к нелинейным моделям путем линеаризации, которая проводится посредством вычисления матрицы Якоби.

Unscented-преобразование

Вводится расширенный вектор состояния системы $X_k^{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_{X^{\alpha}}}: X_k^{\alpha} = \left(X_k, V_k, W_k\right)^T$, $N_{X^{\alpha}} = 2n+q$, где n — размерность вектора состояния системы, q — размерность вектора наблюдения. Далее на каждом этапе по времени согласно определенному правилу строится набор сигма-точек $\chi_k^{\alpha,i}$, i=0,...,L-1, $L=2N_{X^{\alpha}}+1$, локализующихся в окрестности полученной на предыдущем этапе оценки \hat{X}_k^{α} вектора состояния системы. Каждой сигма-точке ставится в соответствие пара $\left(w^{m,i}, w^{c,i}\right)$, i=0,...,L-1, элементами которой являются веса точек. При этом предполагается, что $\sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} = 1$, $\sum_{i=0}^{L-1} w^{c,i} = 1$. Веса задаются таким образом, чтобы обеспечить не-

смещенную оценку математического ожидания и ковариационной матрицы введенного набора точек:

$$\begin{split} w^{m,0} &= \frac{\lambda}{N_{X^{\alpha}} + \lambda}, \ w^{m,i} = \frac{1}{2(N_{X^{\alpha}} + \lambda)}; \\ w^{c,0} &= \frac{\lambda}{N_{X^{\alpha}} + \lambda} + 1 - \xi^2 + \beta, \ w^{c,i} = \frac{1}{2(N_{X^{\alpha}} + \lambda)}, \ i = 1, ..., L - 1. \end{split}$$

Для получения набора сигма-точек использовались соотношения [1, 6, 10]

$$\begin{split} \chi_k^{\alpha,0} &= \hat{X}_k^{\alpha}, \ \chi_k^{\alpha,i} = \hat{X}_k^{\alpha} + \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha} \right)_i, \\ \chi_k^{\alpha,i+N_{\chi^{\alpha}}} &= \hat{X}_k^{\alpha} - \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha} \right)_i, \ \gamma = \sqrt{N_{\chi^{\alpha}} + \lambda}, \ \lambda = \xi^2 \left(N_{\chi^{\alpha}} + p \right) - N_{\chi^{\alpha}}, \ i = 1, \dots, N_{\chi^{\alpha}}, \end{split}$$

где ξ , p – заданные постоянные параметры.

Далее каждая сигма-точка в отдельности пропускается через уравнение состояния (1) $\overline{\chi}_k^i = f\left(\chi_k^{\alpha,i}\right), \ \overline{X}_k^i \in \mathbb{R}^n, \ i=0,...,L-1$ с целью получения прогнозного значения оценки вектора состояния $\hat{\overline{X}}_k = \sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} \overline{\chi}_k^i$ и матрицы ковариации ошибки прогноза \overline{P}_k .

Среди способов увеличения вычислительной эффективности фильтра Калмана [7] можно выделить группу квадратно-корневых алгоритмов, в частности UD-реализацию фильтра Калмана, впервые предложенную в работе Бирмана (G.J. Bierman) [8]. В рамках данной реализации на этапе предсказания и этапе коррекции осуществляется UD-разложение матрицы ковариации ошибки предсказания и матрицы ковариации ошибки оценки фильтра соответственно.

Идея UD-разложения состоит в представлении матрицы $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ в виде $P = UDU^T$, где

$$U \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ D \in \mathbb{R}^{n \times n} \ \ U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такое разложение всегда существует для симметрической положительно-определенной квадратной матрицы [9]. Для поиска матриц U,D применялся алгоритм из [8].

UD-разложение матрицы ковариации ошибки предсказания

Для нахождения оценки матрицы ковариации ошибки предсказания по полученному множеству обновленных значений сигма-точек $\overline{\chi}_k^i = f\left(\chi_k^{\alpha,i}\right)$, i = 0,...,L-1 используются следующие соотношения:

$$\overline{P}_{k} = \left\{ \overline{\chi}_{k}^{i} - \hat{\overline{X}}_{k} \right\} W^{c} \left\{ \overline{\chi}_{k}^{i} - \hat{\overline{X}}_{k} \right\}^{T}, W^{c} = diag(w^{c,i}), i = 0, ..., L-1,
w^{c,0} = \frac{\lambda}{N_{X^{\alpha}} + \lambda} + 1 - \xi^{2} + \beta; w^{c,i} = \frac{1}{2(N_{X^{\alpha}} + \lambda)}, i = 1, ..., L-1,$$

где $\left\{ \overline{\chi}_k^i - \hat{\overline{X}}_k \right\} \in \mathbb{R}^{n \times L}$, $W^c \in \mathbb{R}^{L \times L}$ — матрица весовых коэффициентов, соответствующих сигматочкам $\overline{\chi}_k^i$, i = 0,...,L-1.

Используя ортогонализацию Грамма — Шмидта [9], можно найти $\overline{U}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\overline{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times L}$: $\left\{ \overline{\chi}_k^i - \hat{\overline{X}}_k \right\} = \overline{U}_k \overline{V}_k$. При этом согласно [2] может быть применен следующий алгоритм:

$$v_n = \sigma_n, \quad v_s = \sigma_s - \sum_{r=s+1}^n \frac{\sigma_s W^C v_s^T}{v_s W^C v_s^T} v_r, \quad u_{s,r} = \frac{\sigma_s W^C v_s^T}{v_s W^C v_s^T}, \ s, r = 1, ..., n,$$

где $\sigma_s = \overline{\chi}_{k,s}^i - \hat{\overline{X}}_k - s$ -я строка матрицы $\left\{\overline{\chi}_k^i - \hat{\overline{X}}_k\right\}$, i = 0,...,L-1; $v_s - s$ -я строка матрицы \overline{V}_k ; $u_{s,r}$ – элемент матрицы \overline{U}_k , стоящий на пересечении s-й строки матрицы и r-го столбца.

Тогда
$$\overline{P}_k = \left\{ \overline{\chi}_k^i - \hat{\overline{X}}_k \right\} W^c \left\{ \overline{\chi}_k^i - \hat{\overline{X}}_k \right\}^T = \overline{U}_k \overline{V}_k W^C \overline{V}_k^T \overline{U}_k^T = \overline{U}_k \overline{D}_k \overline{U}_k^T$$
, $\overline{D}_k = \overline{V}_k W^c \overline{V}_k^T$.

UD-разложение матрицы ковариации ошибки оценки фильтра

Этап коррекции реализуется в скаляризованной форме, что позволяет избежать процедуры обращения матриц. Скаляризованные уравнения для получения матрицы ковариации ошибки оценки фильтра Калмана имеют вид [6]

$$K_{k}^{(j)} = \frac{1}{\hat{P}_{yy,k}^{(j)}} \hat{P}_{xy,k}^{(j)}, \quad \hat{P}_{k+1}^{(j)} = \overline{P}_{k} - \frac{1}{\hat{P}_{yy,k}^{(j)}} K_{k}^{(j)} \left(K_{k}^{(j)}\right)^{T}, \ j = 1, ..., q,$$

где $K_k^{(j)}$ — значения коэффициента усиления фильтра на j-й итерации, $\hat{P}_{xy,k}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\hat{P}_{yy,k}^{(j)} \in \mathbb{R}$ — значения оценок взаимной ковариации и ковариации наблюдений на j-й итерации, q — размерность вектора наблюдения. Тогда

$$\begin{split} \hat{P}_{k+1}^{(j)} &= \overline{P}_k - \frac{1}{\hat{P}_{yy,k}^{(j)}} K_k^{(j)} \left(K_k^{(j)} \right)^T = \overline{U}_k \overline{V}_k W^c \overline{V}_k^T \overline{U}_k^T - \frac{1}{\hat{P}_{yy,k}^{(j)}} \left(\overline{U}_k \overline{V}_k W^c \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\}^T \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\} W^c \overline{V}_k^T \overline{U}_k^T \right) = \\ &= \overline{U}_k \left(\overline{V}_k W^c \overline{V}_k^T - \frac{1}{\hat{P}_{yy,k}^{(j)}} \overline{V}_k W^c \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\}^T \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\} W^c \overline{V}_k^T \right) \overline{U}_k^T, \end{split}$$

где $\left\{Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j}\right\} \in \mathbb{R}^{1 \times L} - j$ -я строка матрицы $\left\{Y_k^i - \hat{Y}_k\right\}$, столбцы которой содержат центрированные значения преобразованных сигма-точек по уравнению наблюдений (2).

Применяя алгоритм UD-разложения [7], получаем

$$G_k^{(j)} = \overline{V}_k W^c \overline{V}_k^T - \frac{1}{\hat{P}_{vv,k}^{(j)}} \overline{V}_k W^c \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\}^T \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\} W^c \overline{V}_k^T = U_{G,k}^{(j)} \, D_{G,k}^{(j)} \left(U_{G,k}^{(j)} \, \right)^T.$$

Таким образом,

$$\hat{P}_{k+1}^{(j)} = \overline{U}_k U_{G,k}^{(j)} \; D_{G,k}^{(j)} \left(U_{G,k}^{(j)} \right)^T \overline{U}_k^T \; ; \; \; U_{k+1}^{(j)} = \overline{U}_k U_{G,k}^{(j)} \; , \; \; D_{k+1}^{(j)} = D_{G,k}^{(j)} \; , \; \; j = 1, \dots, q \; . \label{eq:power_power_power_power}$$

Ниже приведен алгоритм сигма-точечного фильтра Калмана на основе UD-разложения матриц ковариаций.

АЛГОРИТМ СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА НА ОСНОВЕ UD-РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ КОВАРИАЦИЙ

- 1. Инициализировать \hat{X}_0 , \hat{P}_0 , N, n, q, где N количество итераций по времени, n размерность вектора состояния системы, q размерность вектора наблюдения.
 - 2. Положить k=0 , $N_{_{X^{\alpha}}}=2n+q$, $L=2N_{_{X^{\alpha}}}+1$.
 - 3. Получить UD-разложение матрицы $\hat{P}_k : [U_k, D_k] = UD(\hat{P}_k)$,
 - 4. Получить UD-разложение матриц $\Sigma_v, \Sigma_w \colon [U_v, D_v] = UD(\Sigma_v); [U_w, D_w] = UD(\Sigma_w)$.
 - 5. Сформировать вектор системы $\hat{X}_k^{\alpha} = (\hat{X}_k, m_v, m_w)^T$.
 - 6. Сформировать $\hat{S}_k^{\alpha} = U_k^{\alpha} \sqrt{D_k^{\alpha}}$.

7.

$$U_k^{\alpha} = \begin{pmatrix} U_k & 0 & 0 \\ 0 & U_v & 0 \\ 0 & 0 & U_w \end{pmatrix}, \ D_k^{\alpha} = \begin{pmatrix} D_k & 0 & 0 \\ 0 & D_v & 0 \\ 0 & 0 & D_w \end{pmatrix}.$$

8. Сгенерировать набор сигма-точек:

$$\begin{split} \chi_k^{\alpha,0} &= \hat{X}_k^{\alpha}, \ \chi_k^{\alpha,i} = \hat{X}_k^{\alpha} + \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha}\right)_i, \\ \chi_k^{\alpha,i+N_{X^{\alpha}}} &= \hat{X}_k^{\alpha} - \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha}\right)_i, \ \gamma = \sqrt{N_{X^{\alpha}} + \lambda}, \ \lambda = \xi^2 \left(N_{X^{\alpha}} + p\right) - N_{X^{\alpha}}, \ i = 1, \dots, N_{X^{\alpha}}. \end{split}$$

- 9. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения состояния: $\overline{\chi}_k^i = f\left(\chi_k^{\alpha,i}\right), \, \overline{X}_k^i \in \mathbb{R}^n, \, i=0,...,L-1.$
 - 10. Найти прогнозное значение $\hat{\overline{X}}_{k}$:

$$\hat{\overline{X}}_{k} = \sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} \overline{X}_{k}^{i}, \quad w^{m,0} = \frac{\lambda}{N_{X^{\alpha}} + \lambda}, \quad w^{m,i} = \frac{1}{2(N_{X^{\alpha}} + \lambda)}, i = 1, ..., L - 1.$$

- 11. Получить UD-разложение матрицы $\overline{P}_k: [\overline{U}_k, \overline{D}_k] = UD(\overline{P}_k)$.
- 12. Сгенерировать набор сигма-точек:

$$\begin{split} & \overline{S}_k^\alpha = \overline{U}_k^\alpha \sqrt{\overline{D}_k^\alpha} \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,0} = \hat{\overline{X}}_k^\alpha \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,i} = \hat{\overline{X}}_k^\alpha + \gamma \Big(\overline{S}_k^\alpha\Big)_i \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,i+N_{\chi^\alpha}} = \hat{\overline{X}}_k^\alpha - \gamma \Big(\overline{S}_k^\alpha\Big)_i \,, \\ & \gamma = \sqrt{N_{\chi^\alpha} + \lambda} \,, \ \, \lambda = \xi^2 \Big(N_{\chi^\alpha} + p\Big) - N_{\chi^\alpha} \,, \ \, i = 1, \dots, N_{\chi^\alpha} \,. \end{split}$$

Civil Aviation High Technologies

- 13. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения наблюдения: $Y_k^i = g\left(\tilde{\chi}_k^{\alpha,i}\right), i = 0,...,L-1.$
- 14. Выполнить коррекцию прогноза и вычислить ковариационную матрицу ошибки оценки, использовав скаляризованную форму алгоритма фильтрации Калмана:

$$\begin{split} \hat{Y}_{k,j} &= \sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} Y_{k,j}^{i}, \, \hat{P}_{yy,k} = \sum_{i=0}^{L-1} w^{c,i} \Big(Y_{k,j}^{i} - \hat{Y}_{k,j}^{i} \Big) \Big(Y_{k,j}^{i} - \hat{Y}_{k,j}^{i} \Big)^{T}, \\ \hat{P}_{xy,k} &= \sum_{i=0}^{L-1} w^{c,i} \Big(\tilde{\chi}_{k}^{i} - \hat{\bar{X}}_{k}^{i} \Big) \Big(Y_{k,j}^{i} - \hat{Y}_{k,j}^{i} \Big)^{T}, \\ K_{k+1} &= \hat{P}_{xy,k} \Big(\hat{P}_{yy,k} \Big)^{-1}, \\ \hat{Z}_{k+1}^{(j+1)} &= \hat{Z}_{k+1}^{(j)} + K_{k+1} \Big(Y_{k+1,j} - \hat{Y}_{k,j} \Big), \, \hat{Z}_{k+1}^{1} = \hat{\bar{X}}_{k}, \\ G_{k}^{(j)} &= \bar{V}_{k} \, W^{c} \Big(\bar{V}_{k} \Big)^{T} - \bar{V}_{k} \, W^{c} \, \Big\{ Y_{k,j}^{i} - \hat{Y}_{k,j} \Big\}^{T} \Big(\hat{P}_{yy,k} \Big)^{-1} \, \Big\{ Y_{k,j}^{i} - \hat{Y}_{k,j} \Big\} W^{c} \Big(\bar{V}_{k} \Big)^{T}, \\ &[U_{G,k}^{(j)}, D_{G,k}^{(j)}] = UD \Big(G_{k}^{(j)} \Big), \quad j = 1, \dots, q, \ i = 0, \dots, L-1. \end{split}$$

- 15. Положить $U_{k+1} = \overline{U}_k U_{G,k}^q$, $D_{k+1} = D_{G,k}^q$, $\hat{X}_{k+1} = Z_{k+1}^q$.
- 16. Если k=N , то вычисления завершить. В противном случае положить k=k+1 и перейти к п. 5.

UD-МОДИФИКАЦИЯ СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА ЧАСТИЦ

Для нахождения апостериорной плотности $p(x_k \big| Y_1^k)$ вводится набор случайных частиц (точек) $X_k^i, i=1,...,N_p$, таких, что

$$p(x_k|Y_1^k) \approx \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \delta(x_k - X_k^i) = \hat{p}(x_k|Y_1^k),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Тогда для произвольной нелинейной функции $f(x_k)$ справедливо

$$M(f(x_k)) = \int f(x_k) p(x_k|Y_1^k) dx_k \approx \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} f(X_k^i).$$
(3)

В силу того, что характер $p(x_k | Y_1^k)$ не известен, сгенерировать случайные точки затруднительно. Вводится распределение значимости $q(x_k | Y_1^k)$, в большинстве случаев выбираемое гауссовским, на основании которого происходит генерация частиц.

Таким образом, (3) можно переписать в виде

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\begin{split} M\left(f\left(x_{k}\right)\right) &= \int f\left(x_{k}\right) \frac{p\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)}{q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)} q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right) dx_{k} = \int f\left(x_{k}\right) \frac{p\left(Y_{1}^{k} \middle| x_{k}\right) p\left(x_{k}\right)}{p\left(Y_{1}^{k}\right) q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)} q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right) dx_{k} = \\ &= \frac{1}{p\left(Y_{1}^{k}\right)} \int f\left(x_{k}\right) w_{k} q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right) dx_{k} = \frac{\int f\left(x_{k}\right) w_{k} q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right) dx_{k}}{\int \frac{p\left(Y_{1}^{k} \middle| x_{k}\right) p\left(x_{k}\right)}{q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)} q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right) dx_{k}} \approx \frac{\frac{1}{N_{p}} \sum_{i=1}^{N_{p}} w_{k}^{i} f\left(X_{k}^{i}\right)}{\frac{1}{N_{p}} \sum_{i=1}^{N_{p}} w_{k}^{i}} = \sum_{i=1}^{N_{p}} \tilde{w}_{k}^{i} f\left(X_{k}^{i}\right), \end{split}$$

где w_k^i — веса частиц $X_k^i, i=1,...,N_p$, которые могут быть вычислены на основе следующих соотношений:

$$\begin{split} w_{k} &= \frac{p\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)}{q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)} = \frac{p\left(y_{k} \middle| Y_{1}^{k-1}, x_{k}\right) p\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k-1}\right)}{p\left(y_{k} \middle| Y_{1}^{k-1}\right) q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)} \propto \frac{cp\left(y_{k} \middle| x_{k}\right) p\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k-1}\right)}{q\left(x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)}, \\ w_{k}^{i} &\approx \frac{p\left(y_{k} \middle| X_{k}^{i}\right) p\left(X_{k}^{i} ; x_{k} \middle| Y_{1}^{k-1}\right)}{q\left(X_{k}^{i} ; x_{k} \middle| Y_{1}^{k}\right)}, i = 1, \dots, N_{p}. \end{split}$$

Эволюция частиц во времени происходит согласно уравнению состояния. Для генерации частиц выбирается распределение значимости. В случае если оно полагается гауссовским с параметрами, оцениваемыми на основании алгоритма Unscented-преобразования, получают алгоритм сигма-точечного фильтра частиц.

АЛГОРИТМ СИГМА-ТОЧЕЧНОГО ФИЛЬТРА ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ UD-РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ КОВАРИАЦИЙ

- 1. Инициализировать \hat{X}_0 , \hat{P}_0 , N, n, m, где N- количество итераций по времени, n- размерность вектора состояния системы, q- размерность вектора наблюдения.
 - 2. Положить $k=0\,,\;N_{_{Y^{\alpha}}}=2n+q\;,L=2N_{_{Y^{\alpha}}}+1\,.$
 - 3. Получить UD-разложение матриц Σ_v , Σ_w : $[U_v, D_v] = UD(\Sigma_v)$; $[U_w, D_w] = UD(\Sigma_w)$.
 - 4. Получить UD-разложение матрицы $\hat{P}_k : [U_k, D_k] = UD(\hat{P}_k)$.
 - 5. Сформировать вектор системы $\hat{X}_k^{\alpha} = \left(\hat{X}_k, m_v, m_w\right)^T$.
 - 6. Сформировать $\hat{S}_k^{\alpha} = U_k^{\alpha} \sqrt{D_k^{\alpha}}$,

$$U_k^{\alpha} = \begin{pmatrix} U_k & 0 & 0 \\ 0 & U_v & 0 \\ 0 & 0 & U_w \end{pmatrix}, \ D_k^{\alpha} = \begin{pmatrix} D_k & 0 & 0 \\ 0 & D_v & 0 \\ 0 & 0 & D_w \end{pmatrix}.$$

Civil Aviation High Technologies

7. Сгенерировать набор сигма-точек

$$\begin{split} \chi_k^{\alpha,0} &= \hat{X}_k^{\alpha}, \ \chi_k^{\alpha,i} = \hat{X}_k^{\alpha} + \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha} \right)_i, \\ \chi_k^{\alpha,i+N_{\chi^{\alpha}}} &= \hat{X}_k^{\alpha} - \gamma \left(\hat{S}_k^{\alpha} \right)_i, \ \gamma = \sqrt{N_{\chi^{\alpha}} + \lambda}, \ \lambda = \xi^2 \left(N_{\chi^{\alpha}} + p \right) - N_{\chi^{\alpha}}, \ i = 1, \dots, N_{\chi^{\alpha}}. \end{split}$$

- 8. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения состояния: $\bar{\chi}_k^i = f\left(\chi_k^{\alpha,i}\right), \; \bar{\chi}_k^i \in \mathbb{R}^n, \; i=0,...,L-1.$
 - 9. Найти прогнозное значение $\hat{\bar{X}}_k$:

$$\hat{\overline{X}}_k = \sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} \overline{\chi}_k^i, \quad w^{m,0} = \frac{\lambda}{N_{\chi^{\alpha}} + \lambda}, \quad w^{m,i} = \frac{1}{2(N_{\chi^{\alpha}} + \lambda)}, i = 1, ..., L - 1.$$

- 10. Получить UD-разложение матрицы $\overline{P}_k: [\overline{U}_k, \overline{D}_k] = UD(\overline{P}_k)$.
- 11. Сгенерировать набор сигма-точек:

$$\begin{split} & \overline{S}_k^{\alpha} = \overline{U}_k^{\alpha} \sqrt{\overline{D}_k^{\alpha}} \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,0} = \hat{\overline{X}}_k^{\alpha} \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,i} = \hat{\overline{X}}_k^{\alpha} + \gamma \Big(\overline{S}_k^{\alpha}\Big)_i \,, \ \, \widetilde{\chi}_k^{\alpha,i+N_{\chi^{\alpha}}} = \hat{\overline{X}}_k^{\alpha} - \gamma \Big(\overline{S}_k^{\alpha}\Big)_i \,, \\ & \gamma = \sqrt{N_{\chi^{\alpha}} + \lambda} \,, \ \, \lambda = \xi^2 \Big(N_{\chi^{\alpha}} + p\Big) - N_{\chi^{\alpha}} \,, \ \, i = 1, \dots, N_{\chi^{\alpha}} \,. \end{split}$$

- 12. Получить преобразованные значения сигма-точек на основании уравнения наблюдения: $Y_k^i = g\left(\widetilde{\chi}_k^{\alpha,i}\right), i = 0,...,L-1$.
- 13. Выполнить коррекцию прогноза и вычислить ковариационную матрицу ошибки оценки, использовав скаляризованную форму алгоритма фильтрации Калмана:

$$\begin{split} \hat{Y}_{k,j} &= \sum_{i=0}^{L-1} w^{m,i} Y_{k,j}^i, \ \hat{P}_{yy,k} = \sum_{i=0}^{L-1} w^{c,i} \left(Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j}^i \right) \left(Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j}^i \right)^T, \\ \hat{P}_{xy,k} &= \sum_{i=0}^{L-1} w^{c,i} \left(\tilde{\chi}_k^i - \hat{X}_k^i \right) \left(Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j}^i \right)^T, \\ K_{k+1} &= \hat{P}_{xy,k} \left(\hat{P}_{yy,k} \right)^{-1}, \\ \hat{Z}_{k+1}^{(j+1)} &= \hat{Z}_{k+1}^{(j)} + K_{k+1} \left(Y_{k+1,j} - \hat{Y}_{k,j} \right), \ \hat{Z}_{k+1}^1 &= \hat{X}_k, \\ G_k^{(j)} &= \overline{V}_k W^c \left(\overline{V}_k \right)^T - \overline{V}_k W^c \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\}^T \left(\hat{P}_{yy,k} \right)^{-1} \left\{ Y_{k,j}^i - \hat{Y}_{k,j} \right\} W^c \left(\overline{V}_k \right)^T, \\ [U_{G,k}^{(j)}, D_{G,k}^{(j)}] &= UD \left(G_k^{(j)} \right), \ j = 1, \dots, q, \ i = 0, \dots, L-1. \end{split}$$

14. Положить $\hat{S}_{k+1} = \overline{U}_k U_{G,k}^q \sqrt{D_{G,k}^q}$, $\hat{Z}_{k+1} = Z_{k+1}^q$.

Vol. 21, No. 02, 2018

15. Сгенерировать набор частиц:

$$Z_{k+1}^{l} \sim N(z, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1}), l = 1, ..., N_{p}.$$

16. Вычислить веса частиц:

$$w_{k}^{l} = \frac{p(Y_{k+1}, Z_{k+1}^{l}) N(Z_{k+1}^{l}, \hat{\overline{X}}_{k}, \overline{P}_{k})}{N(Z_{k+1}^{l}, \hat{Z}_{k+1}, \hat{S}_{k+1})}, l = 1, ..., N_{p}.$$

17.
$$\hat{X}_{k+1} = \sum_{l=1}^{N_p} w_k^l Z_{k+1}^l$$
; $\hat{P}_{k+1} = \sum_{l=1}^{N_p} w_k^l (Z_{k+1}^l - \hat{Z}_{k+1}) (Z_{k+1}^l - \hat{Z}_{k+1})^T$.

18. Если k=N , то вычисления завершить. В противном случае положить k=k+1 и перейти к п. 4.

ЗАДАЧА СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ В ПАССИВНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим задачу сопровождения цели в пассивном режиме, т. е. модель, в которой наблюдениями является только пеленг (угол) сопровождаемого объекта. Такого рода задачи очень часто возникают, например, в гидролокации, когда наблюдатель не может облучать объект с целью измерения дистанции до него. Пусть на интервале времени [0,T] имеются дискретные отсчеты времени: $t_k = \Delta_t k, \ \Delta_t = T/N, \ k = 0,...,N$. Тогда в простейшем двумерном случае модель движения можно описать следующим образом:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = x(t_k) + v_x(t_k) \Delta_t + \frac{a_x(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_x(k), \\ y(t_{k+1}) = y(t_k) + v_y(t_k) \Delta_t + \frac{a_y(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_y(k). \end{cases}$$
(4)

Наблюдателю доступны только значения пеленга:

$$\theta(t_{k+1}) = \arctan\left(\frac{y(t_{k+1})}{x(t_{k+1})}\right) + w_{\theta}(k), \tag{5}$$

где $w_{\theta}(t_k)$ — гауссовская белошумная помеха с известной дисперсией σ_w^2 и нулевым математическим ожиданием, а $\varepsilon_x(k)$, $\varepsilon_y(k)$ — белошумные возмущения с известными дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 и нулевыми математическими ожиданиями. Начальное положение сопровождаемого объекта определяется случайным гауссовским вектором с известной ковариационной матрицей.

Для сведения задачи (4)–(5) к модели (1)–(2) необходимо положить

Civil Aviation High Technologies

$$f(X_k, V_k) = \begin{bmatrix} x(t_k) + v_x(t_k) \Delta_t + \frac{a_x(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_x(k) \\ y(t_k) + v_y(t_k) \Delta_t + \frac{a_y(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_y(k) \end{bmatrix}, \quad X_k = \begin{bmatrix} x(t_k) \\ y(t_k) \end{bmatrix}, \quad V_k = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(k) \\ \varepsilon_y(k) \end{bmatrix}$$

и вектор-функция

$$g(X_k, W_k) = \arctan(y(t_k) / x(t_k)) + w_\theta(k), \quad Y_k = \theta(t_k), \quad W_k = w_\theta(k).$$

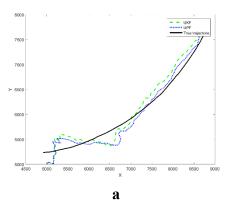
Кроме того, предполагается, что в модели (1)–(2)

$$X_0 \sim \mathcal{N}(m_0, \Sigma_0), \quad \Sigma_0 \in \mathbb{R}_+^{2 \times 2}, \quad m_0 \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma_v = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_w = \sigma_w^2,$$

где
$$m_0[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 5000, \, 5000 \end{pmatrix}^T$$
, $\Sigma_0[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$, $\sigma_x[\mathbf{M}] = 3, 2$, $\sigma_y[\mathbf{M}] = 3, 2$, $\sigma_w[\mathbf{r} \mathbf{p} \mathbf{a} \mathbf{\beta}] = 1$,

$$\Delta_{t}[c] = 5, \ T[c] = 300, \ v_{x}(t_{k})[\text{M/c}] = v\cos(\Delta_{\phi}k), \ v_{y}(t_{k})[\text{M/c}] = v\sin(\Delta_{\phi}k), \ a_{x}(t_{k})[\text{M/c}^{2}] = 10, \\ a_{y}(t_{k})[\text{M/c}^{2}] = 10, \ \Delta_{\phi}[\text{град}] = 0, 5.$$

Следует отметить, что только по значениям пеленга в общем случае отсутствует возможность определения координат цели, что приводит к неоднозначности рассматриваемой модели. Однако в случае наличия помехи происходит регуляризация модели и координаты цели поддаются оценке. На рис. 1, a продемонстрирована отдельная оценка траектории движения наблюдаемой цели, а на рис. 1, δ указана RMS ошибка оценки расстояния между наблюдателем и сопровождаемым объектом (расчет производился для 1000 реализаций).



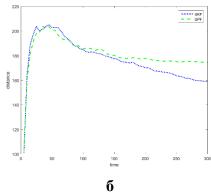


Рис. 1. Для случая пассивной локации: оценка отдельной траектории для UD-UKF и UD-UPF фильтров (а); RMS-ошибка между истинным положением и полученным с помощью соответствующих фильтров (б) **Fig. 1.** Evaluation of an individual trajectory for UD-UKF and UD-UPF filters (a);

RMS error between the actual position and received by means of related filters (6)

Рассматриваемый пример иллюстрирует решение задачи трассового анализа при гидролокации для движущегося подводного объекта. Числовые параметры модели соответствуют частному примеру движения подобных подводных объектов наблюдения.

Начальное положение объекта моделировалось с большей дисперсией, чем последующие возмущения в ее траектории с целью смоделировать случай, когда в начальный момент времени наблюдателю мало известно о начальном положении цели.

ЗАДАЧА СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ В АКТИВНОМ РЕЖИМЕ

Далее рассмотрим задачу сопровождения цели в активном режиме. В этом примере, в отличие от предыдущего, наблюдателю доступны помимо пеленга еще значения дистанции. Таким образом, в модели наблюдения (4) добавится уравнение для наблюдаемой дистанции, и в итоге модель наблюдения примет следующий вид:

$$\begin{cases} \theta(t_{k+1}) = \arctan\left(\frac{y(t_{k+1})}{x(t_{k+1})}\right) + w_{\theta}(k), \\ \rho(t_{k+1}) = \sqrt{x^2(t_{k+1}) + y^2(t_{k+1})} + w_{\rho}(k). \end{cases}$$
(6)

Кроме того, добавим в исходную модель (4) случайное маневрирование наблюдаемого объекта, т. е. добавим случайное изменение угла $\phi(t_k)$ направления вектора скорости:

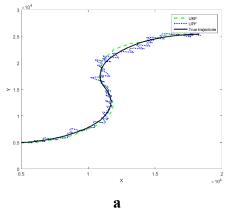
$$\begin{cases} x(t_{k+1}) = x(t_k) + v(t_k) \cos(\phi(t_k)) \Delta_t + \frac{a_x(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_x(k), \\ y(t_{k+1}) = y(t_k) + v(t_k) \sin(\phi(t_k)) \Delta_t + \frac{a_y(t_k) \Delta_t^2}{2} + \varepsilon_y(k), \\ \phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \varepsilon_\phi(k). \end{cases}$$
(7)

Далее проведем численное моделирование для рассматриваемого примера. Для проверки работоспособности построенных фильтров в реальных условиях для модели (7), на вход в качестве измерений будут поступать дистанция и пеленг для движения цели с фиксированным неизвестным для наблюдателя маневром. Маневр задается функцией $\phi(t_k)$:

$$\begin{cases} \phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \Delta_{\phi}, & t_k \leq T_0, \\ \phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) - \Delta_{\phi}, & t_k > T_0. \end{cases}$$

Данный маневр наглядно виден на рис. 2. На рис. 2, *а*, *б* изображены графики отдельной траектории и RMS-ошибка оценки фильтрации соответственно. RMS-оценка фильтрации рассчитывалась методом Монте-Карло по 1000 траекторий. Значения числовых параметров для расчетов выбирались равными:

$$\begin{split} & m_0[\mathbf{M}] = \left(5000, \, 5000\right)^T, \, \Sigma_0[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \, \, \sigma_x[\mathbf{M}] = 10, \\ & \sigma_y[\mathbf{M}] = 10, \, \sigma_\theta[\operatorname{rpad}] = 573, \, \sigma_\rho[\operatorname{rpad}] = 1, \, \sigma_\phi[\operatorname{rpad}] = 0,00873, \, \Delta_t[\mathbf{c}] = 10, \, \, T[\mathbf{c}] = 1200, \\ & v_x(t_k)[\mathbf{M}/\mathbf{c}] = 15, \, v_y(t_k)[\mathbf{M}/\mathbf{c}] = 14, \, a_x(t_k)[\mathbf{M}/\mathbf{c}^2] = 0, 5, \, a_y(t_k)[\mathbf{M}/\mathbf{c}^2] = 0, 5. \end{split}$$



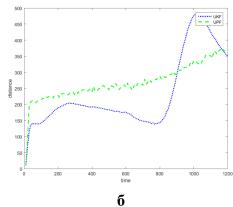


Рис. 2. Для случая активной локации: оценка отдельной траектории для UD-UKF и UD-UPF фильтров (а); RMS-ошибка между истинным положением и полученным с помощью соответствующих фильтров (б) Fig. 2. Evaluation of an individual trajectory for UD-UKF and UD-UDF filters (a); RMS Error between the actual position and received by means of related filters (б)

Для численного решения данных задач с помощью рассмотренных UD-UKF и UD-UPF алгоритмов выбирались следующие значения параметров: $\xi = 0.5$, $\beta = 2$, p = 0.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из приведенных численных результатов примера видно, что значения RMS-ошибки для UD-UKF фильтра немного меньше, чем для UD-UPF фильтра. В первом примере с ростом объема наблюдений для UD-UKF фильтра ошибка начинает уменьшаться. Во втором примере после второй части маневра ошибка постепенно начинает увеличиваться. Большую неточность UD-UPF по сравнению с UD-UKF фильтром можно объяснить недостаточным количеством частиц, моделируемых для UPF фильтра. С ростом числа частиц точность UD-UPF фильтра растет, но вычислительные затраты на моделирование этих частиц становятся весьма существенными.

В ходе работы алгоритмов для UD-UPF фильтра в ряде случаев наблюдается вырождение ковариационных матриц, для которых производится UD-разложение (UD-разложение требует невырожденных матриц). Данная проблема была устранена регуляризацией этих матриц путем добавления единичной матрицы с малым коэффициентом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Julier S.J., Uhlmann J.K. Unscented filtering and nonlinear estimation // Proc. Of IEEE. 2004. No. 3. Pp. 401–422.
- **2.** Chen Z. Bayesian filtering: From Kalman filters to particle filters, and beyond // Statistics. 2003. No. 1. Pp. 1–69.
- **3. Миллер А.Б., Миллер Б.М.** Отслеживание подводной цели с использованием пеленгационных измерений // Информационные процессы. 2016. Т. 16, № 2. С. 103–111.
- **4. Miller A., Miller B.** Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations. Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control December 15–17, 2014. Los Angeles, California, USA, 2014. Pp. 4178–4174.
- **5.** Comparison of EKF, Pseudomeasurement and Particle Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem, in Proc. SPIE Int. Soc. Optic. Eng. / X. Lin, T. Kirubarajan, Y. Bar-Shalom, S. Maskell. 2002. Vol. 4728. Pp. 240–250.
- **6. Simon D.** Optimal state estimation: Kalman, H^{∞} and nonlinear approaches. John Wiley & Sons, 2006. 552 p.

Vol. 21, No. 02, 2018

- **7. Verhaegen M., Van Dooren P.** Numerical Aspects of different Kalman filter implementations // IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL. 1996. Vol. AC–31, No. 10. Pp. 907–917.
- **8. Bierman G.I.** Factorization methods for Discrete Sequential Estimation. New York: Academic Press, 1977. 238 p.
- **9. Golub G.H., Van Loan C.F.** Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, 1996. 695 p.
- **10. Кудрявцева И.А.** Анализ эффективности расширенного фильтра Калмана, сигматочечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 224. С. 43–52.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кудрявцева Ирина Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), kudryavtseva.irina.a@gmail.com.

Лебедев Максим Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования Московского авиационного института (национального исследовательского университета), max max82@inbox.ru.

APPLICATION OF MODIFIED UNSCENTED KALMAN FILTER AND UNSCENTED PARTICLE FILTER TO SOLVING TRACKING PROBLEMS

Irina A. Kudryavtseva¹, Maksim V. Lebedev¹

 1 Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant № 17-08-00530 A

ABSTRACT

The paper describes two modified implementations of unscented Kalman filter (UKF) and unscented particle filter (UPF) to solve nonlinear filtering problem for discrete-time dynamic space model (DSSM). DSSM is supposed to be nonlinear with additive Gaussian noise. The considered algorithm modifications are based on combination of UD-factorization of covariance matrices with sequential Kalman filter. The solution of tracking problem is illustrated for two cases. In the first case the problem of estimate of movable target coordinates from observed noised bearing is considered (a problem of passive location). In the second case the problem of an active location is described when noisy values of a distance to the accompanied object besides a bearing are available to the observer. Moreover, in the second case the motion model is extended by means of introducing a new parameter (a maneuver) such as an angle of velocity direction. To examine robustness of the considered algorithms in active target tracking problem (the second case) an arbitrary maneuver that differs from the initially given one in the motion model is considered as an observation.

Key words: nonlinear filtering, Monte-Carlo methods, UD-conversion, Unscented Kalman Filter, Unscented Particle Filter.

REFERENCES

- **1. Julier S.J., Uhlmann J.K.** Unscented filtering and nonlinear estimation. Proc. Of IEEE, 2004, no. 3, pp. 401–422.
- **2.** Chen **Z.** Bayesian filtering: From Kalman filters to particle filters, and beyond. Statistics, 2003, no. 1, pp. 1–69.

- **3. Miller A.B., Miller B.M.** Otslezhivanie podvodnoj celi s ispol'zovaniem pelengacionnyh izmerenij. Information processes, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 103–111. (in Russian)
- **4. Miller A., Miller B.** Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations. Proceedings of 53rd IEEE Conference on Decision and Control December 15–17, 2014. Los Angeles, California, USA, 2014, pp. 4178–4174.
- **5.** Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S. Comparison of EKF, Pseudomeasurement and Particle Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem, in Proc. SPIE Int. Soc. Optic. Eng., 2002, vol. 4728, pp. 240–250.
- **6. Simon D.** Optimal state estimation: Kalman, H^{∞} and nonlinear approaches. John Wiley & Sons, 2006, 552 p.
- **7. Verhaegen M., Van Dooren P.** Numerical Aspects of different Kalman filter implementations. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, 1996, vol. AC-31, no. 10, pp. 907–917.
- **8. Bierman G.I.** Factorization methods for Discrete Sequential Estimation. New York: Academic Press, 1977, 238 p.
- **9. Golub G.H., Van Loan C.F.** Matrix computations. The Johns Hopkins University Press, 1996, 695 p.
- 10. Kudryavtseva I.A. Analiz effektivnosti rasshirennogo fil'tra Kalmana, sigma-tochechnogo fil'tra Kalmana i sigma-tochechnogo fil'tra chastic [Efficiency analysis of extended Kalman filtering, Unscented Kalman filtering and Unscented particle filtering]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2016, no. 224, pp. 43–52. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Irina A. Kudryavtseva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematical Cybernetics Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), kudryavtseva.irina.a@gmail.com.

Maksim V. Lebedev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Probability Theory and Computer Simulation Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), max max82@inbox.ru.

 Поступила в редакцию
 03.11.2017
 Received
 03.11.2017

 Принята в печать
 14.03.2018
 Accepted for publication
 14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК: 629.7.07

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-22-31

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРАФИКОМ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ, СЛЕДУЮЩИХ В АЭРОДРОМНОЙ ЗОНЕ НА ПОСАДКУ

И.Б. ИВЕНИН 1 , А.С. КУРИЛЁНОК 2

¹ Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (государственный научный центр Российской Федерации),

г. Москва, Россия

² Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия

Предлагается методический подход к оптимизации управления потоком воздушных судов, прибывающих в аэродромную зону для выполнения посадки. Моделируется аэродром, имеющий две параллельные взлетно-посадочные полосы, способные работать независимо друг от друга. Входящий поток воздушных судов описывается пуассоновским потоком случайных событий. Прибывающие воздушные суда распределяются диспетчером между двумя взлетно-посадочными полосами, траектории (схемы) захода на которые имеют различную длину, общую начальную точку и не имеют пересечений. Для каждой из двух схем захода диспетчером задается средняя скорость движения воздушных судов. Приведенная модель аэродромаи аэродромной зоны рассматривается как двухканальная система массового обслуживания с отказами. Каждыйиз двух обслуживающих приборов включает в себя схему захода, глиссаду и взлетно-посадочную полосу. Обслуживающий прибор может находиться в одном из двух состояний – свободном и занятом, вероятности которых описываются системой дифференциальных уравнений Колмогорова. Критерием оценки качества функционирования системы служит количество отказов в обслуживании на исследуемом интервале времени, описываемое интегральным функционалом. Оптимизационная задача сводится к нахождению доставляющих минимум критериальному функционалу значений управляющих параметров – функций, описывающих распределение входящего потока воздушных судов между схемами захода и средние скорости их движения. Для решения сформулированной оптимизационной задачи применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина. Приводится вид функции Гамильтона и сопряженной системы дифференциальных уравнений. Структура оптимального управления исследована для двух различных случаев ограничений на управление распределением входящего потока воздушных судов. Выявлены закономерности влияния управляющих параметров на критериальный функционал.

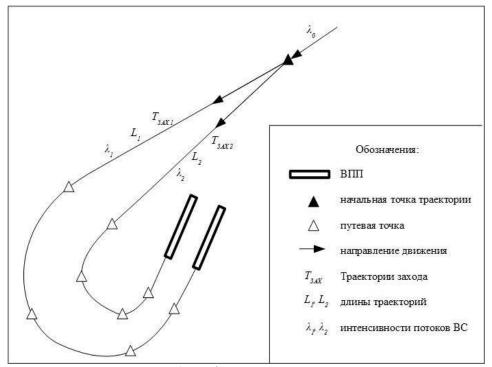
Ключевые слова: оптимальное управление, оптимизация, принцип максимума Понтрягина, воздушное движение, управление воздушным движением, моделирование воздушного движения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с постоянным увеличением интенсивности воздушного движения все большее внимание уделяется поиску путей повышения пропускной способности аэропортов. Этой теме посвящены многие исследования, основанные на детальном аналитическом [1], имитационном [2, 3] и гибридном [4] моделировании взаимосвязанного движения воздушных судов (ВС) и процессов управления воздушным движением (УВД). Результаты этих исследований показывают, что пропускную способность аэропорта ограничивают не только возможности взлетно-посадочной полосы (ВПП), но и риски возникновения конфликтных ситуаций в воздушном пространстве [5, 6, 7]. Важными аспектами исследования безопасности воздушного движения в районе аэродромов являются оптимизация управления ВС [8] и моделирование взаимодействия ВС со спутными следами [9, 10]. Если интерпретировать все средства и службы аэропорта как управляемую систему массового обслуживания ВС, то задачу повышения пропускной способности можно рассматривать как задачу оптимального управления трафиком ВС в аэродромной зоне. В данной работе рассматривается частная задача управления трафиком ВС, следующих в аэродромной зоне на посадку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТРАФИКОМ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

В целях разработки методики оптимизации трафика BC рассмотрим модель аэродромной зоны, включающую в себя две параллельно расположенных взлетно-посадочных полосы, заход на посадку на которые осуществляется по двум непересекающимся траекториям T_{3AX1} и T_{3AX2} , имеющим общую начальную точку. Длины указанных траекторий равны L_1 и L_2 соответственно. Конфигурация схем захода приведена на рисунке 1.



Puc. 1. Конфигурация схем захода **Fig. 1.** Approach flight paths configuration

В аэродромную зону прибывает поток следующих на посадку воздушных судов, разделяемый диспетчером в начальной точке траекторий захода на два потока. Будем считать, что обе ВПП могут работать одновременно, и после разделения потоки заходящих на посадку воздушных судов не взаимодействуют между собой.

Опишем рассматриваемую нами модель в терминах теории массового обслуживания. Структура соответствующей системы массового обслуживания показана на рис. 2.

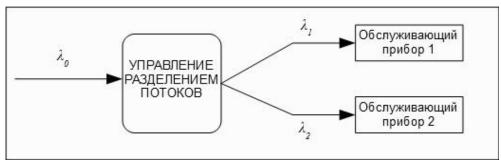


Рис. 2. Структура системы массового обслуживания **Fig. 2.** Mass service system structure

Обслуживающий прибор агрегирует в себе процессы движения ВС по траектории захода на посадку, глиссаду и движение по ВПП. Управляемыми параметрами (управлениями) являются распределение входящего потока (трафик ВС) и скорость воздушных судов при следовании на посадку. Предполагается, что управлением скоростью ВС можно достичь выравнивания трафика ВС, выходящих на глиссаду, и избежать конфликтных ситуаций.

Сделаем допущение о пуассоновском распределении входящего потока воздушных судов с интенсивностью λ_0 . Управление разделением потоков входящих BC подчиняется следующим правилам:

$$\begin{cases} \lambda_1 = U_1 \lambda_0 \\ \lambda_2 = U_2 \lambda_0 \\ U_1 + U_2 = 1 \\ U_1 \ge 0 \\ U_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

Опишем далее управление скоростью воздушных судов, следующих на посадку. Пусть μ_i – интенсивность обслуживания поступающих BC i-м обслуживающим прибором, определяемая выражением

$$\mu_i = \frac{1}{t_{\text{obs}_i} + \tau_i},\tag{2}$$

где $au_i = \frac{L_i}{V_i} \in \left[\frac{L}{V_{\max i}}, \frac{L}{V_{\min i}}\right]$ — время, требуемое для выполнения захода на посадку,

i = 1,2 — номер ВПП и соответствующей ей траектории захода на посадку, V_i — средняя скорость движения самолетов по i-й схеме захода на посадку, $V_{\max i}$ — максимальная допустимая скорость при выполнении захода, $V_{\min i}$ — минимальная допустимая скорость при выполнении захода, $t_{\text{обс}i}$ — время, требуемое для выполнения посадки от момента выхода ВС на глиссаду.

Изменение времени обслуживания ВС производится через регулирование средних скоростей их движения для каждой из схем захода.

Обслуживающий прибор может находиться в одном из двух состояний — свободном и занятом. В первом случае выполнение захода прибывшего ВС на посадку по выбранной схеме с соблюдением норм пространственного и временного эшелонирования возможно, во втором — нет. Обозначим через $P_{i,0}$ вероятность свободного состояния i-го обслуживающего прибора, через $P_{i,1}$ — вероятность того, что прибор занят. Интенсивности перехода между свободным и занятым состоянием обслуживающих приборов соответствуют значениям λ_i и μ_i (рис. 3).



Рис. 3. Вероятности состояний обслуживающих приборов **Fig. 3.** Probabilities of servicing units conditions

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний траекторий захода на посадку имеет вид

$$\begin{cases} \dot{P}_{1,0} = -\lambda_1 P_{1,0} + \mu_1 P_{1,1}; \\ \dot{P}_{1,1} = \lambda_1 P_{1,0} - \mu_1 P_{1,1}; \\ \dot{P}_{2,0} = -\lambda_2 P_{2,0} + \mu_2 P_{2,1}; \\ \dot{P}_{2,1} = \lambda_2 P_{2,0} - \mu_2 P_{2,1}. \end{cases}$$
(3)

Критерием качества функционирования описанной системы массового обслуживания является количество необслуженных ВС за контрольный промежуток времени, определяемое критериальным функционалом:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\lambda_1 P_{1,1} + \lambda_2 P_{2,1}] dt , \qquad (4)$$

где t_0 и t_1 — соответственно начальный и конечный момент моделируемого периода времени.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТРАФИКОМ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

Для поиска оптимальных управлений $U_1^*, U_2^*, V_1^*, V_2^*$ воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина, в соответствии с которым оптимальные управления, минимизирующие функционал (4) должны доставлять максимальное значение функции Гамильтона – Понтрягина:

$$H = \sum_{i=0}^{4} \psi_i f_i \,, \tag{5}$$

где ψ_i — функции сопряженной системы дифференциальных уравнений, $f_0 = \lambda_1 P_{1,1} + \lambda_2 P_{1,2}$ — подынтегральная функция критериального функционала.

Функция Гамильтона – Понтрягина может быть записана в развернутом виде:

$$H = U_{1} \left[-\lambda_{0} P_{1,1} - \lambda_{0} P_{1,0} \psi_{1} + \lambda_{0} P_{1,0} \psi_{2} \right] + U_{2} \left[-\lambda_{0} P_{2,1} - \lambda_{0} P_{2,0} \psi_{3} + \lambda_{0} P_{2,0} \psi_{4} \right] + \frac{1}{t_{o\delta c1} + \frac{L_{1}}{V_{1}}} \left[P_{1,1} \psi_{1} - P_{1,1} \psi_{2} \right] + \frac{1}{t_{o\delta c2} + \frac{L_{2}}{V_{2}}} \left[P_{2,1} \psi_{3} - P_{2,1} \psi_{4} \right].$$

$$(6)$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \psi_{1} = \frac{\partial H}{\partial P_{1,0}} = -\lambda_{1} \psi_{1} + \lambda_{1} \psi_{2}; \\ \psi_{2} = \frac{\partial H}{\partial P_{1,1}} = -\lambda_{1} + \mu_{1} \psi_{1} - \mu_{1} \psi_{2}; \\ \psi_{3} = \frac{\partial H}{\partial P_{2,0}} = -\lambda_{2} \psi_{3} + \lambda_{2} \psi_{4}; \\ \psi_{4} = \frac{\partial H}{\partial P_{1,0}} = -\lambda_{2} + \mu_{2} \psi_{3} - \mu_{2} \psi_{4}. \end{cases}$$

$$(7)$$

Найдем структуру оптимального управления исходя из условия максимума гамильтониана:

$$[U_1^*, U_2^*, V_1^*, V_2^*] = \arg\sup_{U, V} H(P, \psi, U, V).$$
(8)

Ввиду линейности гамильтониана по управлениям U_1 и U_2 задача отыскания оптимального управления распределением потоков имеет решение «релейного» вида:

$$\begin{cases} U_1^* = 1 \\ U_2^* = 0 \end{cases}, \text{ если } -\lambda_0 P_{1,1} - \lambda_0 P_{1,0} \psi_1 + \lambda_0 P_{1,0} \psi_2 < -\lambda_0 P_{2,1} - \lambda_0 P_{2,0} \psi_3 + \lambda_0 P_{2,0} \psi_4 , \end{cases}$$
 и
$$\begin{cases} U_1^* = 0 \\ U_2^* = 1 \end{cases}, \text{ если } -\lambda_0 P_{1,1} - \lambda_0 P_{1,0} \psi_1 + \lambda_0 P_{1,0} \psi_2 \ge -\lambda_0 P_{2,1} - \lambda_0 P_{2,0} \psi_3 + \lambda_0 P_{2,0} \psi_4 . \end{cases}$$
 (9)

Для определения структуры оптимального управления скоростью необходимо решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial V_{1}} = \frac{\left(P_{1,1}\psi_{1} - P_{1,1}\psi_{2}\right)L_{1}}{\left(t_{1} + \frac{L_{1}}{V_{1}}\right)^{2}V_{1}^{2}} = 0; \\ \frac{\partial H}{\partial V_{2}} = \frac{\left(P_{2,1}\psi_{3} - P_{2,1}\psi_{4}\right)L_{2}}{\left(t_{2} + \frac{L_{2}}{V_{2}}\right)^{2}V_{2}^{2}} = 0 \end{cases}$$

$$(10)$$

при выполнении условий $V_i \in \left\lceil V_{\min i}, V_{\max i} \right\rceil$.

Равенство (10) выполняется при выполнении любого из условий (11)–(13):

$$P_{i,1} = 0$$
, (11)

$$L_i = 0, (12)$$

Civil Aviation High Technologies

$$\psi_1 = \psi_2 \quad unu \quad \psi_3 = \psi_4, \tag{13}$$

при этом очевидно, что выполнение равенства (10) не может быть достигнуто каким-либо значением средней скорости движения самолетов V_i . Значение гамильтониана увеличивается с ростом V_i и достигает максимума при $V_i^* = V_{\max i}$, как показано на рис. 4 для частного случая.

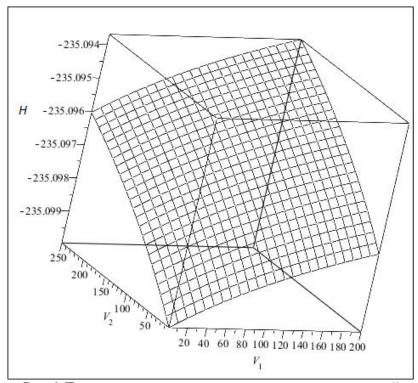


Рис. 4. Пример зависимости гамильтониана от средних скоростей **Fig. 4**. Example of dependence of a Hamiltonian on average approach speed

Рассмотрим теперь случай, когда ограничения на управление распределением потоков имеют вид

$$\begin{cases} U_{1} + U_{2} \leq 1; \\ 0 \leq U_{1} \leq 1; \\ 0 \leq U_{2} \leq 1; \\ \lambda_{0} U_{1} \leq \lambda_{OPP1}; \\ \lambda_{0} U_{2} \leq \lambda_{OPP2}. \end{cases}$$
(14)

Ограничение интенсивностей потоков BC на каждой из схем захода обеспечивает соблюдение норм пространственного и временного эшелонирования для заходящих на посадку BC при высокой интенсивности входящего потока BC λ_0 . Вид системы дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний (3), сопряженной системы дифференциальных уравнений (7) и гамильтониана (6) останется в этом случае неизменным. Структура оптимального управления средней скоростью заходящих на посадку BC также не претерпит изменений, поскольку члены гамильтониана, содержащие V_i , не зависят от U_i .

Запишем гамильтониан в виде

$$H = AU_1 + BU_2 + \varphi(V_1, V_2), \tag{15}$$

где $A = -\lambda_0 P_{1,1} - \lambda_0 P_{1,0} \psi_1 + \lambda_0 P_{1,0} \psi_2$, $B = -\lambda_0 P_{2,1} - \lambda_0 P_{2,0} \psi_3 + \lambda_0 P_{2,0} \psi_4$ — коэффициенты линейной части, $\varphi(V_1,V_2) = \frac{1}{t_{obc1} + \frac{L_1}{V_1}} \Big[P_{1,1} \psi_1 - P_{1,1} \psi_2 \Big] + \frac{1}{t_{obc2} + \frac{L_2}{V_2}} \Big[P_{2,1} \psi_3 - P_{2,1} \psi_4 \Big]$ — нелинейная часть. Не ограни-

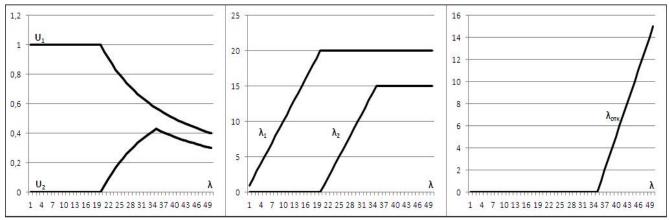
чивая общности, предположим, что A > B.

Структура оптимального управления распределением потоков при этом примет вид

$$\begin{cases} U_1^* = 1 \\ U_2^* = 0 \end{cases}, \text{ если } \lambda_0 \le \lambda_{O\Gamma P1}, \tag{16}$$

$$\begin{cases}
U_1^* = \frac{\lambda_{OIP1}}{\lambda_0} \\
U_2^* = \min\left\{ (1 - U_1), \frac{\lambda_{OIP2}}{\lambda_0} \right\}, \text{ если } \lambda_0 > \lambda_{OIP1}.
\end{cases}$$
(17)

Пример реализации структуры оптимального управления распределением потоков ВС для ограничений вида (14) при $\lambda_{OPP1} = 20$ воздушных судов в час, $\lambda_{OPP2} = 15$ ВС/ч, A > B графически отражен на рис. 5.



Puc. 5. Пример оптимального распределения потоков BC **Fig. 5.** Example of optimal air traffic distribution

Таким образом, оптимизация управления разделением потоков прибывающих для посадки ВС при ограничениях (14) достигается в некоторый момент времени путем выделения максимально возможной доли входящего потока на ту ВПП, повышение интенсивности движения по которой обеспечивает больший прирост критериальному функционалу. При этом оптимальные скорости движения V_i^* равны $V_{\max i}$. В случае, когда интенсивность входящего потока λ_0 превосходит суммарную предельную пропускную способность двух ВПП $\lambda_{O\GammaP1} + \lambda_{O\GammaP2}$, сумма $U_1 + U_2$ принимает значение, меньшее 1. При этом возникает поток воздушных судов, получивших отказ в обслуживании на этапе распределения, интенсивность которого равна $\lambda_{OTK} = \lambda_0 (1 - U_1 - U_2)$.

Civil Aviation High Technologies

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Кузнецов В.Л., Филонов П.В., Чепурина А.А.** Метод построения системы квантовых состояний в модели расчета пропускной способности аэропорта // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 184. С. 23–28.
- **2. Алёшин А.В.** Имитационное моделирование процессов управления группами прилетающих и вылетающих воздушных судов при УВД в районе аэродрома // Научный Вестник МГТУ ГА. 2011. № 171. С. 129–136.
- **3.** Людомир А.В., Орлов В.С. Имитационное моделирование динамической воздушной обстановки в управляемом воздушном пространстве // Прикладная информатика. 2014. \mathbb{N}_2 5 (53). С. 89–97.
- **4. Кузнецов В.Л., Горчаков А.И.** Комбинированная имитационно-аналитическая модель пропускной способности аэродромной воздушной зоны // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 224 (2). С. 33–42.
- **5.** Ивенина Е.М., Ивенин И.Б., Курилёнок А.С. Выделение типовых расчетных ситуаций для определения риска катастроф // Научный Вестник МГТУ ГА. 2009. № 145. С. 47–53.
- **6. Ивенин И.Б., Курилёнок А.С.** Исследование влияния параметров воздушного движения на риск возникновения опасных ситуаций с использованием имитационной модели // Научный Вестник МГТУ ГА. 2010. № 157. С. 18–25.
- **7. Кузнецов В.Л., Соломенцев В.В.** К задаче моделирования риска столкновений воздушных судов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2007. № 120. С. 5–16.
- **8.** Диль В.Ф., Сизых В.Н. Синтез оптимального управления воздушным судном на основе уравнений нелинейной динамики // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 3. С. 139–148.
- **9. Кузнецов В.Л., Хаустов А.А.** Моделирование динамики воздушного судна в спутном следе // Научный Вестник МГТУ ГА. 2013. № 195. С. 5–12.
- **10. Золотухин В.В.** Моделирование вихревых следов в задачах управления воздушным движением // Программные продукты и системы. 2011. № 1. С. 126–129.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ивенин Игорь Борисович, кандидат технических наук, доцент, заместитель начальника подразделения по науке ГосНИИАС, ibi.new@mail.ru.

Курилёнок Антон Сергеевич, старший преподаватель кафедры прикладной математики МГТУ ГА, Anton.Kurilenok@ya.ru.

OPTIMAL TRAFFIC MANAGEMENT FOR AIRCRAFT APPROACHING THE AERODROME LANDING AREA

Igor B. Ivenin¹ Anton S. Kurilenok²

¹State Research Institute of Aviation Systems (State Scientific Center of Russian Federation), Moscow, Russia

²Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

ABSTRACT

The research proposes a mathematical optimization approach of arriving aircraft traffic at the aerodrome zone. The airfield having two parallel runways, capable of operating independently of each other, is modeled. The incoming traffic of aircraft is described by a Poisson flow of random events. The arriving aircraft are distributed by the air traffic

controller between two runways. There is one approach flight path for each runway. Both approach paths have a common starting point. Each approach path has a different length. The approach trajectories do not overlap. For each of the two approach procedures, the air traffic controller sets the average speed of the aircraft. The given model of airfield and airfield zone is considered as the two-channel system of mass service with refusals in service. Each of the two servicing units includes an approach trajectory, a glide path and a runway. The servicing unit can be in one of two states – free and busy. The probabilities of the states of the servicing units are described by the Kolmogorov system of differential equations. The number of refusals in service on the simulated time interval is used as criterion for assessment of mass service system quality of functioning. This quality of functioning criterion is described by an integral functional. The functions describing the distribution of aircraft flows between the runways, as well as the functions describing the average speed of the aircraft, are control parameters. The optimization problem consists in finding such values of the control parameters for which the value of the criterion functional is minimal. To solve the formulated optimization problem, the L.S. Pontryagin maximum principle is applied. The form of the Hamiltonian function and the conjugate system of differential equations is given. The structure of optimal control has been studied for two different cases of restrictions on the control of the distribution of incoming aircraft traffic. The regularities of the control parameters influence on the value of the functional criterion are revealed.

Key words: optimal control, optimization, the L.S. Pontryagin maximum principle, air traffic, air traffic control, air traffic modeling.

REFERENCES

- 1. Kuznetsov V.L., Filonov P.V., Chepurina A.A. Metod postroeniya sistemy kvantovyh sostoyaniy v modeli raschyota propusknoy sposobnosti aeroporta [The quantum states system constructing method in airport throughput computation model]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, no. 184, pp. 23–28. (in Russian)
- **2.** Aleshin A.V. *Imitatsionnoye modelirovaniye protsessov upravleniya gruppami priletaushih i vyletayushih vozdushnyh sudov pri UVD v rayone aerodroma* [Air traffic control model for groups of landing and taking off aircrafts in a terminal control area]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2011, no. 171, pp. 129–136. (in Russian)
- 3. Lyudomir A.V., Orlov V.S. Imitatsionnoye modelirovaniye dinamicheskoy vozdushnoy obstanovki v upravlayemom vozdushnom prostranstve [Simulation of dynamical environment in controlled airspace]. Prikladnaya informatika [Journal of Applied Informatics], 2014, no. 5 (53), pp. 89–97. (in Russian)
- **4. Kuznetsov V.L., Gorchakov A.I.** Kombonirovannaya imitatsionno-analiticheskaya model' propusknoy sposobnosti aerodromnoy vozdushnoy zony [Combined simulation-analytical model of aerodrome airspace capacity]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2016, no. 224 (2), pp. 33–42. (in Russian)
- **5. Ivenin I.B., Kurilenok A.S.** *Vydeleniye tipovyh raschetnyh situatsiy dla opredeleniya riska katoistrof* [Separation standard accounting situation for determination of the collision risk]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2009, no. 145, pp. 47–53. (in Russian)
- **6. Ivenin I.B., Kurilenok A.S.** *Issledovanie vliyaniya parametrov vozdushnogo dvizheniya na risk vozniknoveniya opasnyh situatsiy s ispol'zovaniem imitatsionnoy modeli* [Research of air traffic parameters influence on risk of dangerous situation occurrence with use of air traffic imitation model]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2010, no. 157, pp. 18–25. (in Russian)
- 7. Kuznetsov V.L., Solometsev V.V. K zadache modelirovaniya riska stolknoveniya vozdushnyh sudov [On a problem of collision risk modeling of aircraft]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2007, no. 120, pp. 5–16. (in Russian)
- **8.** Dil V.F., Sizykh V.N. Sintez optimal'nogo upravleniya vozdushnim sudnom na osnove upravleniy nelineynoy dinamiki [Optimal aircraft control synthesis based on the equations of non-linear

Civil Aviation High Technologies

dynamics]. Scientific Bulletin of the Moscow State Civil Aviation High Technologies, 2017, vol. 20, no. 3, pp. 139–148. (in Russian)

- **9. Kuznetsov V.L., Khaustov A.A** *Modelirovanie dinamiki vozdushnogo sudna v sputnom slede* [The self-consistent problem of aircraft dynamics in wake vortex]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2013, no. 195, pp. 5–12. (in Russian)
- **10. Zolotukhin V.V.** *Modelirovanie vihrevyh sledov v zadachah upravleniya vozdushnym dvizheniyem* [Modeling of vortex wake in the problems of air traffic management]. *Programmnye produkty i sistemy* [Software & Systems International research and practice journal], 2011, no. 1, pp. 126–129. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Igor B. Ivenin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Deputy Head of the Department of Science, State Research Institute of Aviation Systems (State Scientific Centre of Russian Federation), ibi.new@mail.ru.

Anton S. Kurilenok, Senior Lecturer of the Applied Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Anton.Kurilenok@ya.ru.

Поступила в редакцию	10.11.2017	Received	10.11.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 519.217.4 + 519.218.23

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-32-39

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В НЕПРЕРЫВНОМ ФИЛЬТРЕ ЧАСТИЦ

К.А. РЫБАКОВ¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва. Россия

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17-08-00530 А

В статье показана связь между фильтрами, основанными на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями, и непрерывным фильтром частиц, которые относятся к последовательным методам Монте-Карло. Даются различные варианты вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц для стохастических систем с непрерывным временем, т. е. стохастических систем диффузионного типа. Наряду с представлением непрерывной функцией показана возможность представления траектории весовой функции кусочно-постоянной функцией с действительными неотрицательными значениями, а также кусочно-постоянной функцией с целыми неотрицательными значениями. В основе такого представления лежит моделирование траекторий общего пуассоновского процесса. Указана связь с дифференциальным уравнением для весовой функции. Все приведенные варианты вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц не требуют сложной программной реализации, они подходят при разработке программного обеспечения для фильтров частиц с применением различных технологий параллельного программирования для высокопроизводительных вычислительных систем.

Рассмотренный в статье непрерывный фильтр частиц может применяться в различных прикладных задачах оценивания. Например, в задачах слежения за движущимся объектом, восстановления траектории движения по косвенным наблюдениям, выделения полезного сигнала на фоне помех, идентификации параметров динамических систем и многих других задачах. В дальнейшем планируется расширить применение фильтра частиц для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа. Кроме того, планируется сформировать алгоритмы прогнозирования состояний непрерывных стохастических систем как диффузионного, так и диффузионно-скачкообразного типа на основе рассмотренных вариантов вычисления весовых коэффициентов в фильтре частиц.

Ключевые слова: весовой коэффициент, ветвящийся процесс, метод Монте-Карло, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, случайный процесс, стохастическая система, фильтр частиц.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время для решения прикладных задач оценивания состояний динамических систем все чаще применяются фильтры частиц. В основном это относится к дискретным фильтрам, в меньшей степени — к непрерывным. Фильтры частиц (как дискретные, так и непрерывные) основаны на моделировании ансамбля траекторий дискретной или непрерывной динамической системы. Для каждой траектории дополнительно моделируются весовые коэффициенты, и по результатам моделирования траекторий и этих весовых коэффициентов формируется оптимальная оценка состояния динамической системы, т. е. решается задача оптимальной фильтрации.

В качестве приложений укажем задачи слежения за движущимся объектом, восстановление траектории движения по косвенным наблюдениям, выделение полезного сигнала на фоне помех, идентификацию параметров динамических систем [1, 2].

В работах [3, 4] был предложен метод решения задачи оптимальной фильтрации для непрерывных динамических систем, который основан на моделировании ансамбля траекторий системы с дополнительными условиями: обрывами и ветвлениями этих траекторий. Цель представленной работы состоит в том, чтобы установить связь между фильтрами, основанными на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями, и непрерывным фильтром частиц. В работе описываются различные способы вычисления весовых коэффициен-

тов, которые заменяют обрывы и ветвления траекторий. По сравнению со способами вычисления весовых коэффициентов, изложенными в монографии [5], здесь приводятся некоторые новые варианты. Аналогичная методика может применяться и в задачах прогнозирования [6].

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть случайный процесс $[X^{\mathsf{T}}(t)\ Y^{\mathsf{T}}(t)]^{\mathsf{T}}$, где $t\in [t_0,T]$, $X\in R^n$, $Y\in R^m$, представляет собой решение системы уравнений

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$
(1)

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0.$$
(2)

Уравнение (1) — стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито (уравнение объекта наблюдения, уравнение состояния), в нем f(t,x): $T \times R^n \to R^n$ и $\sigma(t,x)$: $T \times R^n \to R^{ns} - 3$ аданные векторная и матричная функции, W(t) - s-мерный стандартный винеровский процесс. Начальное состояние X_0 детерминировано или случайно (с известным распределением). Уравнение (2) — стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение измерительной системы, уравнение измерений), в этом уравнении c(t,x): $T \times R^n \to R^m$ и $\zeta(t)$: $T \to R^{md}$ — заданные векторная и матричная функции, V(t) — d-мерный стандартный винеровский процесс. Процессы W(t), V(t) и начальное состояние X_0 независимы.

Наряду с уравнением (2) запишем эквивалентное уравнение измерительной системы

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \tag{3}$$

в котором $Z \in \mathbb{R}^m$, N(t) - d-мерный стандартный гауссовский белый шум.

Задача оптимальной фильтрации [1, 2, 5, 7] состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ траектории случайного процесса X(t) по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$ или $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$ в соответствии с заданным критерием оптимальности. В частности, оценка $\hat{X}(t) = M[X(t) \mid Y_0^t]$ является оптимальной в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки (М означает математическое ожидание).

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

Определим функцию $\mu(t, x, z)$:

$$\mu(t,x,z) = c^{\mathrm{T}}(t,x)q(t)\left(z - \frac{1}{2}c(t,x)\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r - \frac{c_r(t,x)}{2}\right),$$

где $q_{kr}(t)$ – элементы обратной матрицы $q(t) = (\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$.

В работах [3–5] показано, что эту функцию можно рассматривать как интенсивность пуассоновского потока обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса X(t) с учетом измерений Z(t). Моделирование такого ветвящегося процесса позволяет решить задачу оптимальной фильтрации. Оптимальная оценка в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки — это среднее по реализациям такого ветвящегося процесса (по всем ветвям каждой выборочной траектории). Приближенное моделирование траекторий такого процесса довольно про-

сто, а именно моделируются траектории случайного процесса согласно уравнению (1) при использовании любого подходящего метода численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Кроме того, моделируются моменты времени, в которые эти траектории обрываются или разветвляются. После момента обрыва моделирование траектории прекращается, а после момента ветвления появляется новая траектория.

Интенсивности обрывов и ветвлений управляются измерениями Z(t). Так, интенсивность обрывов определяется функцией $\mu^-(t,X(t),Z(t))$, а интенсивность ветвлений — функцией $\mu^+(t,X(t),Z(t))$, где

$$\mu^{-}(t,x,z) = \begin{cases} -\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) < 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \ge 0, \end{cases} \qquad \mu^{+}(t,x,z) = \begin{cases} \mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) > 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \le 0, \end{cases}$$

T. e.
$$\mu(t,x,z) = -\mu^{-}(t,x,z) + \mu^{+}(t,x,z)$$
.

Можно предложить два подхода к моделированию. Первый из них основан на точном моделировании пуассоновского потока обрывов и ветвлений, при котором, вообще говоря, узлы сетки для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) и моменты времени обрывов и ветвлений функционально не связаны между собой, но связаны статистически. Это приводит к необходимости дополнения сетки моментами времени, в которые могут происходить обрывы и ветвления траекторий, т. е. усложняется моделирование траекторий решения уравнения (1). При использовании второго подхода пуассоновский поток моделируется неточно, но узлы сетки для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) являются и моментами времени, в которые могут происходить обрывы и ветвления траекторий.

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим решение задачи фильтрации стохастических систем методом частиц. Под частицей будем понимать упорядоченную пару, которая состоит из n-мерного вектора X, характеризующего положение в фазовом пространстве, и скалярной неотрицательной величины ω , определяющей вес. Такая терминология берет начало из статистической физики, она связана с описанием движения частиц [8]. При решении задачи фильтрации такой метод называется фильтром частиц.

Каждой траектории случайного процесса X(t), описываемого уравнением (1), ставится в соответствие весовая функция. Значение этой весовой функции в начальный момент времени t_0 равно единице, а далее с течением времени значение весовой функции уменьшается при ненулевой вероятности обрыва и увеличивается при ненулевой вероятности ветвления, при этом обрывы и ветвления траекторий случайного процесса X(t) не происходят. В предельных случаях весовая функция должна принять нулевое значение вместо обрыва траектории, а вместо ветвления траектории значение весовой функции должно удвоиться.

Введем обозначение $\omega(t)$ для случайного процесса, каждая траектория которого является весовой функцией для некоторой траектории случайного процесса X(t), $\omega(t_0)=1$. Таким образом, поведение частицы — это выборочная траектория пары $(X(t),\omega(t))$. Оптимальная оценка в смысле критерия минимума среднего квадрата ошибки — это взвешенное среднее по реализациям случайного процесса X(t):

$$\hat{X}(t) = \frac{M[\omega(t)X(t)]}{M[\omega(t)]}.$$

Траектории движения частицы определяются заданными вектором сноса f(t,x) и матрицей диффузии $g(t,x) = \sigma^{T}(t,x)\sigma(t,x)$, т. е. уравнением (1), а изменение веса характеризуется функцией

$$\mu(t,x,z) = -\mu^{-}(t,x,z) + \mu^{+}(t,x,z).$$

Отрицательные значения этой функции определяют интенсивность уменьшения значения весовой функции, а положительные — интенсивность роста. Измерения Z(t) управляют траекториями случайного процесса $\omega(t)$.

При применении методики приближенного моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями на основе метода «максимального сечения» [9, 10], или метода прореживания пуассоновского потока, моменты времени τ_k , в которые могут реализоваться события пуассоновского потока (обрывы или ветвления), определяются с помощью моделирования случайных величин $\Delta \tau_k$, имеющих показательное распределение с параметром μ^* . Величина μ^* определяется условием $|\mu(t)| \leq \mu^*$, $t \in [t_0, T]$, т. е. $\tau_0 = t_0$, $\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta \tau_k$, k = 1, 2, ...

Напомним, что необходимо получить реализацию случайной величины α , имеющей равномерное распределение на интервале (0,1), и проверить условие $\alpha \leq |\mu(\tau_k)| / \mu^*$, где $\mu(t) = \mu(t, X(t), Z(t))$ задает значения функции $\mu(t, x, z)$ на траектории случайного процесса X(t) с учетом измерений Z(t) оцениваемой траектории. Если оно выполнено, то при $\mu(\tau_k) < 0$ реализуется обрыв, а при $\mu(\tau_k) > 0$ — ветвление. Вероятность реализации события пуассоновского потока задается отношением $|\mu(\tau_k)|/\mu^*$, эта вероятность может быть использована для изменения весового коэффициента в момент времени τ_k :

$$\omega(\tau_k) = \omega(\tau_k - 0) \left(1 + \frac{\mu(\tau_k)}{\mu^*} \right). \tag{4}$$

Таким образом, при $\mu(\tau_k) < 0$ значение весовой функции уменьшается на долю, равную вероятности обрыва, а при $\mu(\tau_k) > 0$ — увеличивается на долю, равную вероятности ветвления. В предельных случаях значение весовой функции соответственно обнуляется либо удваивается. Этот предельный случай можно реализовать в виде алгоритма, в основе которого лежит метод «максимального сечения», а именно при условии $\alpha \le |\mu(\tau_k)|/\mu^*$ и $\mu(\tau_k) < 0$ полагается $\omega(\tau_k) = 0$, т. е. значение весовой функции обнуляется. При условии $\alpha \le |\mu(\tau_k)|/\mu^*$ и $\mu(\tau_k) > 0$ полагается $\omega(\tau_k) = 2\,\omega(\tau_k - 0)$, т. е. значение весовой функции удваивается.

И в первом, и во втором случае весовые функции — это траектории общего пуассоновского процесса интенсивности $\mu(t)$ и μ^* (кусочно-постоянная траектория с точками разрыва, которые являются точками пуассоновского потока заданной интенсивности). Отличие состоит в том, что в первом случае траектория такого процесса — это кусочно-постоянная функция с действительными неотрицательными значениями, а во втором случае — с целыми неотрицательными значениями.

Если брать за основу методику приближенного моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями, при применении которой обрывы и ветвления траекторий случайного процесса X(t) происходят только в узлах сетки $\{t_k\}$, то вероятность появления события пуассоновского потока задается выражением $|\mu(t_k)|h$ для каждого момента времени t_k (здесь для простоты считается, что сетка для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) имеет постоянный шаг h, и предполагается выполнение неравенства $|\mu(t)|h < 1$ или даже $|\mu(t)|h << 1$, $t \in [t_0, T]$). Эта вероятность также может быть использована для изменения весового коэффициента:

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_{k+1} - 0) (1 + \mu(t_k)h). \tag{5}$$

Аналогично подходу, рассмотренному выше, значение весовой функции может уменьшаться или увеличиваться, но только в узлах сетки $\{t_k\}$. Доля такого уменьшения или увеличения равна вероятности обрыва или ветвления соответственно, а в предельном случае также происходит обнуление или удвоение значения весовой функции. Предельный случай предполагает, что скачкообразное изменение весовой функции происходит не в каждом узле t_k , а только при условии $\alpha \le |\mu(t_k)| h$, где α , как и ранее, — это реализация случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1). Тогда при условии $\alpha \le |\mu(t_k)| / \mu^*$ и $\mu(t_k) < 0$ полагается $\omega(t_{k+1}) = 0$, т. е. значение весовой функции обнуляется. При условии $\alpha \le |\mu(t_k)| h$ и $\mu(t_k) > 0$ полагается $\omega(t_{k+1}) = 2 \omega(t_{k+1} - 0)$, т. е. значение весовой функции удваивается. Здесь также весовая функция — это кусочно-постоянная функция либо с действительными, либо с целыми неотрицательными значениями.

Недостатком описанных вариантов расчета весовых коэффициентов может служить сложность оценки мажоранты μ^* и, как следствие, подбор шага h для численного решения уравнения (1), обеспечивающего условие $|\mu(t)|h < 1$ или $|\mu(t)|h << 1$. Избежать этого можно, вычисляя вероятности реализации событий пуассоновского потока в моменты времени t_k по определению функции распределения, а именно вместо $|\mu(t_k)|h$, используя соотношение

$$1-e^{-\int_{t_k}^{t_{k+1}}|\mu(\tau)|d\tau},$$

или приближенно $1 - e^{-|\mu(t_k)|h}$, если интеграл вычисляется методом прямоугольников.

Второй недостаток свойственен варианту вычисления весовых коэффициентов, предполагающему целочисленность их значений. Проблемой является обнуление значения весовой функции: при обнулении веса частица более не вносит вклада в оценку вектора состояния объекта наблюдения, дальнейшее моделирование ее траектории не имеет смысла. Однако такие частицы можно заменить частицами с максимальным весом. Тогда вместо пары частиц с координатами X_1 , X_2 и соответствующими весами $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \neq 0$ используются частицы с координатами X_2 , X_2 с весами $\beta \omega_2$, $(1-\beta)\omega_2$, где $\beta \in (0,1)$ (величину β можно выбрать из условия целочисленности новых весов $\beta \omega_2$ и $(1-\beta)\omega_2$). Такой подход часто используется в фильтрах частиц для стохастических систем как с дискретным, так и с непрерывным временем. Он наиболее близок к фильтрам, основанным на моделировании траекторий случайного процесса с обрывами и ветвлениями.

СВЯЗЬ С НЕПРЕРЫВНЫМ ФИЛЬТРОМ ЧАСТИЦ

Рассмотрим непрерывный фильтр частиц и покажем связь соотношений, которые для него используются, и соотношения (5), приведенного в предыдущем разделе. Определим случайный процесс $\omega(t)$ следующим образом [7, 11, 12]:

$$\omega(t) = e^{\int_{t_0}^t c^{\mathsf{T}}(\tau, X(\tau))q(\tau)dY(\tau) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t c^{\mathsf{T}}(\tau, X(\tau))q(\tau)c(\tau, X(\tau))d\tau},$$

что с учетом введенной ранее функции $\mu(t,x,z)$ и связи $\dot{Y}(t)=Z(t)$ можно формально переписать в виде

$$\omega(t) = e^{\int_{t_0}^t \mu(\tau, X(\tau), Z(\tau)) d\tau}.$$

Civil Aviation High Technologies

Тогда, используя простейший метод численного интегрирования – метод прямоугольников, запишем приближенный вариант последней формулы:

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_k) e^{\mu(t_k)h} \tag{6}$$

при начальном условии $\omega(t_0) = 1$. Если дополнительно применить разложение показательной функции в ряд Тейлора в окрестности нуля и ограничиться членами разложения не выше первого порядка, то получим

$$\omega(t_{k+1}) = \omega(t_k) (1 + \mu(t_k)h),$$

что, в свою очередь, соответствует численной схеме метода Эйлера [13] для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{\omega}(t) = \omega(t)\mu(t)$. В пределе при $h \to 0$ результаты вычислений по формулам (5) и (6) должны совпадать. Отметим, что подход к решению задачи оптимальной фильтрации для непрерывных стохастических систем с помощью моделирования траекторий системы и соответствующих весовых коэффициентов был предложен в статье [14] еще до того, как подобные методы стали называть фильтрами частиц. Там же приведено дифференциальное уравнение $\dot{\omega}(t) = \omega(t)\mu(t)$. Остальные варианты вычисления весовых коэффициентов из предыдущего раздела дают тот же предельный результат, поскольку моделируются траектории одного и того же общего пуассоновского процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1.** Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Т. 1. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2010.
- **2.** Степанов О.А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Т. 2. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012.
- **3. Рыбаков К.А.** Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. 2013. № 3. С. 15–20.
- **4. Рыбаков К.А.** Модифицированные статистические алгоритмы фильтрации и прогнозирования в непрерывных стохастических системах // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 155-162.
- **5. Рыбаков К.А.** Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017.
- **6. Рыбаков К.А.** Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 1. С. 25–38.
 - 7. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009.
- **8. Del Moral P.** Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. Springer, 2004.
- **9. Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издательский центр «Академия», 2006.
- **10. Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Статистическое моделирование неоднородных случайных функций на основе пуассоновских точечных полей // Доклады АН. 2010. Т. 434, № 1. С. 29–32.
- **11. Davis M.H.A.** A pathwise solution of the equations of nonlinear filtering // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27, No. 1. Pp. 160–167.

Vol. 21, No. 02, 2018

- **12.** Crisan D. Exact rates of convergence for a branching particle approximation to the solution of the Zakai equation // The Annals of Probability. 2003. Vol. 31, No. 2. Pp. 693–718.
- **13. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум. М.: ИНФРА-М, 2016.
- **14. Зарицкий В.С., Светник В.Б., Шимелевич Л.И.** Метод Монте-Карло в задачах оптимальной обработки информации // Автоматика и телемеханика. 1975. № 12. С. 95–103.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Рыбаков Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), rkoffice@mail.ru.

CALCULATION OF WEIGHT COEFFICIENTS IN CONTINUOUS PARTICLE FILTER

Konstantin A. Rybakov¹

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant № 17-08-00530 A

ABSTRACT

This article shows the relationship between filters based on modeling of the random process paths with terminating and branching and a continuous particle filter that are related to sequential Monte Carlo methods. Different variants for calculation of weight coefficients in the particle filter for stochastic continuous systems (stochastic diffusion systems) are given. Along with the representation by a continuous function, it is shown that the path of the weight function can be presented by a piecewise constant function with nonnegative real values and also by a piecewise constant function with nonnegative integer values. This representation is based on paths modeling of the general Poisson process. The relation with the differential equation for the weight function is indicated. All the given variants for weight coefficients calculation in the particle filter do not require a complex software development, they are suitable for the particle filter software using various parallel programming technologies for high-performance computing systems. The continuous particle filter considered in this paper can be used in various applied estimation tasks, for example, tracking applications, restoring the motion trajectory from observations, restoring a signal from the noise, identifying the dynamic system parameters, and many others. In the future, it is planned to expand the use of the particle filter for stochastic jump-diffusion systems. In addition, it is planned to develop algorithms for predicting the states of stochastic diffusion and jump-diffusion systems based on the calculation of weight coefficients in the particle filter considered in this article.

Key words: weight coefficient, branching process, Monte Carlo method, statistical modeling, optimal filtering problem, random process, stochastic system, particle filter.

EFERENCES

- 1. Stepanov O.A. Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii [Fundamentals of the Estimation Theory with Applications to the Problems of Navigation Information Processing]. Vol. 1. St. Petersburg: "CSRI Elektropribor", 2010. (in Russian)
- **2. Stepanov O.A.** Osnovy teorii otsenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii [Fundamentals of the Estimation Theory with Applications to the Problems of Navigation Information Processing]. Vol. 2. St. Petersburg"CSRI Elektropribor", 2012. (in Russian)
- **3. Rybakov K.A.** Modifitsirovannyy algoritm optimalnoy filtratsii signalov na osnove modelirovaniya spetsialnogo vetvyashchegosya protsessa [Modified Algorithm for Optimal Signal Filter-

ing Based on Modeling Special Branching Process]. *Aviakosmicheskoe priborostroenie* [Aerospace Instrument-Making], 2013, no. 3, pp. 15–20. (in Russian)

- **4. Rybakov K.A.** Modifitsirovannye statisticheskie algoritmy filtratsii i prognozirovaniya v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh [Modified statistical algorithms for filtering and extrapolation in continuous-time stochastic systems]. Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU [Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University], 2015, no. 2 (46), pp. 155–162. (in Russian)
- **5. Rybakov K.A.** Statisticheskie metody analiza i filtratcii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh [Statistical Methods of Analysis and Filtering for Continuous Stochastic Systems]. Moscow, MAI Publ.house, 2017. (in Russian)
- **6. Rybakov K.A.** Algoritmy prognozirovaniya sostoyaniy v stokhasticheskikh differentsialnykh sistemakh na osnove modelirovaniya spetsialnogo vetvyashchegosya protsessa [Extrapolation algorithms for stochastic differential systems based on modeling special branching process.] Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya [Differential Equations and Control Processes.] 2015, no. 1, pp. 25–38. (in Russian)
 - 7. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. Springer, 2009.
- **8. Del Moral P.** Feynman-Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. Springer, 2004.
- 9. Mikhailov G.A., Voitishek A.V. Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo [Numerical Statistical Modeling. Monte-Carlo Methods]. Moscow: "Akademiya" Publ.centre, 2006. (in Russian)
- 10. Mikhailov G.A., Averina T.A. Statistical modeling of inhomogeneous random functions on the basis of Poisson point fields. Doklady Mathematics, RAS Reports, 2010, vol. 434, no. 1, pp. 29–32.
- 11. Davis M.H.A. A pathwise solution of the equations of nonlinear filtering. Theory of Probability and its Applications, 1982, vol. 27, no. 1, pp. 167–175.
- **12.** Crisan D. Exact rates of convergence for a branching particle approximation to the solution of the Zakai equation. The Annals of Probability, 2003, vol. 31, no. 2, pp. 693–718.
- 13. Panteleev A.V., Yakimova A.S., Rybakov K.A. Obyknovennye differentsialnye uravneniya. Praktikum [Ordinary Differential Equations. Practical Work]. Moscow: INFRA-M, 2016 (in Russian)
- 14. Zaritskii V.S., Svetnik V.B., Shimelevich L.I. Monte-Carlo technique in problems of optimal information rocessing. Automation and Remote Control, 1975, vol. 36, no. 12, pp. 2015–2022.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Konstantin A. Rybakov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Mathematics and Cybernetics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), rkoffice@mail.ru.

Поступила в редакцию	15.11.2017	Received	15.11.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 661.322

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-40-50

О ПРИМЕНЕНИИ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

B.H. $A\Gamma EEB^1$

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия

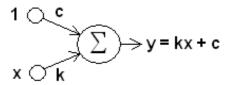
В работе рассматриваются вопросы, связанные с использованием искусственной нейронной сети (ИНС) для аппроксимации экспериментальных данных. Одной из проблем при разработке ИНС является выбор подходящей функции активации для нейронов скрытого слоя и регулировка параметров функции в процессе обучения сети. В статье рассматривается трехслойный перцептрон с одним скрытым слоем, каждый нейрон которого имеет функцию активации в виде гауссовой кривой. Выбор радиально-базисной функции активации позволяет применить в процессе обучения сети прямой метод определения весовых коэффициентов – метод наименьших квадратов. Качество аппроксимации при этом во многом зависит от правильности выбора значения параметра функции активации, которым в данном случае является ширина колокола гауссовой кривой. На практике этот параметр определяют путем проведения численных экспериментов. Это достаточно трудоемкий процесс. В данной работе предлагается определять значение этого параметра по обучающей выборке, представляющей собой координаты набора точек тестовой кривой с заданными свойствами. Эти свойства задаются исходя из априорных сведений об аппроксимируемой функции (линейная, квадратичная, логарифмическая, экспоненциальная зависимость). Поскольку тестовая кривая задается в явном виде, параметр функции активации определяется из условия достижения минимума интеграла от квадрата разности между значениями тестовой функции и выходным сигналом сети. Такой подход гарантирует получение аппроксимирующей кривой с хорошими свойствами, в частности, характеризуется отсутствием в ее графике так называемых «осцилляций» – многочисленных точек перегиба.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, функция активации, обучающая выборка, аппроксимация функций.

ВВЕДЕНИЕ

Задача аппроксимации функции для искусственной нейронной сети (ИНС) формулируется как задача контролируемого обучения. Суть задачи состоит в следующем. Имеются значения функции в отдельных точках (обучающая выборка), система базисных функций и набор регулируемых весовых коэффициентов. Необходимо обучить сеть, т. е. подобрать весовые коэффициенты так, чтобы зависимость выходного сигнала от сигнала на входе наилучшим образом аппроксимировала обучающий набор точек.

Простейшая ИНС состоит всего из одного суммирующего нейрона с двумя входными элементами и одним выходом (рис. 1).

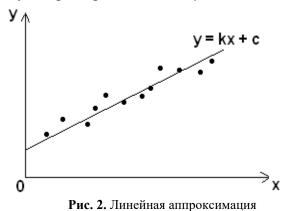


Puc. 1. Искусственная нейронная сеть с одним суммирующим нейроном **Fig. 1.** Artificial neural network with one summing neuron

На один из входов подается сигнал с уровнем 1, на другой — измеряемая величина x. Параметрами сети являются весовые коэффициенты c и k, определяющие значения сигна-

лов, поступающих на вход суммирующего нейрона. На его выходе появляется сигнал $y = k \cdot x + c$. Таким образом, данная сеть моделирует устройство преобразования входного сигнала х по линейному закону, параметры которого можно изменять, варьируя весовые коэффи- \square иенты c и k.

Эту сеть можно использовать для решения задачи линейной аппроксимации некоторой функции y = f(x), заданной набором пар чисел (x_i, y_i) , i = 1, 2, ..., M. Такая задача возникает при обработке экспериментальных данных, полученных в результате измерений выходных значений y на выходе некоторого устройства при подаче на его вход сигнала x. Требуется провести прямую линию через множество точек на плоскости, наилучшим образом отражающую характер зависимости y от x, как показано на рис. 2.



экспериментальных данных

Fig. 2. Linear approximation of experimental data

Наилучшее приближение дает прямая линия y = kx + c, с минимальным значением ошибки аппроксимации (целевой функции)

$$S = \sum_{i=1}^{M} (kx_i + c - y_i)^2,$$

где M – количество экспериментальных точек. Значения коэффициентов к и с определяются в соответствии со стандартным методом наименьших квадратов (см., например, [1]). Этот метод сводится к решению системы линейных уравнений, получаемых из необходимого условия минимума функции S(k,c):

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 2 \sum_{i=1}^{M} (kx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 2 \sum_{i=1}^{M} (kx_i + c - y_i) = 0.$$
(2)

С точки зрения теории искусственных нейронных сетей заданное множество экспериментальных точек (x_i, y_i) является обучающим набором, а найденные параметры k и c – весовыми коэффициентами связей.

После обучения (определения весов связей для заданного обучающего набора) нейронная сеть способна выполнять поставленную задачу: моделировать исследуемое устройство. Любой сигнал x на входе сети вызовет появление на выходе сигнала y, с минимальной погрешностью соответствующего реальному отклику на подаваемый сигнал в исследуемом устройстве.

Рассмотренная сеть из одного нейрона позволяет моделировать устройства, у которых выходной сигнал линейно зависит от входного, и отклонения от этой зависимости связаны лишь с ошибками измерения.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Более сложная задача — аппроксимация нелинейной зависимости y = F(x).

Увеличив количество нейронов, можно построить сеть для отображения нелинейной зависимости. Показанная на рис. 3 схема является частным случаем так называемого трехслойного персептрона – ИНС с тремя слоями [2].

Первый слой — входной — состоит из одного элемента, сигнал с которого без изменения поступает на входы элементов второго — скрытого — слоя. Каждый элемент второго слоя N_i (i=1,2,...,K) характеризуется своей функцией активации $f_i(x)$, определяющей сигнал на выходе этого элемента. Сигналы с выходов элементов второго слоя передаются с весовыми коэффициентами ω_1 , ω_2 , ..., ω_K на вход элемента третьего слоя, состоящего из одного нейрона, на выходе которого появляется сигнал вида

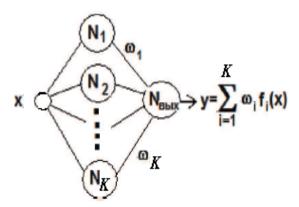
$$y = \sum_{i=1}^{K} \omega_i \cdot f_i(x).$$

В качестве функций активации можно использовать функцию Гаусса

$$f(x) = exp\left[-\frac{(x-c)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right],\tag{3}$$

где c — точка на оси абсцисс, в которой значение функции достигает максимума, σ — параметр, характеризующий ширину колокола кривой Гаусса. Точки $x=\pm\sigma$ являются точками перегиба графика функции (3).

На рис. 4 показано семейство из 11 функций активации на отрезке [0, 1].



Puc. 3. Схема трехслойного перцептрона **Fig. 3.** Scheme of three-layer perceptron

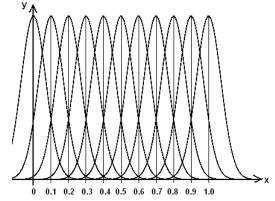


Рис. 4. Семейство гауссовых кривых при $\sigma = 0.05$ **Fig. 4.** A family of Gaussian curves with $\sigma = 0.05$

Функция (3) относится к радиально-базисным функциям, а ИНС с такой функцией активации скрытых нейронов – к классу радиально-базисных нейронных сетей (RBF-сети, см., например, [3, 4]).

Преимущество RBF-сетей по сравнению с традиционными сетями с сигмоидальными функциями активации (логистическими, линейными, квадратичными и др.) состоит в том, что их обучение (определение синаптических весов, минимизирующих ошибку аппроксимации) не требует сложных итерационных алгоритмов типа метода обратного распространения ошибки, а выполняется с помощью прямых методов (например, метода наименьших квадратов, градиентных методов и т. д.).

Пусть задан обучающий набор из M точек: (x_i, y_i) , i = 1, 2, ..., M.

Настройка сети состоит в определении значений весовых коэффициентов ω_1 , ω_2 , ..., ω_M так, чтобы получить наилучшее соответствие между сигналами на выходе и значениями из обучающего набора. В качестве меры соответствия можно использовать тот же критерий, что и в приведенном выше примере – сумму квадратов разностей (ошибок аппроксимации).

Civil Aviation High Technologies

$$S = \sum_{i=1}^{M} (\sum_{j=1}^{K} \omega_{j} \cdot f_{j}(x_{i}) - y_{i})^{2}.$$
 (4)

Условия минимума целевой функции S как функции весовых коэффициентов — равенство нулю ее частных производных:

$$\frac{\partial S}{\partial \omega_p} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{K} \omega_j \cdot f_j(x_i) - y_i \right) \cdot f_p(x_i) = 0, \quad p = 1, 2, ..., K.$$
 (5)

Получившуюся систему линейных уравнений можно записать в матричной форме

$$CW = B, (6)$$

где $W = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K)^{\mathrm{T}}$ – искомый вектор весовых коэффициентов, C – числовая матрица размером $K \times K$, B – вектор-столбец правых частей:

$$C_{pq} = \sum_{i=1}^{M} f_{p}(x_{i}) \cdot f_{q}(x_{i}), \quad B_{p} = \sum_{i=1}^{M} y_{i} \cdot f_{p}(x_{i}).$$

$$p, q = 1, 2, ..., K.$$
(7)

Основная проблема при практическом применении RBF-сети для нелинейной аппроксимации таблично заданных функций состоит в правильном выборе количества нейронов в скрытом слое и значения параметра σ в функции активации.

Очевидно, что увеличение числа нейронов скрытого слоя делает систему более гибкой в том смысле, что ИНС становится способной аппроксимировать функции с сильно выраженной нелинейностью, например, когда имеется несколько точек перегиба. Увеличение числа нейронов, однако, приводит к росту стоимости устройства в случае его аппаратной реализации, поэтому стараются ограничиться минимальным их количеством, но достаточным для достижения требуемой точности аппроксимации [3].

Относительно параметра σ можно предположить, что чем он меньше, тем лучше будут описываться локальные свойства аппроксимируемой зависимости. Однако при слишком малых

значениях σ может появиться эффект, схожий с тем, который возникает при аппроксимации небольшого количества экспериментальных точек многочленом высокой степени: аппроксимирующая кривая проходит через все точки (ошибка аппроксимации равна нулю), но при этом сильно осциллирует, как показано на рис. 5. Количество нейронов K = 11. Кривая 1 получена при $\sigma = 0.04$, кривая 2 - при $\sigma = 0.1$.

Итак, при проектировании аппроксимирующей ИНС, разработчик сталкивается с проблемой выбора структуры сети (количество слоев и количество нейронов в каждом слое), а также параметров функций активации.

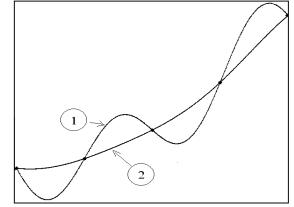


Рис. 5. Аппроксимация отрезка параболы по пяти точкам

Fig. 5. Approximation of a parabola cut at five points

Ниже рассматривается один из возможных подходов к решению этой проблемы.

Будем исходить из того, что имеется априорная информация о характере зависимости выходного сигнала от входного (экспоненциальная, логарифмическая, синусоидальная и т. д.).

Для того, чтобы сузить диапазон возможных допустимых значений искомых параметров сети (количество нейронов, параметры функций активации), предлагается использовать тестовые обучающие наборы, полученные для конкретных функциональных зависимостей.

Предположим, что есть основание полагать, что зависимость выходного сигнала некоторого устройства от сигнала на его входе имеет вид y = F(x), 0 < x < 1. Множество точек $(x_i, F(x_i))$, i = 1, 2, ..., M, будем использовать как обучающий набор для ИНС, схема которой показана на рис. 3. Скрытые нейроны имеют функции активации типа (3), равномерно распределенные на отрезке (0,1), как показано на рис. 4.

Целью численных экспериментов является выявление влияния на качество аппроксимации количества скрытых нейронов n в сети и параметра σ в функциях активации $f(x_i)$.

Качество аппроксимации $S(K, \sigma)$ будем оценивать интегрально по всему интервалу возможных значений аргумента:

$$S(K,\sigma) = \int_{0}^{1} \left[F(x) - \sum_{i=1}^{K} \omega_{i} \cdot f_{i}(x) \right]^{2} dx, \tag{8}$$

где ω_i — весовые коэффициенты функций активации, найденные в результате обучения сети на заданном обучающем наборе значений входных и выходных сигналов.

Численный эксперимент заключался в том, что при заданном обучающем наборе и фиксированном значении числа нейронов n определялось то значение σ , при котором величина интегрального отклонения минимально:

$$S(K,\sigma) \xrightarrow{\sigma} \min$$
 (9)

Начальное значение σ выбирается так, чтобы погрешность аппроксимации $S(K, \sigma)$ оказалась достаточно большой. Величина σ затем уменьшается с некоторым шагом до тех пор, пока не будет достигнут минимум погрешности.

В качестве примера рассмотрим задачу аппроксимации затухающей синусоиды

$$y = \exp(-3x) \cdot \sin(2\pi \cdot x), \ 0 \le x, \ y \le 1.$$
 (10)

Для аппроксимации используется RBF-сеть со скрытым слоем из 11 нейронов. Обучающим набором являются координаты семи точек, лежащих на синусоиде, как показано на рис. 6. Оптимальное значение σ , обеспечивающее выполнение условия (9), равно 0,05. Кружками обозначены точки обучающей выборки.

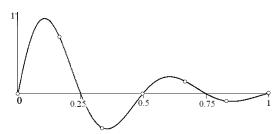


Рис. 6. График функции **Fig. 6.** The Graph of function

Внесем теперь в координаты точек обучающей выборки случайные отклонения с помощью датчика случайных чисел:

$$y_i = y_i + \varepsilon_i$$
, $\varepsilon_i = h \cdot (1 - \text{RND})$, $i = 1, 2, ..., 7$,

где RND — случайное число из интервала (0,1), полученное с помощью генератора случайных чисел, h — коэффициент, определяющий максимально возможное отклонение координат от их стационарных значений.

Такое изменение обучающей выборки имитирует погрешности измерений значений входных и выходных сигналов устройства, для которого разрабатывается ИНС.

Результаты численных экспериментов показаны на рис. 7.

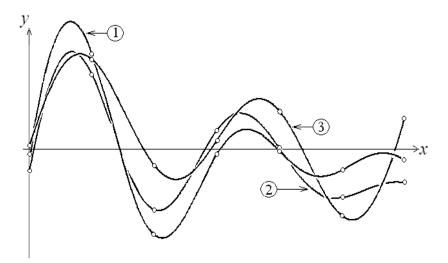


Рис. 7. Графики зависимости сигнала на выходе нейронной сети от входного сигнала для разных обучающих наборов со случайными отклонениями $\varepsilon \in (0, h)$: 1) h = 0,2, 2) h = 0,4, 3) h = 0,6 **Fig. 7.** The Graphs of the dependence of the signal y at the output of the neural network on the input signal for different training sets with random deviations $\varepsilon \in (0, h)$: 1) h = 0.2, 2) h = 0.4, 3) h = 0.6

Аппроксимирующие кривые получены при одном и том же значении $\sigma = 0.05$, полученном при обучении сети на тестовом примере (рис. 6).

Обращает на себя внимание тот факт, что все три кривые отражают характер зависимости выходного сигнала от входного, в соответствии с заданным эталоном (10).

МНОГОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Проблема аппроксимации функций многих переменных имеет давнюю предысторию. Основной вклад в решение этой проблемы внесли в середине прошлого века советские математики А.Н. Колмогоров и В.И. Арманд [6, 7]. В дальнейшем полученные ими результаты неоднократно уточнялись и развивались [8–11]. Одним из важных результатов в этой области является доказательство возможности аппроксимации произвольной непрерывной функции нейронной сетью с одним скрытым слоем (см., например, [12]).

Рассмотрим RBF-сеть, аналогичную представленной в предыдущем разделе (см. рис. 3). Отличия состоят в том, что теперь входным сигналом является вектор $X \in \mathbb{R}^n$, а функция активации i-го скрытого нейрона имеет вид

$$f_i(X) = exp[-\frac{\|X - C^{(i)}\|^2}{2 \cdot \sigma^2}],$$

где $C^{(i)} = (c_1{}^{(i)}, c_2{}^{(i)}, ..., c_n{}^{(i)})$ – центр активации i-го нейрона, $\| \bullet \|$ – эвклидова норма (длина вектора), σ – параметр функции активации, характеризующий размер области, в которой каждый нейрон скрытой области реагирует максимальным образом на входной сигнал X.

В двумерном случае $X = (x_1, x_2), C^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)}).$

Предположим, что аппроксимируемая зависимость Z = Z(X) задана обучающим набором $(X^{(i)}, Z_i)$, i = 1, 2, ..., M. Пусть K – количество скрытых нейронов, каждый из которых характеризуется своим центром активации $C^{(i)} = (c_1^{(i)}, c_2^{(i)})$, i, j = 1, 2, ..., K. Синаптический вес связи скрытого нейрона с центром активации $C^{(i)}$ с выходным, обозначим ω_i . В результате обучения аппроксимирующая зависимость представляется функцией

$$F(X,\sigma) = \sum_{i=1}^{K} \omega_i \cdot f_i(X). \tag{11}$$

Как и в рассмотренном выше одномерном случае, ошибка аппроксимации S представляется в виде суммы квадратов разностей между заданными значениями Z_i и аппроксимирующей функции $F(X^{(i)}, \sigma)$ по всем точкам обучающего набора $X^{(i)}$, i = 1, 2, ..., M:

$$S = \sum_{i=1}^{M} \left[F(X^{(i)}, \sigma) - Z_i \right]^2.$$

Вектор синаптических весов $W = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K)^T$ определяется в соответствии со стандартным методом наименьших квадратов путем решения системы линейных уравнений GW = B, где G – числовая матрица с коэффициентами G_{pq} , (p, q = 1, 2, ..., K), B – столбец правых частей:

$$G_{pq} = \sum_{i=1}^{M} f_p(X^{(i)}) \cdot f_q(X^{(i)}), \quad B_p = \sum_{i=1}^{M} y_i \cdot f_p(X^{(i)}),$$
 $p, q = 1, 2, ..., K.$

Подбор оптимального значения параметра σ для заданного количества нейронов скрытого слоя выполняется так же, как в рассмотренном выше случае одномерной аппроксимации. Для этого используется обучающий набор значений некоторой эталонной функции, выбираемой исходя из априорных сведений о характере исследуемой зависимости Z = Z(X).

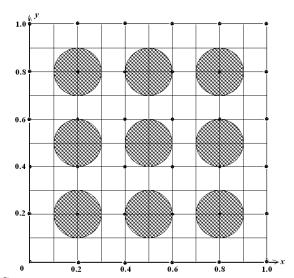
В качестве примера рассмотрим задачу аппроксимации функции двух переменных, заданной таблично в узлах координатной сетки с шагом h = 0.2 (см. табл. 1 и рис. 8).

 $egin{align*} {f Taблицa 1} \\ {f Table 1} \\ {f Shaчehus функции $Z(x_i,y_j)$} \\ {f The values of the function $Z(x_i,y_j)$} \\ \end{array}$

x∖y	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,003	0,033	0,165	0,368	0,368	0,165
0,2	0,008	0,080	0,373	0,820	0,819	0,368
0,4	0,034	0,210	0,503	0,846	0,820	0,368
0,6	0,138	0,704	0,836	0,503	0,373	0,165
0,8	0,136	0,677	0,704	0,210	0,08	0,033
1,0	0,027	0,136	0,138	0,034	0,008	0,003

Количество нейронов в скрытом слое K = 9. Их центры активации расположены равномерно внутри квадрата $0 \le x, y \le 1$.

Civil Aviation High Technologies



Puc. 8. Схема расположения центров активации скрытых нейронов **Fig. 8.** The scheme of location of activation centers of hidden neurons

Результат обучения данной ИНС представлен на рис. 9. Функция аппроксимации (11) представлена линиями уровня.

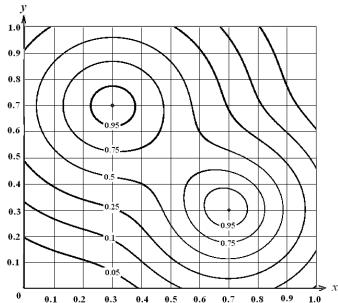


Рис. 9. Линии уровня аппроксимирующей функции для данных из таблицы 1 **Fig. 9.** Level lines of approximating function for data from table 1

выводы

Для решения задачи аппроксимации, как отмечается во многих публикациях, лучше всего подходят радиально-базисные нейронные сети (RBF-сети) с одним скрытым слоем. В качестве функций активации скрытых нейронов используются радиально-базисные функции, к которым принадлежит и функция Гаусса.

В этом случае отдельный скрытый нейрон реагирует максимальным образом на входные сигналы из небольшой окрестности центра активации этого нейрона.

Такая организация сети позволяет проводить процесс обучения прямыми методами, без использования рекуррентных алгоритмов, таких как метод обратного распространения ошибки.

Этим RBF-сети в лучшую сторону отличаются от традиционных сетей с сигмоидальными функциями активации.

Одними из основных при построении RBF-сети являются задачи выбора точек центров активации для каждого нейрона и размеров их окрестностей.

В данной статье свойства сети определяются параметрами функции Гаусса — точкой максимума c_i и шириной кривой σ . Эти параметры характеризуют свойства сети и задаются заранее. Они не участвуют в процессе обучения, направленном на определение синоптических весов, минимизирующих ошибку аппроксимации.

Таким образом, процесс обучения RBF-сети может быть описан следующим образом.

- 1. Исходя из общих соображений и априорных сведений о характере зависимостей между входными и выходными сигналами, выбирается эталонная функция f(X), $X \in \mathbb{R}^n$.
 - 2. Составляется обучающая выборка $\{X^{(i)}, Z_i = f(X^{(i)})\}, i = 1, ..., M$.
 - 3. Задается начальное значение параметра функции активации σ .
- 4. Определяются весовые коэффициенты для каждого нейрона скрытого слоя ω_i , i=1,...,K.
 - 5. Подсчитывается интегральная ошибка аппроксимации (8).
- 6. Параметр σ уменьшается и пункты 4, 5 повторяются до тех пор, пока ошибка аппроксимации станет минимальной.

Целью статьи было продемонстрировать один из возможных подходов к решению задачи аппроксимации с помощью нейронной сети. Конечно, вопрос о качестве аппроксимации при этом остается открытым. Как поведет себя сеть при аппроксимации других функций, заданных таблично, — это предмет дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Калиткин Н.Н.** Численные методы. СПб., 2011. 592 с.
- 2. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей: пер. с англ. М., 2003. 288 с.
- **3. Хайкин С.** Нейронные сети. Полный курс: пер. с англ. 2-е изд. М., 2006. 1104 с.
- **4. Круглов В.В., Борисов В.В.** Искусственные нейронные сети. Теория и практика. М., 2002. 382 с.
- **5.** Осовский С. Нейронные сети для обработки информации: пер. с пол. М., 2002. 344 с.
- **6. Колмогоров А.Н.** О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
- **7. Арнольд В.И.** О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций меньшего числа переменных // Математическое просвещение. 1958. № 3. С. 41–61.
- **8. Круглов В.В., Дли М.И., Голунов Р.Ю.** Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М.: Физматлит, 2001. 224 с.
- **9. Поспелов В.В.** О приближении функций нескольких переменных произведениями функций одного переменного: препринт № 32. М.: ИПМ АН СССР, 1978. 72 с.
- **10.** Нейросетевые системы управления / В.А. Терехов, Д.В. Ефимов, И.Ю. Тюкин, В.И. Антонов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 265 с.
- **11. Шура-Бура М.Р.** Аппроксимация функций многих переменных функциями, каждая из которых зависит от одного переменного // Вычислительная математика. 1957. Вып. 27. С. 3–19.
- **12. Бутырский Е.Ю., Кувалдин И.А., Чалкин В.П.** Аппроксимация многомерных функций // Научное приборостроение. 2010. Т. 20, № 2. С. 82–92.

Civil Aviation High Technologies

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Агеев Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики МГТУ ГА, rv3bd@mail.ru.

THE SOLUTION OF THE APPROXIMATION PROBLEM OF NONLINEAR DEPENDANCES USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Vladimir N. Ageyev¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper discusses issues connected with the use of an artificial neural network (ANN) to approximate the experimental data. One of the problems in the development of the ANN is the choice of an appropriate activation function for neurons of the hidden layer and adjusting the parameters of the function in the learning process of the network. The article discusses a three-layer perceptron with one hidden layer, each neuron of which has the activation function in the form of a Gaussian curve. The choice of radial basis activation function allows the use of the direct method of determining the weight coefficients – method of least squares in the process of network training. Thus the quality of the approximation depends on the correct choice of the value parameter of the activation function, which in this case is the width of the Gaussian bell curve. In practice, this parameter is determined by conducting numerical experiments. This is a rather time-taking process. In this paper we propose to define the value of this parameter by the training set, representing the coordinates of the test curve points set with the desired properties. These properties are based on the a priori data of the approximated functions (linear, quadratic, logarithmic, exponential relationship). Because the test curve is given in explicit form, the parameter of activation function is determined from the condition of reaching the minimum of the integral from the squared difference between the values of the test functions and the output of the network. This approach guarantees obtaining the approximating curve with good properties, in particular, it is characterized by the absence of so-called "oscillations" – many inflection points in its graph.

Key words: artificial neural network, activation function, training samples, function approximation.

REFERENCES

- **1. Kalitkin N.N.** *Chislenniye metody* [Numerical methods]. Saint-Petersburg, 2011. 592 p. (in Russian)
- **2. Kallan R.** Osnovniye kontseptsii neyronnyh setey [Basic concepts of neural networks]. Translated from English. M.: Williams, 2003, 288 pp. (in Russian)
- **3. Haykin S.** *Neyronniye seti. Polniy kurs* [Neural networks. A complete course]. Translated from English. 2nd edition. 2006. 1104 p. (in Russian)
- **4. Kruglov V.V., Borisov V.V.** *Iskusstvenniye neyronniye seti. Teoria i praktica* [Artificial neural network. Theory and practice]. M: 2002. 382 pp. (in Russian)
- **5. Osovskiy S.** *Neyronnie seti dla obrobotki informatsii* [Neural network for information processing]. Translated from polish. M.: Finance and Statistics, 2002, 344 p. (in Russian)
- **6. Kolmogorov A.N.** O predstavlenii nepreryvnyh funktsiy neskol'kih peremennyh v vide superpozitsii nepreryvnyh funktsiy odnogo peremennogo [On the representation of continuous functions of several variables as a superposition of continuous functions of one variable]. Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 1957. vol. 114, No 5, pp. 953–956. (in Russian)
- 7. Arnold V.I. O predstavlenii nepreryvnyh funktsiy neskol'kih peremennyh v vide superpozitsii nepreryvnyh funktsiy men'shego chisla peremennyh [On the representation of continuous functions of several variables as superposition of continuous functions of fewer variables] // Matematicheskoye prosveshenie [Mathematical education], 1958, No. 3, pp. 41–61. (in Russian)

- **8.** Kruglov V.V., Dlee M.I., Golunov R.Yu. Nechetkaya logika i iskustvenniy intellekt [Fuzzy logic and artificial neural network]. M.: Fizmatlit, 2001, 224 p. (in Russian)
- **9. Pospelov V.V.** O priblezhenii funktsiy neskolkih peremennyh proizvedeniyami finktsiy odnogo peremennogo: preprint №32 [On the approximation of several variables functions by products of functions of one variable: preprint. No. 32]. M.: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 1978, 72 p. (in Russian)
- 10. Terekhov V.A., Efimov D.V., Tyukin I.Yu., Antonov V.I. Neyrosetevye sistemy upravleniya [Neural network control systems]. Saint-Petersburg: SPb. State University, 1999, 265 p. (in Russian)
- 11. Shura-Bura M.R. Aproksimatsiya funktsiy mnogih peremennyh funktsiyami. Kazhdaya is kotoryh zavisit ot odnogo peremennogo [Approximation of functions of many variables functions, each of which depends on one variable]. Vychislitelnaya matematika [Computational mathematics] 1957, issue 27, pp. 3–19. (in Russian)
- **12.** Butirsky E.Yu., Kuvaldin I.A., Chalkin V.P. *Aproksimatsiya mnogomernyh funktsiy* [Approximation of multidimensional functions]. *Nauchnoye priborostroyeniye* [Scientific instrumentation]. 2010, vol. 20, № 2, 82–92 pp. (in Russian)

INFORMAITION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir N. Ageyev, Doctor of Technical Sciences, Professor of Applied Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, rv3bd@mail.ru.

Поступила в редакцию	28.10.2017	Received	28.10.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК 517.957

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-51-58

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

A.A. ГОРИНО B^1

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия

Исследования поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 15-08-08698

Проводится анализ применимости метода «ручного» интегрирования В.В. Лычагина к системам двух квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t, x и двумя неизвестными функциями u = u(t, x) и v = v(t, x). Рассматриваемые системы являются частным случаем систем Якоби, для которых В.В. Лычагиным был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи. Каждому из уравнений системы ставится в соответствие дифференциальная 2-форма на четырехмерном пространстве. Эта пара форм однозначно определяет поле линейных операторов, которое для гиперболических уравнений порождает структуру почти произведения. Это означает, что касательное пространство четырехмерного пространства в каждой точке является прямой суммой двумерных собственных подпространств данного оператора и, таким образом, определены два двумерных распределения. Если хотя бы одно из этих распределений вполне интегрируемо, то можно построить векторное поле, сдвиги вдоль которого сохраняют решение исходной системы уравнений. Таким образом, решение начально-краевой задачи для рассматриваемой системы может быть получено аналитически с помощью сдвига начальной кривой вдоль траекторий данного векторного поля. В качестве примера рассмотрена система уравнений Бакли – Леверетта, описывающая процесс нелинейной одномерной двухфазной фильтрации в пористой среде. Для построения решения задачи Коши выбирается кривая начальных данных; график решения системы Бакли – Леверетта получается сдвигом этой кривой вдоль траекторий векторного поля (это векторное поле определено с точностью до умножения на функцию). Сечения компоненты этого графика для различных моментов времени представлены на рисунке. На графике видно, что в какой-то момент времени решение перестает быть однозначным. В этот момент у решения происходит разрыв и возникает ударная волна.

Ключевые слова: интегрируемые распределения, теорема Фробениуса, гиперболические уравнения.

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t,x и двумя неизвестными функциями u=u(t,x) и v=v(t,x):

$$\begin{cases}
A_1 u_x + B_1 v_x + C_1 = 0, \\
A_2 v_x + B_2 u_x + C_2 = v_t.
\end{cases}$$
(1)

Здесь A_i , B_i , C_i — известные функции от переменных x,u,v (i=1,2). Будем считать, что эти функции класса \mathcal{C}^{∞} .

Система (1) является частным случаем систем Якоби, для которых В.В. Лычагиным был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи [5] (см. также [3]). Опишем суть этого метода применительно к системам типа (1).

Введем пространство $N=\mathbb{R}^4$ с координатами t,x,u_0,v_0 и пространство $M=\mathbb{R}^2$ с координатами t,x. На пространстве N построим две дифференциальные 2-формы

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\begin{cases} \omega_1 = A_1 dt \wedge du_0 + B_1 dt \wedge dv_0 + C_1 dt \wedge dx, \\ \omega_2 = B_2 dt \wedge du_0 + A_2 dt \wedge dv_0 + C_2 dt \wedge dx + dx \wedge dv_0. \end{cases}$$

С этими дифференциальными формами свяжем дифференциальные операторы

$$\Delta_i: C_{\mathrm{loc}}^{\infty}(M) \times C_{\mathrm{loc}}^{\infty}(M) \longrightarrow \Omega^2(M)$$
 $(i = 1,2),$

действующие по правилу

$$\Delta_i(u,v) = \omega_i|_{\Gamma_{u,v}} (i = 1,2).$$

Здесь $C^{\infty}_{\mathrm{loc}}(M)$ — кольцо локально гладких функций на M, т. е. функций, гладких в своей области определения, $\Omega^2(M)$ — модуль дифференциальных 2-форм на M,

$$\Gamma_{uv} = \{u_0 = u(t, x), v_0 = v(t, x)\}\$$

– график вектор-функции (u, v) и $\omega|_{\Gamma_{u,v}}$ – ограничение дифференциальной 2-формы ω на этот график. Области определения функций u и v должны совпадать.

Теорема 1. Пара функций (u, v) является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1(u, v) = 0, \ \Delta_2(u, v) = 0.$$

Введем понятие гиперболичности для систем (1). Пусть $\mu \in \Omega^4(N)$ — фиксированная дифференциальная форма объема на N, например,

$$\mu = dt \wedge dx \wedge du_0 \wedge dv_0$$
.

Для пары дифференциальных 2-форм $\alpha, \beta \in \Omega^2(N)$ определим симметрическую билинейную форму

$$q: \Omega^2(N) \times \Omega^2(N) \longrightarrow C^{\infty}(N)$$

следующим равенством:

$$\alpha \wedge \beta = q(\alpha, \beta)\mu$$
.

Матрица Грамма этой билинейной формы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q(\omega_1, \omega_1) & q(\omega_1, \omega_2) \\ q(\omega_2, \omega_1) & q(\omega_2, \omega_2) \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Система дифференциальных уравнений (1) называется *гиперболической*, если det Q < 0 для всех точек пространства N.

Следующая теорема дает критерий гиперболичности систем (1).

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений (1) является гиперболической тогда и только тогда, когда функция A_1 не обращается в нуль.

В справедливости этой теоремы можно убедиться прямыми вычислениями. Далее считаем, что условие гиперболичности выполняется.

Civil Aviation High Technologies

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Заметим, что дифференциальные 2-формы $a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2$ и $a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2$, где a_{ij} – функции на N, для которых матрица $||a_{i,j}||_{i,j=1,2}$ невырождена, определяют ту же самую систему дифференциальных уравнений (1).

Таким образом, вместо 2-форм ω_1 и ω_2 можно рассматривать дифференциальные 2-формы, являющиеся их линейными комбинациями. В частности, для гиперболических систем коэффициенты a_{ij} можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$$

И

$$\omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_2$$
.

Например, следующие дифференциальные 2-формы удовлетворяют этим условиям:

$$\omega_1 = (3B_2C_1 - A_1C_2)dt \wedge dx + 2A_1B_2dt \wedge du_0 + (3B_2B_1 - A_1A_2)dt \wedge dv_0 - A_1dx \wedge dv_0,$$

$$\omega_2 = (B_2C_1 + A_1C_2)dt \wedge dx + 2A_1B_2dt \wedge du_0 + (B_2B_1 + A_1A_2)dt \wedge dv_0 + A_1dx \wedge dv_0.$$

Построим поле \mathcal{A} линейных операторов на N, определив его равенством

$$X]\omega_2 = \mathcal{A}X]\omega_1.$$

Здесь] — оператор внутреннего умножения, а X — произвольное векторное поле на пространстве \mathbb{R}^4 . В базисе

$$\frac{\partial}{\partial t}$$
, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial u_0}$, $\frac{\partial}{\partial v_0}$

матрица этого линейного оператора имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\frac{B_2B_1 - A_1A_2}{A_1} & -1 & 0 & 0 \\ 2\frac{A_2C_1 - B_1C_2}{A_1} & 2\frac{C_1}{A_1} & 1 & 2\frac{B_1}{A_1} \\ 2\frac{C_2A_1 - C_1B_2}{A_1} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные подпространства оператора \mathcal{A} определяют два двумерных распределения на пространстве N: распределение V^+ , которое порождено парой векторных полей

$$X^{+} = A_1 \frac{\partial}{\partial t} + (B_2 B_1 - A_1 A_2) \frac{\partial}{\partial x} + (C_2 A_1 - C_1 B_2) \frac{\partial}{\partial v_0}$$

И

$$Y^+ = \frac{\partial}{\partial u}$$

и распределение V^- , порожденное парой векторных полей

Vol. 21, No. 02, 2018

$$X^{-} = -B_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial v_0}$$

И

$$Y^{-} = -A_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial u_0}.$$

Определение 2. Распределения V^+ и V^- будем называть *характеристическими*.

Характеристические распределения обладают одним замечательным свойством: касательная плоскость в точке a к графику решения $\Gamma_{u,v}$ пересекает каждую из характеристических плоскостей $V^+(a)$ и $V^-(a)$. Поэтому на графике решения лежат интегральные кривые характеристических распределений. Эти кривые называются характеристиками. Это наблюдение лежит в основе описываемого метода аналитического интегрирования.

А именно, допустим, что одно из характеристических распределений, например, V^+ , вполне интегрируемо и кривая $\mathcal K$ лежит на нулевой поверхности уровня интеграла распределения V^+ . Для построения решения, график которого содержит кривую $\mathcal K$, достаточно построить векторное поле Z из распределения V^- , трансверсальное кривой начальных данных $\mathcal K$, и сдвинуть эту кривую вдоль его траекторий. В результате сдвига получится поверхность, которая и будет представлять собой график искомого решения [3].

Характеристические распределения можно также задать дифференциальными 1-формами

$$\begin{split} \theta_1^+ &= \frac{A_2C_1 - B_1C_2}{A_1}dt + \frac{C_1}{A_1}dx + du + \frac{B_1}{A_1}dv, \\ \theta_2^+ &= \frac{A_1C_2 - B_2C_1}{A_1}dt, \\ \theta_1^- &= \frac{B_2C_1 - A_1C_2}{A_1}dt + dv, \\ \theta_2^- &= \frac{B_1C_2 - A_2C_1}{A_1}dt - \frac{C_1}{A_1}dx - \frac{B_1}{A_1}dv. \end{split}$$

Теорема 3. 1. Характеристическое распределение V^+ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial u}A_1B_2 + C_1A_1\frac{\partial B_2}{\partial u} - C_1\frac{\partial A_1}{\partial u}B_2 - A_1^2\frac{\partial C_2}{\partial u} = 0,\\ \frac{\partial C_2}{\partial u}A_1B_1 - C_1A_1\frac{\partial A_2}{\partial u} - \frac{\partial C_1}{\partial u}B_1B_2 + \frac{\partial B_1}{\partial u}B_2C_1 = 0. \end{cases}$$

2. Характеристическое распределение V^- вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда либо

$$A_1C_2 - B_2C_1 = 0,$$

либо

$$\frac{\partial B_1}{\partial x}A_1 - B_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial u}B_1 - C_1\frac{\partial B_1}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial v}C_1 - A_1\frac{\partial C_1}{\partial v} = 0.$$

Справедливость этой теоремы следует из условий полной интегрируемости Фробениуса

$$\begin{cases} \theta_1^{\pm} \wedge \theta_2^{\pm} \wedge d\theta_1^{\pm} = 0, \\ \theta_1^{\pm} \wedge \theta_2^{\pm} \wedge d\theta_2^{\pm} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи Коши для системы (1) может быть получено методом В.В. Лычагина, если выполняются условия теоремы 3.

Заметим, что при выполнении условия $A_1C_2-B_2C_1=0$ в системе (1) одно из уравнений оказывается не связанным с другим. То есть система распадается на два уравнения. То же самое справедливо и в случае полной интегрируемости распределения V^+ .

СИСТЕМА БАКЛИ – ЛЕВЕРЕТТА

В качестве примера рассмотрим систему уравнений Бакли – Леверетта [1, 2], описывающую процесс одномерной двухфазной фильтрации в пористой среде:

$$\begin{cases}
s_t + G(s)H(s)p_x s_x = 0, \\
H'(s)p_x s_x + H(s)p_{xx} = 0.
\end{cases}$$
(2)

Здесь x – пространственная координата, t – время, s – водонасыщенность, то есть относительный объем пор, заполненных водой, p – давление, G и H – заданные функции.

Введем обозначения: $u = p_x$, v = s. Система (2) является частным случаем системы (1) при

$$A_1 = H(v)$$
, $B_1 = H'(v)u$, $C_1 = 0$, $A_2 = -G(v)H(v)u$, $B_2 = 0$, $C_2 = 0$,

и вместо системы (1) будем рассматривать систему

$$\begin{cases}
H(v)u_x + H'(v)uv_x = 0, \\
-G(v)H(v)uv_x = v_t.
\end{cases}$$
(3)

Условие интегрируемости распределения V^- теоремы 3 выполняется для этой системы, и поэтому задача Коши для (2) может быть решена методом В.В. Лычагина.

Ее характеристические распределения порождены векторными полями

$$V^+$$
: $X^+ = \frac{\partial}{\partial u}$, $Y^+ = G(v)H(v)u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$

И

$$V^{-}$$
: $X^{-} = H'(v)u\frac{\partial}{\partial u} - H(v)\frac{\partial}{\partial v}, \qquad Y^{-} = \frac{\partial}{\partial x}.$

Вполне интегрируемое распределение V^- имеет два функционально независимых интеграла

$$I_1 = t$$
, $I_2 = uH(v)$.

Их ограничения на кривую

$$\gamma = (x = 0, u = U(t), v = V(t))$$

Vol. 21, No. 02, 2018

имеют вид

$$I_1|_{V} = t$$
, $I_2|_{V} = f(t) = H(V(t))U(t)$.

Найдем функцию F, такую, что

$$F(I_1|_{\gamma}, I_2|_{\gamma}) = 0.$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$F(I_1, I_2) = I_2 - f(I_1).$$

Кривая γ лежит на графике решения $\Gamma_{u,v}$, если ограничение функции F на эту кривую равно нулю: $F|_{\nu}=0$.

Построим векторное поле Z на графике $\Gamma_{u,v}$, интегральные кривые которого являются в то же время интегральными кривыми распределения V^+ :

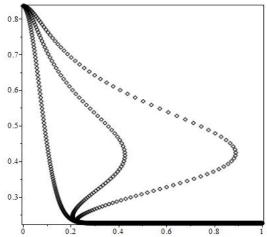
$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - G(v)H(v)u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{f}(t)}{H(v)}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это векторное поле определено с точностью до умножения на функцию.

Для построения решения задачи Коши возьмем следующую кривую начальных данных:

$$\mathcal{K} = \{t = 0, u = U_{\mathcal{K}}(x), v = V_{\mathcal{K}}(x)\}.$$

График решения системы Бакли — Леверетта получается сдвигом этой кривой вдоль траекторий векторного поля Z. Сечения компоненты v этого графика для различных моментов времени представлены на рис. 1.



Puc. 1. Сечения графика решения для различных моментов времени Fig. 1. Graph cut sets of a solution for different time moments

Видим, что в какой-то момент времени решение перестает быть однозначным. В этот момент у решения происходит разрыв и возникает ударная волна [3, 4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен класс систем двух квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t,x и двумя неизвестными функциями u=u(t,x) и v=v(t,x) (включающий практически важную задачу фильтрации), для которых ранее был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи. Однозначным образом определяется поле линейных операторов на четырехмерном многообразии, которое для гиперболических уравнений порождает структуру почти произведения и касательное пространство в каждой точке является прямой суммой двумерных собственных подпространств. Если хотя бы одно из этих распределений вполне интегрируемо, то можно построить векторное поле, сдвиги вдоль которого сохраняют решение исходной системы уравнений. Разобранный пример показывает, что аналитическая процедура решения задачи Коши адекватно описывает возникновение ударных волн.

Civil Aviation High Technologies

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.** Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений. М.: ИПУ РАН, 2017. 124 с.
- **2. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V.** Integrability of Buckley-Leverett's Filtration Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, Issue 12. Pp. 1251–1254.
- **3. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.** Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Its Appl., 101. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. xxii+496 p.
- **4.** Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. 1985. Vol. 3. Pp. 135–173.
- **5.** Lychagin V.V. Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1, 2. Rome: La Sapienza, 1993.
- **6. Kushner A.G., Lychagin V.V.** Feedback invariants of control hamiltonian Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline): World Congress. Montreal: Elsevier, 2015. Vol. 48, No. 3. Pp. 1273–1275.
- 7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations // Analysis and Mathematical Physics. 2016. Vol. 7, No. 2. C. 107–115.
- **8.** Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Natural spinor structures over Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2016. Vol. 106. Pp. 1–5.
- 9. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Integrable Models of Oil Displacement // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, Issue 3. Pp. 1264–1267.
- 10. Konovenko N.G., Lychagin V.V. Lobachevskian geometry in image recognition // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, No. 3. Pp. 286–291.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Горинов Антон Андреевич, младший научный сотрудник Института проблем управления РАН, gorinov@ipu.ru.

ABOUT ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM OF TWO QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS SYSTEM

Anton A. Gorinov¹

¹Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR), Project № 15-08-08698

ABSTRACT

The applicability of the V. Lychagin "manual" integration method is analyzed with respect to systems of two quasilinear hyperbolic differential equations of the first order with two independent variables t, x and two unknown functions u = u (t, x) and v = v (t, x). The systems under consideration are a special case of Jacobi systems, for which V. Lychagin proposed an analytical method for solving the initial-boundary value problem. Each of the equations of the system is associated with a differential 2-form on four-dimensional space. This pair of forms uniquely determines the field of linear operators, which, for hyperbolic equations, generates an almost product structure. This means that the tangent space of four-dimensional space in each point is a direct sum of two-dimensional own-subspaces of the given operator and, thus, two 2-dimensional distributions are defined. If at least one of these distributions is completely integrable, then it is possible to construct a vec-

tor field along which shifts keep the solution of the original system of equations. Thus, the solution of the initial-boundary value problem for the system under consideration can be obtained analytically by shifting the initial curve along the trajectories of the given vector field. As an example, the Buckley-Leverett system of equations describing the process of nonlinear one-dimensional two-phase filtration in a porous medium is considered. To construct the solution of the Cauchy problem, a curve of the initial data is chosen; the solution of the Buckley-Leverett system is obtained by shifting this curve along the trajectories of the vector field (this vector field is defined up to multiplication by a function). The cross-sections of the components of this graph for different instants of time are brought in the figure. The graph shows that at some point of time the solution stops being unambiguous. At this point, the solution breaks and a shock wave appears.

Key words: integrable distributions, Frobenius theorem, hyperbolic equations.

REFERENCES

- 1. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Matematicheskiye modeli upravleniya razrabotkoy neftyanykh mestorozhdeniy [Mathematical models of oil field development management]. M.: IPP RAS, 2017. 124 p. (in Russian)
- **2. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V.** Integrability of Buckley-Leverett's Filtration Model. IFAC-PapersOnLine, 2016, vol. 49, issue 12, pp. 1251–1254.
- **3. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.** Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Its Appl., 101. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. xxii+496 p.
- **4.** Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena. Acta Appl. Math., 1985, vol. 3, pp. 135–173.
- **5.** Lychagin V.V. Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1, 2. Rome: La Sapienza, 1993.
- **6. Kushner A.G., Lychagin V.V.** Feedback invariants of control hamiltonian Systems. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline): World Congress. Montreal: Elsevier, 2015, vol. 48, No. 3, pp. 1273–1275.
- 7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations. Analysis and Mathematical Physics, 2016, vol. 7, No. 2, pp. 107–115.
- **8.** Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Natural spinor structures over Lorentzian manifolds. Journal of Geometry and Physics, 2016, vol. 106, pp. 1–5.
- **9.** Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Integrable Models of Oil Displacement. IFAC-PapersOnLine, 2015, vol. 48, issue 3, pp. 1264–1267.
- 10. Konovenko N.G., Lychagin V.V. Lobachevskian geometry in image recognition. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015, vol. 36, No. 3, pp. 286–291.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anton A. Gorinov, Research Assistant at Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, gorinov@ipu.ru.

Поступила в редакцию	24.12.2017	Received	24.12.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК 519.85, 517.977.58

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-59-70

ПРИМЕНЕНИЕ ГИБРИДНОГО МЕМЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ¹, В.Н. ПАНОВСКИЙ¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-00419 А

В работе исследуется применение гибридного меметического алгоритма глобальной условной оптимизации в задаче поиска оптимального управления нелинейными стохастическими системами. Предлагаемый подход основывается на параметризации искомого управления, что позволяет свести задачу поиска оптимального управления к задаче нелинейного программирования. Решение последней предлагается искать с помощью метаэвристического алгоритма глобальной оптимизации - меметического алгоритма. Термин меметические алгоритмы широко используется в качестве обозначения взаимодействия эволюционного, культурно-эволюционного или другого подхода, основанного на понятии популяции, и индивидуального обучения особей либо другой локальной процедуры улучшения для решения задач поиска глобального экстремума. В разработанном алгоритме культурная эволюционная составляющая реализуется в ходе решения подзадачи оптимизации любым из двух методов: с помощью метода муравьиных колоний или метода имитации отжига. При этом в ходе культурной эволюции мемы (единицы передачи культурной информации) используются для генерации более совершенной (в терминах решаемой задачи – более эффективной) особи. В данном исследовании рассматривается несколько альтернативных способов параметризации управления: в виде разложения по системе полиномов Лежандра и косинусоид. Эффективность предложенных алгоритмов исследована с помощью созданного комплекса программ. В качестве тестового примера использована задача гашения вращательного движения спутника с помощью установленных на нем двигателей. О корректности решений, полученных с помощью предложенного подхода, можно судить путем сравнения с решением, найденным с помощью метода локальных вариаций. Полученные данные позволяют говорить о достаточной эффективности предложенного подхода.

Ключевые слова: оптимальное управление, глобальный экстремум, нелинейные стохастические системы, неполная обратная связь, меметические алгоритмы, стабилизация спутника.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается проблема приближенного решения задачи поиска оптимального в среднем управления нелинейными стохастическими системами в условиях неполной текущей информации о координатах вектора состояния [1-3]. Задачи синтеза оптимальных стохастических систем ранее изучались в [1-6], где были сформулированы и доказаны различные условия оптимальности, а также разработаны численные методы их удовлетворения.

В работе предлагается искать приближенное решение в параметрическом виде путем подбора коэффициентов, входящих в функцию разложения компонент управления. Функция разложения представляет собой сумму произведений элементов систем ортонормированных базисных функций, применяемых в спектральном методе анализа и синтеза нелинейных систем [7], и искомых коэффициентов. Структура функции разложения определяется набором измеряемых координат вектора состояния, используемых в управлении. Ограничения на управление учитываются с помощью применения функции насыщения. Задача нахождения оптимального управления с неполной обратной связью сводится к решению параметрической задачи нелинейного программирования относительно коэффициентов разло-

жения. Для ее решения предлагается применить гибридный меметический алгоритм [8, 9] поиска глобального условного экстремума, относящийся к метаэвристическим [10]. Его применение приводит к получению решения, близкого к оптимальному, за приемлемое время. Эффективность предложенного подхода демонстрируется на задаче оптимальной стабилизации спутника [11].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение модели объекта управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dX = f(t, X(t), u(t)) dt + \sigma(t, X(t), u(t)) dW, \ X(t_0) = X_0,$$
(1)

где X — вектор состояния системы, $X = (X^1, X^2)^T \in \mathbb{R}^n$, $X^1 = (X_1, ..., X_m)^T$, $X^2 = (X_{m+1}, ..., X_n)^T$, $0 \le m \le n$; u — вектор управления, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^q$, U — множество допустимых значений управления, представляющее собой прямое произведение отрезков $[a_i, b_i]$, i = 1, 2, ..., q; $t \in T = [t_0, t_1]$, T — промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы; W(t) - k-мерный стандартный винеровский случайный процесс.

Предполагается, что о компонентах вектора $X^1 \in \mathbb{R}^m$ текущая информация известна, а о компонентах вектора $X^2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ отсутствует.

Начальное состояние X_0 определяется плотностью вероятности

$$p(t_0, x) = p_0(x) \in \mathbb{R}^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $P = \{p(x) \mid p(x) \in C^2(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx = 1, p(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}, C^k(\mathbb{R}^n)$ — множество k-раз непрерывно дифференцируемых на \mathbb{R}^n функций.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени t и о компонентах вектора X^1 , т. е. управление, применяемое в каждый момент времени $t \in T$, имеет вид управления с неполной обратной связью $u(t) = \mathbf{u}(t, X^1(t))$.

Число m, $0 \le m \le n$, определяется условиями информированности. При m=n имеется информация о всех координатах вектора X, т. е. система будет системой с полной обратной связью, а при m=0 — системой, разомкнутой по состоянию. В последнем случае рассматривается так называемое программное управление u(t).

Множество допустимых управлений с неполной обратной связью \mathbf{U}_m образует функции $\mathbf{u}(t,x^1): T \times \mathbb{R}^m \to U$ такие, что для всех i=1,...,n; j=1,...,k функции $f_i^{u(\cdot)}(t,x) = f_i(t,x,\mathbf{u}(t,x^1)),$ $\sigma_{ij}^{u(\cdot)}(t,x) = \sigma_{ij}(t,x,\mathbf{u}(t,x^1))$ удовлетворяют условиям, при которых решение уравнения (1) существует, единственно и является непрерывным марковским процессом. Если плотность вероятности этого процесса $p(t,x) \in C^{1,2}(T \times \mathbb{R}^n)$, то она $\forall (t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_i(t,x,\mathbf{u}(t,x^1)) p(t,x) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[a_{ij}(t,x,\mathbf{u}(t,x^1)) p(t,x) \right] = A^{u(\cdot)} \left[p(t,x) \right], \quad (3)$$

Civil Aviation High Technologies

с начальным условием (2). Здесь: $A^{u(\cdot)}[\cdot]$ – дифференциальный оператор,

$$a_{ij}(t, x, u) = \sum_{l=1}^{k} \sigma_{il}(t, x, u) \, \sigma_{jl}(t, x, u). \tag{4}$$

Обозначим через $\mathbf{D}_m(t_0,p_0(x))$ множество пар $d_m=(p(t,x),\mathbf{u}(t,x^1))$, где функции $p(t,x)\in C^{1,2}(T\times\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{u}(t,x^1)\in \mathbf{U}_m$ и удовлетворяют уравнению (3) с начальным условием (2).

Определим на множестве $\mathbf{D}_{m}(t_{0}, p_{0}(x))$ функционал качества управления

$$J(d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} f^0(t, x, \mathbf{u}(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} F(x) p(t_1, x) dx = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, X(t), \mathbf{u}(t, X^1(t))) dt + F(X(t_1)) \right\}, \quad (5)$$

где непрерывные функции $f^0(t,x,u): T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$, $F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию полиномиального роста [6].

Требуется найти такой элемент $d_m^* = (p^*(t,x), \mathbf{u}^*(t,x^1)) \in \mathbf{D}_m(t_0,p_0(x)),$ что

$$J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m).$$
 (6)

Искомое управление $\mathbf{u}^*(t,x^1)$ называется оптимальным в среднем.

СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Будем предполагать, что:

- 1) известна оценка множества возможных состояний, которая представляется прямым произведением $[\underline{x_1}, \overline{x_1}] \times \cdots \times [\underline{x_n}, \overline{x_n}]$, где $\underline{x_i}, \overline{x_i}$ нижняя и верхняя граница по каждой координате соответственно;
 - 2) компоненты закона управления $u(t, x^1(t)) = (u_1(t, x^1(t)), ..., u_q(t, x^1(t)))^T$ ищутся в виде

$$u_i(t, x^1(t)) = \text{sat}\left\{g_i(t, x_1(t), ..., x_m(t))\right\}, i = 1, ..., q,$$
 (7)

где
$$\operatorname{sat}\left\{g_{i}(t,x_{1}(t),...,x_{m}(t))\right\} = \begin{cases} g_{i}(t,x_{1}(t),...,x_{m}(t)), a_{i}(t) < g_{i}(t,x_{1}(t),...,x_{m}(t)) < b_{i}(t), \\ a_{i}(t),g_{i}(t,x_{1}(t),...,x_{m}(t)) \leq a_{i}(t), \\ b_{i}(t),g_{i}(t,x_{1}(t),...,x_{m}(t)) \geq b_{i}(t); \end{cases}$$

3) функции $g_i(t, x_1, ..., x_m)$ предлагается искать в виде

$$g_{l}(t, x_{1}, ..., x_{m}) = \underbrace{\sum_{i_{0}=0}^{L_{0}-1} \sum_{i_{1}=0}^{L_{1}-1} ... \sum_{i_{m}=0}^{L_{m}-1} u_{i_{0}i_{1}...i_{m}}^{l} \cdot q(i_{0}, t) p_{1}(i_{1}, x_{1}) \cdots p_{m}(i_{m}, x_{m})}_{u^{s}(t, x^{1})}, \tag{8}$$

где $u_{i_0i_1...i_m}^l$ – неизвестные коэффициенты; $L_0, L_1, ..., L_m$ – масштабы усечения по времени и координатам вектора состояния, используемым в управлении.

В качестве функций $q(i_0,t), p_1(i_1,x_1),...,p_m(i_m,x_m)$ могут использоваться:

а) полиномы Лежандра:

$$q(i_{0},t) = \sqrt{\frac{2i_{0}+1}{t_{N}}} \sum_{k=0}^{i_{0}} l_{i_{0}k} \frac{t^{k}}{t_{N}^{k}}, \quad i_{0} = 0,1,..., L_{0} - 1, \text{ где } l_{i_{0}k} = \left(-1\right)^{i_{0}-k} C_{i_{0}+k}^{i_{0}} C_{i_{0}}^{i_{0}-k},$$

$$p_{j}\left(i_{j},x_{j}\right) = \sqrt{\frac{2i_{j}+1}{x_{j}}} \sum_{k=0}^{i_{j}} l_{i_{j}k} \frac{\left(x_{j}-\underline{x_{j}}\right)^{k}}{\left(\overline{x_{j}}-\underline{x_{j}}\right)^{k}}, \quad j = 1,...,m, i_{j} = 0,1,..., L_{j} - 1, \text{ где } l_{i_{j}k} = \left(-1\right)^{i_{j}-k} C_{i_{j}+k}^{i_{j}} C_{i_{j}}^{i_{j}-k},$$

$$(9)$$

б) косинусоиды:

$$q(i_{0},t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{t_{N}}}, i_{0} = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{t_{N}}} \cos \frac{i_{0}\pi t}{t_{N}}, i_{0} = 1, 2, ..., L_{0} - 1, \end{cases} p_{j}(i_{j}, x_{j}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\overline{x_{j}} - \underline{x_{j}}}}, i_{j} = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\overline{x_{j}} - \underline{x_{j}}}} \cos \frac{i_{j}\pi(x_{j} - \underline{x_{j}})}{\overline{x_{j}} - \underline{x_{j}}}, j = 1, ..., m, i_{j} = 1, 2, ..., L_{j} - 1. \end{cases}$$

$$(10)$$

Стратегия решения заключается в переходе от задачи (6) к задаче поиска минимума функционала с помощью подбора коэффициентов $u^i_{i_0,i_1,\dots,i_m}$, образующих функцию (7). Для формализации задачи предлагается использовать вектор

$$u = \left(u_{i_0, i_1, \dots, i_m}^1, \dots, u_{i_0, i_1, \dots, i_m}^q\right)^T, \tag{11}$$

который представляет собой гиперстолбцовую матрицу, состоящую из q компонент — векторов $u^i_{i_0,i_1,\dots,i_m} = U\left(m+1,0\right)$:

$$u_{i_{0}i_{1}...i_{m}}^{l} = \begin{bmatrix} u_{00...0}^{l} \\ u_{00...1}^{l} \\ \vdots \\ u_{00...(L_{m}-1)}^{l} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_{0(L_{1}-1)...0}^{l} \\ u_{0(L_{1}-1)...1}^{l} \\ \vdots \\ u_{0(L_{1}-1)...(L_{m}-1)}^{l} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_{(L_{0}-1)0...0}^{l} \\ u_{(L_{0}-1)0...1}^{l} \\ \vdots \\ u_{(L_{0}-1)0...(L_{m}-1)}^{l} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} u_{(L_{0}-1)(L_{1}-1)...0}^{l} \\ u_{(L_{0}-1)(L_{1}-1)...1}^{l} \\ \vdots \\ u_{(L_{0}-1)(L_{1}-1)...(L_{m}-1)}^{l} \end{bmatrix}^{T}, l = 1, ..., q. \quad (12)$$

Для решения задачи поиска наилучшего вектора (12) и, как следствие, управления $u(t,x^1)=(u_1(t,x^1),...,u_q(t,x^1))^T$, применяется модифицированный гибридный меметический алгоритм поиска глобального условного экстремума функций многих переменных.

Для нахождения значения критерия (5) для некоторого вектора $u = \left(u_{i_0,i_1,\dots,i_m}^1,\dots,u_{i_0,i_1,\dots,i_m}^q\right)^T$ необходимо:

- 1) с помощью начальной плотности вероятности $p_0(x)$ генерировать начальное состояние X_0^j ;
- 2) по вектору $u=(u^1_{i_0,i_1,\dots,i_m},\dots,u^q_{i_0,i_1,\dots,i_m})^T$ найти соответствующее управление $u(t,x^1)=(u_1(t,x^1),\dots,u_q(t,x^1))^T$;

Civil Aviation High Technologies

3) найти решение $X^{j}(t)$ уравнения модели (1) с управлением $u(t,x^{1})$ и начальным условием X_{0}^{j} , используя один из численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, например, метод Эйлера – Иосиды:

$$X_{k+1}^{j} = X_{k}^{j} + f(k, X_{k}^{j}, u_{k})h + \sqrt{h} \sigma(k, X_{k}^{j}, u_{k})\Delta W,$$

где h — шаг дискретизации, $\Delta W \sim N(0,1)$ — случайный гауссовский k-мерный вектор;

4) повторить пп. 1–3 при j=1,...,N, где N- число генерируемых траекторий, и вычислить значение J функционала (5), усредняя значения функционала, определенного на отдельных траекториях.

В качестве решения задачи выбирается наилучший вектор $u = (u^1_{i_0,i_1,...,i_m},...,u^q_{i_0,i_1,...,i_m})^T$ и соответствующее ему управление.

Таким образом, приведенный выше алгоритм, с помощью которого произвольному вектору ставится в соответствие некоторое число, можно рассматривать как целевую оптимизируемую функцию. Вследствие того, что предлагаемый модифицированный гибридный меметический алгоритм относится к эволюционным метаэвристическим алгоритмам поиска глобального условного экстремума функций многих переменных, полученную функцию можно рассматривать с точки зрения природного понятия приспособленности живого организма, а каждый допустимый вектор – как некоторую особь. Генерируемое на каждой итерации алгоритма множество особей рассматривается как популяция.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шаг 1. Подготовительный этап:

- задать число N генерируемых траекторий;
- генерировать N начальных точек по заданной плотности вероятности $p_0(x)$;
- задать векторы, определяющие оценку множества достижимости: $\underline{x^1} = , \left(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_m}\right),$ $\overline{x^1} = \left(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_m}\right);$ масштабы усечения вектора $u_{i_0i_1\dots i_m}$: L_0, L_1, \dots, L_m .
- Шаг 2. Определение целевой оптимизируемой функции. Зададим правило $h: u \to v$, ставящее в соответствие вектору $u = (u^1_{i_0,i_1,\dots,i_m},\dots,u^q_{i_0,i_1,\dots,i_m})^T$ некоторое число v.
- Шаг 2.1. Найти решение $x^j(t)$ уравнения модели (1) с управлением $u(t,x^1)$ и начальным условием x_0^j , где каждая компонента управления определяется по формуле $u_i(t,x^1)=\mathrm{sat}\left\{g_i(t,x_1,...,x_m)\right\}, i=1,...,q$. Получим пару $d^j=(x^j(t),u(t)=u(t,x^1(t)))$.
 - Шаг 2.3. Подсчитать значение функционала (4): $I(x_0^j, d^j)$, j = 1,..., N.
 - Шаг 2.4. Найти значение критерия $J[u] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} I(x_0^j, d^j)$.
 - Шаг 2.5. Положить v = J[u].
- Шаг 3. Применяя модифицированный гибридный меметический алгоритм к функции $f: u \to v$, получим требуемое управление.

АЛГОРИТМ МОДИФИЦИРОВАННОГО ГИБРИДНОГО МЕМЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Шаг 1. Задать область поиска $[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$, максимальное число итераций M_{\max} , размер популяции m, параметр σ — некоторый порог расстояния между точками, K — максимальное количество элементов множества Pool, q — количество удаляемых решений из множества Pool на каждой итерации, количество итераций PR_{\max} и LI_{\max} процедур Path-Relinking и локального улучшения соответственно, параметры Δ_{pr} и Δ_l , область определения C коэффициентов $c_1,...,c_k$, параметры метода муравьиных колоний или имитации отжига в зависимости от сделанного выбора. Положить k=0 — количество элементов в множестве Pool; M=0 — номер итерации.

Шаг 2. Формирование множества *Pool*.

Шаг 2.1. Случайным образом сформировать популяцию I_M . Для этого с помощью равномерного распределения m раз сгенерировать последовательность из n случайных точек $\{P_i^{M,p}\}_{i=1}^n$, i=1,...,n, p=1,2,...,m на отрезке [0,1]. Используя линейное преобразование, каждая точка отображается на соответствующий ей промежуток $[a_i,b_i]\colon P_i^p=(b_i-a_i)P_i^{M,p}+a_i$. Составляя векторы из точек последовательности $\{P_i^p\}_{i=1}^n$ при фиксированном p, получаем m начальных векторов $x^p=(x_1^p,x_2^p,...,x_n^p)^T$, $x_i^p=P_i^p$, i=1,2,...,n, координаты которых x_j^p имеют равномерное распределение на отрезках $[a_i,b_i]$, i=1,...,n. Таким образом может быть сформирована начальная популяция $I_M=\{x^p,p=1,2,...,m\,|\,x^p=(x_1^p,x_2^p,...,x_n^p)^T\in D\}$.

Шаг 2.2. Вычислить значение функции приспособленности для каждой особи $x^p \in I_M$: $f_p = f(x^p)$, p = 1,...,m. В соответствии со значениями функции приспособленности $f(x^p)$ упорядочить векторы x^p от лучшего (обеспечивающего наименьшее значение $f(x^p)$) к худшему (обеспечивающему наибольшее значение $f(x^p)$).

Шаг 2.3. Лучшее решение x^{best} поместить в множество Pool. Положить $x^{k+1}_{pool}=x^{best}$. Если M=0, то перейти к шагу 2.4. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 2.4. Решение x^j , следующее за x^{best} в упорядоченном списке и удовлетворяющее условию $d(x^{best}, x^j) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{best} - x_i^j)^2} > \sigma$ поместить в множество Pool. Положить $x_{pool}^{k+2} = x^j$.

Положить k = k + 2. Если такого решения нет, то перейти к шагу 2.1. Шаг 3. Решение задачи локального поиска.

Шаг 3.1. Решить задачу $f(x^{new}) \to \min_{c_1,c_2,\dots,c_k}$, где $x^{new} = c_1 x_{pool}^1 + c_2 x_{pool}^2 + \dots + c_k x_{pool}^k$; $c_1,\dots,c_k \in C; \quad x^{new} \in D; \quad x_{pool}^1,x_{pool}^2,\dots,x_{pool}^k \in Pool$. Для решения этой задачи применить метод муравьиных колоний или метод имитации отжига.

Шаг 3.2. Поместить x^{new} в множество Pool. Положить $x^{k+1}_{pool} = x^{new}$, k = k+1.

Шаг 3.3. Если k < K, то перейти к шагу 3.1. Если k = K, перейти к шагу 4.

Шаг 4. Процедура Path-Relinking.

Шаг 4.1. Положить pr = 1.

Шаг 4.2. Выбрать тройку случайных особей $x_{pool}^p, x_{pool}^q, x_{pool}^r$.

Civil Aviation High Technologies

Шаг 4.3. Найти особь
$$x_{pool}^{pq} = \operatorname{Arg} \min_{j=1,\dots,\Delta_{pr}-1} f\left(x_{pool}^p + j \cdot (x_{pool}^q - x_{pool}^p) / \Delta_{pr}\right).$$

Шаг 4.4. Добавить особь $x^{new} = \operatorname{Arg} \min_{j=1,\dots,\Delta_{pr}-1} f\left(x^{pq}_{pool} + j \cdot (x^{q}_{pool} - x^{p}_{pool})/\Delta_{pr}\right)$ во множество Pool. Положить K = K+1 и pr = pr+1.

Шаг 4.5. Если $pr > PR_{\text{max}}$, то перейти к шагу 5. В противном случае перейти к шагу 4.2.

Шаг 5. Процедура локального улучшения.

Шаг 5.1. Положить p = 1.

Шаг 5.2. Положить q = 1.

Шаг 5.3. Сгенерировать особь $\tilde{x} = x_{pool}^p + \xi$, где $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_i \sim U(-\Delta_l, \Delta_l)$. Если $f(\tilde{x}) < f(x_{pool}^p)$, то положить $x_{pool}^p = \tilde{x}$. Положить q = q + 1.

Шаг 5.4. Если $q > LI_{\text{max}}$, то перейти к шагу 5.5. В противном случае — к шагу 5.3.

Шаг 5.5. Положить p=p+1. Если p>K, то перейти к шагу 6. В противном случае – к шагу 5.2.

Шаг 6. Обновление множества *Pool*.

Шаг 6.1. Упорядочить решения, находящиеся в множестве Pool, в соответствии со значениями функции приспособленности $f(x_{pool}^j)$, j=1,...,K от лучшего к худшему. Наилучшее решение записать на лист памяти.

Шаг 6.2. Положить M = M + 1. Если $M < M_{\rm max}$, то перейти к шагу 6.3. Иначе выбрать наилучшее решение из листа памяти и закончить выполнение алгоритма.

Шаг 6.3. Удалить q наихудших решений из Pool, положить k = k - q.

Шаг 6.4. Удалить из множества Pool худшее из двух решений $x_{pool}^{j_1}, x_{pool}^{j_2}$, находящихся слишком близко друг к другу, т. е. не удовлетворяющих условию: $d(x_{pool}^{j_1}, x_{pool}^{j_2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{pooli}^{j_1} - x_{pooli}^{j_2})^2} > \sigma, \quad \forall x_{pool}^{j_1}, x_{pool}^{j_2}, \text{ каждый раз полагая } k = k-1.$ Перейти к шагу 2.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

На основе предложенного алгоритма разработано программное обеспечение для поиска оптимального управления непрерывными детерминированными системами. Среда разработки – Microsoft Visual Studio, язык программирования – С#.

С помощью программного обеспечения пользователь может вводить параметры постановки задачи, а также задавать параметры меметического алгоритма и метода решения задачи локального поиска. В программе имеется возможность выбора метода решения задачи локального поиска: муравьиных колоний (непрерывный вариант) либо имитации отжига [10].

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу гашения вращательного движения спутника с помощью установленных на нем двигателей.

Движение твердого тела относительно центра инерции описывается системой дифференциальных уравнений.

Vol. 21, No. 02, 2018

$$dP = (a_1 u_1 - (\lambda - \mu)QR)dt + 0.5dW,$$

$$dQ = \frac{1}{\mu} (a_2 u_2 - (1 - \lambda)RP)dt + 0.5dW,$$

$$dR = \frac{1}{\lambda} (a_3 u_3 - (\mu - 1)PQ)dt + 0.5dW,$$
(3)

где $P,\,Q,\,R$ — проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции. В правых частях системы стоят моменты сил относительно этих осей. Предполагается, что моменты создаются тремя двигателями, закреплёнными на теле. Двигатели создают тяги $u_1,\,u_2,\,u_3$; плечи приложения

сил
$$a_1$$
, a_2 , a_3 . Значения параметров и начальных данных: $\lambda = \mu = \frac{5}{6}$, $a_1 = a_3 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{5}{6}$, $t_1 = 1$.

В момент времени $t_0=0$ тело вращается: начальное положение описывается нормально распределенными случайными величинами $P_0\sim N(24,0.2),\ Q_0\sim N(16,0.2),\ R_0\sim N(16,0.2).$

Требуется так управлять двигателями, чтобы за фиксированное время $t = t_1$ погасить угловые скорости тела: $P(t_1) = 0, Q(t_1) = 0, R(t_1) = 0$.

При этом необходимо минимизировать функционал:

$$J = M \left\{ \int_{t_0}^{t_1} (|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|) dt + 100 \cdot (P^2(t_1) + Q^2(t_1) + R^2(t_1)) \right\}. \tag{4}$$

Последнее слагаемое отвечает за штраф при невыполнении терминальных условий. Ищется управление, зависящее от изменяемого набора координат вектора $(P,Q,R)^T$, где $x_1=P,\ x_2=Q,\ x_2=R.$

На рис. 1 представлены программные управления и проекции угловой скорости, найденные И.А. Крыловым [11] для заданного начального состояния $P(t_0) = 24$, $Q(t_0) = R(t_0) = 16$. Минимальное значение функционала: I = 169,42.

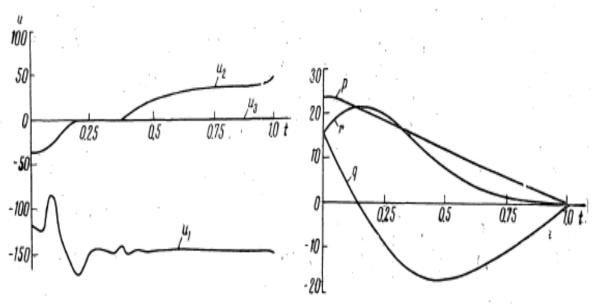


Рис. 1. Решение, полученное с помощью метода локальных вариаций [11] **Fig. 1.** Solution received by means of local variations

В табл. 1 приведены результаты решения задачи, полученные для различных конфигураций управления.

Таблица 1Table 1Результаты работы методаResults of method work

	Значение $J[u^*]$ (полиномы Лежандра)	Значение $J[u^*]$ (косинусоиды)
$L_0 = 2, L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 1 \rightarrow u(t)$	171,0022	170,0171
$L_0 = 3, L_1 = 2, L_2 = 1, L_3 = 1 \rightarrow u(t, x_1)$	170,3378	169,9011
$L_0 = 3, L_1 = 1, L_2 = 2, L_3 = 1 \rightarrow u(t, x_2)$	169,2100	169,3032
$L_0 = 3, L_1 = 1, L_2 = 1, L_3 = 2 \rightarrow u(t, x_3)$	169,5008	169,055
$L_0 = 3, L_1 = 2, L_2 = 2, L_3 = 1 \rightarrow u(t, x_1, x_2)$	168,4404	168,2996
$L_0 = 3, L_1 = 2, L_2 = 1, L_3 = 2 \rightarrow u(t, x_1, x_3)$	168,3202	168,9039
$L_0 = 3, L_1 = 1, L_2 = 2, L_3 = 2 \rightarrow u(t, x_2, x_3)$	168,4399	168,3319
$L_0 = 3, L_1 = 2, L_2 = 2, L_3 = 2 \rightarrow u(t, x_1, x_2, x_3)$	168,5033	167,9779

На рис. 2 изображены некоторые управления и соответствующие им траектории.

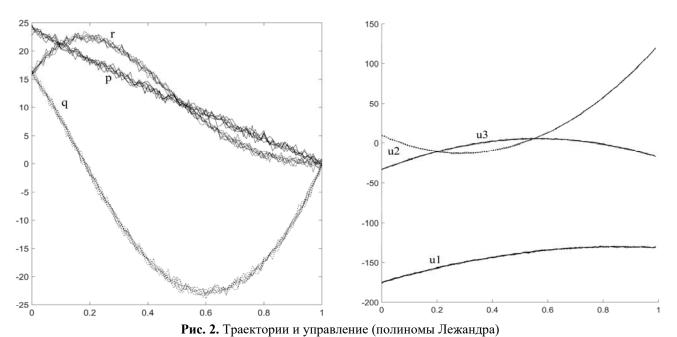


Fig. 2. Trajectories and management (Legendre polynomial)

Vol. 21, No. 02, 2018

По данным табл. 1 видно уменьшение значения функционала с ростом количества компонент, по которым имеется полная информация, т. е. управление с полной и неполной обратной связью более эффективно, чем программное управление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен гибридный меметический алгоритм и соответствующее программное обеспечение для решения задач поиска оптимального в среднем управления нелинейными стохастическими системами в условиях неполной текущей информации о координатах вектора состояния. Эффективность алгоритма продемонстрирована на примере задачи о стабилизации спутника. Сравнение с результатами, полученными с помощью других методов поиска оптимального управления, показало эффективность меметического алгоритма, позволяющего находить решение, близкое к оптимальному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
- **2. Пантелеев А.В., Семенов В.В.** Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 1992.
- **3. Пантелеев А.В.** Вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2006.
- **4. Kushner H.J., Dupuis P.G.** Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer, 2001.
- **5. Bertsekas D.P.** Dynamic Programming and Optimal Control. Cambridge: Athena Scientific, 2013.
- **6. Флеминг У., Ришел Р.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.
- **7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012.
- **8. Moscato P.** On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms // Caltech Concurrent Computation Program (report 826). 1989.
- **9.** Пантелеев А.В., Письменная В.А. Применение меметического алгоритма в задаче оптимального управления пучками траекторий нелинейных детерминированных систем с неполной обратной связью // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 1–12.
- **10. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алешина Е.А.** Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013.
- **11. Крылов И.А.** Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника // Вычислительная математика и математическая физика. 1968. № 8 (1). С. 284–291.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), avpanteleev@inbox.ru.

Пановский Валентин Николаевич, ассистент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), panovskiy.v@yandex.ru.

Civil Aviation High Technologies

APPLICATION OF HYBRID MEMETIC ALGORITHM IN OPTIMAL CONTROL NONLINEAR STOCHASTIC SYSTEMS WITH INCOMPLETE FEEDBACK PROBLEMS

Andrei V. Panteleev¹, Valentin N. Panovskiy¹

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR) grant № 16-07-00419 A

ABSTRACT

The application of hybrid memetic algorithm of global constrained optimization in the search optimal control of nonlinear stochastic systems problem is researched in the paper. The suggested approach is based on control parametrization, which gives an opportunity to reduce the search optimal control problem to nonlinear programming problem. The global optimization memetic algorithm is suggested to solve the nonlinear programming problem. The term "memetic algorithms" is wildly used to denote method, which is based on evolutional, cultural-evolutional or another approach, that uses notions like population and individual learning process or other local improvement procedure to determine global extremum. In the developed algorithm the cultural evolution component is implemented by means of the solution of sub-task optimization using ant colony method or simulated annealing algorithm. Herewith mems (unit of cultural information) are used to generate perfect individual. Several alternative forms of parametrization are considered: in the form of expansion by Legendre polynomials system and in the form of cosine-waves. The efficiency of the proposed algorithms was analyzed by means of created software complex. The problem of damping rotational satellite motion by means of installed engine was solved as the example. Verification of obtained results using the solution detected with local variations method was done. The described results show the sufficient efficiency level and reflect the necessity of further research in this direction.

Key words: optimal control, global extremum, nonlinear stochastic system, incomplete feedback, memetic algorithms, satellite stabilization.

REFERENCES

- 1. Panteleev A.V., Rudenko E.A., Bortakovskii A.S. Nelineinye sistemy upravleniya: opisanie, analiz i sintez [Nonlinear Control Systems: Description, Analysis and Synthesis]. M.: Vuzovskaya kniga Publ., 2008. (in Russian)
- **2. Panteleev A.V., Semenov V.V.** Sintez optimalnykh sistem upravleniia pri nepolnoi informatcii [Synthesis of Optimal Systems of Control under Incomplete Informational Conditions]. M.: MAI Publ., 1992. (in Russian)
- **3. Panteleev A.V.** *Variatsionnoe ischislenie v primerakh i zadachakh* [Variation computation in Examples and Tasks]. M: Vysshaya shkola Publ., 2006. (in Russian)
- **4. Kushner H.J., Dupuis P.G.** Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer, 2001.
- **5. Bertsekas D.P.** Dynamic Programming and Optimal Control Cambridge: Athena Scientific, 2013.
- **6. Fleming W., Rishel R.** Optimalnoe upravlenie determinirovannymi i stokhasticheskimi sistemami [Optimal Control of Deterministic and Stochastic Systems]. M.: Mir Publ., 1978. (in Russian)
- 7. Panteleev A.V., Rybakov K.A. Metody i algoritmy sinteza optimal'nykh stokhasticheskikh sistem upravleniya pri nepolnoi informatsii [Methods and Algorithms of Synthesis for Optimal Stochastic Systems of Control under Incomplete Informational Conditions]. M: MAI Publ., 2010. (in Russian)

- **8. Moscato P.** On Evolution, Search, Optimization, Genetic Algorithms and Martial Arts: Towards Memetic Algorithms // Caltech Concurrent Computation Program (report 826), 1989.
- 9. Panteleev A.V., Pis'mennaya V.A. Primenenie memeticheskogo algoritma v zadache optimalnogo upravleniya puchkami traektoriy nelineynyh determinirovannyh sistem s nepolnoy obratnoy svyazyu [Application of a Memetic Algorithm for the Optimal Control of Bunches of Trajectories of Nonlinear Deterministic Systems with Incomplete Feedback]. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Journal of Computer and Systems Sciences International], 2018, No 1, pp. 1–12. (in Russian)
- 10. Panteleev A.V., Metlitskaya D.V., Aleshina E.A. Metody globalnoi optimizatcii. Metaevristicheskie strategii i algoritmy [Methods of Global Optimization. Metaheuristic Strategies and Algorithms.] Moscow: Vuzovskaia Kniga Publ., 2013. (in Russian)
- 11. Krylov I.A. Chislennoye resheniye zadachi ob optimalnoy stabilizatsii sputnika [Numerical solution of Satellite Optimal Stabilization Problem]. Vychislitelnaia matematika i matematicheskaia fizika [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1968, No. 8 (1), pp. 284–291. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Andrei V. Panteleev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Mathematics and Cybernetics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), avpanteleev@inbox.ru.

Valentin N. Panovskiy, Assistant of Professor, Mathematics and Cybernetics Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), panovskiy.v@yandex.ru.

 Поступила в редакцию
 15.10.2017
 Received
 15.10.2017

 Принята в печать
 14.03.2018
 Accepted for publication
 14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК 681.140

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-71-82

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ВЕСОВ В ИНДЕКСНЫХ ПОРТФЕЛЯХ В СТРАТЕГИЯХ ПОСТОЯННОЙ ПРОПОРЦИИ

IO.Ф. КАСИМОВ 1 , М.И. ТИМЕРБАЕВ 1

 $^{I}\Phi$ инансовый университет при Правительстве Р Φ , г. Москва, Россия

Работа посвящена анализу оптимальных индексных портфелей в стратегиях постоянной пропорции. Такие, или как их еще часто называют пассивные стратегии, получают все большее распространение в России и за рубежом. Они существенно дешевле в реализации, чем активные стратегии. Кроме того, как показывает практика, в долгосрочной перспективе они оказываются более выгодными и менее рискованными. Основным моментом в этих стратегиях является выбор пропорции, в которой инвестор распределяет свой капитал между рисковыми и безрисковыми активами. При этом в стратегиях постоянной пропорции она остается постоянной в течение всего инвестиционного периода. Для этого инвестор с определенной частотой восстанавливает требуемое соотношение между рисковыми и безрисковыми активами. Каждый период, в начале которого происходит такое восстановление, называется периодом ребалансирования. В случае стратегий с индексными портфелями, рисковыми активами являются паи индексного фонда, а безрисковыми депозит в надежном банке или государственные облигации. Для инвестора желателен оптимальный выбор пропорции, гарантирующий максимальный рост капитала портфеля за инвестиционный период. В работе на основе исторических данных (ex-post) определяются оптимальные веса фондов в индексных портфелях. Рассмотрены реализации индексных портфелей для пяти наиболее крупных российских индексных фондов. По данным о ежедневных стоимостях паев этих фондов и годовых процентных ставках за 11-летний период, с помощью специально разработанной программы, были найдены оптимальные веса индексных фондов в портфелях постоянной пропорции. Параметрами анализируемых портфелей являлись: длина инвестиционного периода (от года до 10 лет) и частота ребалансирования (месяц, квартал, год). Для каждого фонда определялась последовательность оптимальных весов с заданной частотой ребалансирования и соответствующие оптимальные доходности за последовательные инвестиционные периоды. Было обнаружено, что практически во всех случаях оптимальные веса фондов принимали экстремальные значения 0 или 1. При этом частоты этих значений в выбранной последовательности примерно одинаковы. Этот эмпирический факт можно условно назвать принципом экстремальности или принципом «все или ничего».

Ключевые слова: пассивное инвестирование, стратегии постоянной пропорции, индексы, индекс ММВБ, индексные портфели, оптимальные веса.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в практике инвестирования используются два основных вида стратегий: активные и пассивные. Активные стратегии предполагают постоянный анализ состояния рынка, прогнозирование цен (доходностей) активов и перестройку портфеля (покупку/продажу) активов. Такие стратегии весьма дорогие (комиссии, плата за получение, обработку и анализ информации и, собственно, за управление).

Пассивные (индексные) стратегии заключаются в копировании индекса [1–3]. Такие стратегии систематически реализуют так называемые индексные фонды, аккумулирующие средства инвесторов (вкладчиков фонда) и инвестирующие их в широко диверсифицированный рыночный портфель активов. Как правило, представителем рыночного портфеля является некоторый фондовый индекс. На Западе это такие индексы, как S&P500, Russel 1000 и др. В России это прежде всего индексы ММВБ и, в меньшей степени, РТС. Индексный портфель копирует какой-либо индекс в том смысле, что веса активов в индексном портфеле соответствуют весам этих активов в индексе. Для капитализированных индексов, таких как S&P500 и ММВБ, вес акции в индексе просто равен ее доли в общей рыночной капитализации [1].

Индексные фонды в последнее время получают все большее признание как частных, так и институциональных инвесторов. Это обусловлено рядом факторов: во-первых, их инвестици-

онные стратегии прозрачны и понятны практически любому инвестору, во-вторых, они существенно дешевле активных стратегий, поскольку отсутствуют расходы, связанные с активным управлением. Единственные затраты – комиссия и общие расходы фонда, реализующего такую стратегию (услуги депозитария, расходы на поддержку структуры портфеля и т. п.). В-третьих, и это самое главное, как показывают многочисленные многолетние исследования, в долгосрочной перспективе оказывается, эти стратегии являются более доходными и менее рискованными. Толчком к появлению и распространению таких стратегий было создание в 60–70-х годах XX века группой американских экономистов (Тобин, Шарп, Моссин и др.) так называемой Модели оценивая финансовых активов или САРМ в английской аббревиатуре (Capital Asset Price Model) [4, 6].

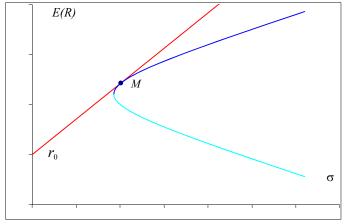


Рис. 1. Диаграмма САРМ. Касательная – эффективная граница Тобина – Шарпа (CML – Capital Market Line)

Fig. 1. Graph of CAPM. Tangent line - Tobin-Sharp efficient frontier

Первое уравнение САРМ (уравнение прямой СМL) связывает доходность и риск (стандартное отклонение доходности) эффективных (т. е. неулучшаемых *одновременно* по критериям риска и доходности) портфелей.

$$E(R_{\pi}) = r_0 + \frac{E(R_M) - r_0}{\sigma_M} \sigma_{\pi}$$
 (1)

Здесь r_0 — безрисковая доходность, $E(R_\pi)$ и $E(R_M)$ — *ожидаемые* доходности портфеля π и рыночного портфеля M.

Второе уравнение САРМ выполняется для любого портфеля (в том числе состоящего и из одного актива) и имеет вид

$$E(R_{\pi}) = r_0 + \beta_{\pi} (E(R_M) - r_0), \tag{2}$$

где β_{π} — так называемая бета портфеля (или актива) — мера систематического риска *любого* портфеля:

$$\beta_{\pi} = \frac{\text{cov}(R_{\pi}, R_M)}{\sigma_M^2}.$$
 (3)

Civil Aviation High Technologies

В рамках модели САРМ Тобин доказал свою знаменитую теорему о двух фондах. Любой эффективный, и значит оптимальный по доходности или риску, портфель π есть комбинация безрискового актива с весом w_0 и рыночного портфеля M с весом w_M . При этом доходность такого портфеля будет равна [5]

$$r_{\pi} = W_0 r_0 + W_M r_M \,, \tag{4}$$

а риск

$$\sigma_{\pi} = W_M \sigma_M \,. \tag{5}$$

Теорема Тобина о двух фондах сыграла важную роль в инвестиционном бизнесе. Стало ясно, что если создать хорошо диверсифицированный фонд, размещающий капитал в широкий спектр активов, то проблема оптимального построения портфеля для любого инвестора сведется просто к выбору *оптимальной* для данного инвестора пропорции между его *безрисковой* и *рисковой* (рыночной) частью, т. е. к определению двух весов w_0 и w_M , связанных очевидным соотношением: $w_0 + w_M = 1$. На практике такими фондами и стали как раз индексные фонды.

Но остается проблема выбора этих весов. Исходя из предложенной Марковицем функции полезности [4, 7],

$$U(\pi) = E(R_{\pi}) - \frac{\theta}{2}\sigma^{2}(R_{\pi}), \tag{6}$$

где θ — так называемый коэффициент неприятия риска, Тобин доказал свою знаменитую формулу для веса фонда в портфеле максимальной полезностью [6]:

$$w_M = \frac{r_M - r_0}{\theta \sigma_M^2} \,. \tag{7}$$

Но неизвестно, как на практике инвестор может оценить свой коэффициент неприятия риска θ. Кроме того, формула Тобина (7) определяет оптимальный вес в *однопериодной* сделке. На практике, естественно, более распространены многопериодные сделки, когда инвестор меняет структуру портфеля, дополнительно вкладывает средства и т. п. Анализ многопериодных сделок существенно боле сложный, чем в однопериодном случае (см. [4, 9])

В широко распространенных стратегиях постоянной пропорции инвестор просто выбирает тот или иной уровень вложения в рисковые активы. Выбрав долю, вкладываемую в рыночный портфель (на практике это какой-либо индексный фонд), он поддерживает этот уровень постоянным в течение достаточно большого инвестиционного периода. Поскольку стоимость пая индексного фонда постоянно меняется, то меняется и пропорция вложенного в индексный фонд капитала. Для ее поддержания необходимо ребалансировать портфель, т. е. в случае роста доли фонда перевложить часть капитала, вложенного в фонд, в безрисковый актив, а в случае снижения, наоборот, за счет части капитала, вложенного в безрисковый актив (например депозит в надежном банке), купить дополнительные паи индексного фонда. Период, в начале которого осуществляется эта операция, называется периодом ребалансирования. Поскольку данные о стоимости паев индексных фондов, а следовательно и их доходности, известны, то можно смоделировать ex post стратегии вложения в фонды для разных значений пропорций на различных инвестиционных периодах и различных периодах ребалансирования.

Целью настоящей работы и было на реальных исторических данных для российских индексных фондов (на основе индекса ММВБ) определить распределение значений оптимальных весов этих фондов для широкого спектра инвестиционных горизонтов и различных периодов ребалансирования.

ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ПОСТОЯННОЙ ПРОПОРЦИИ

Рассмотрим многопериодную сделку с *п* периодами [5, 9]. Будем считать, что инвестор реализует вложения в индексный портфель с постоянной пропорцией вложения в индексный фонд и безрисковый актив. Это значит, он в *начале* каждого периода ребалансирует портфель, т. е. восстанавливает заданную пропорцию вложения. Поскольку наша цель состоит в *нахождении* оптимальной доли вложения в фонд, то вес фонда (т. е. вес рисковых активов) в портфеле обозначим через *х*. Таким образом, в начале каждого периода ребалансирования

$$w_M = x$$
, $w_0 = 1 - x$.

Пусть доходность фонда на k-м периоде равна r_f^k , а безрисковая ставка на этом периоде r_0^k . Тогда доходность портфеля на этом периоде будет равна

$$r_{\pi}^{k} = W_{0}r_{0}^{k} + W_{M}r_{f}^{k} = (1-x)r_{0}^{k} + xr_{f}^{k}$$

а коэффициент роста капитала за этот период

$$a_{\pi}^{k} = 1 + r_{\pi}^{k} = 1 + (1 - x)r_{0}^{k} + xr_{f}^{k} = (1 - x)a_{0}^{k} + xa_{f}^{k}, \tag{8}$$

где $a_0^k = 1 + r_0^k$ и $a_f^k = 1 + r_f^k$ — коэффициенты роста по безрисковому активу и фонду соответственно. Полный коэффициент роста по всем периодам (т. е. за весь инвестиционный горизонт) будет равен произведению коэффициентов роста за периоды ребалансировки:

$$a_{\pi}(x) = \prod_{k=1}^{n} a_{\pi}^{k} = \prod_{k=1}^{n} [a_{0}^{k} + x(a_{f}^{k} - a_{0}^{k})] = \prod_{k=1}^{n} a_{0}^{k} (1 + x\delta_{k}), \tag{9}$$

где $\delta_k = (a_f^k - a_0^k)/a_0^k$ — относительное превышение доходности фонда над безрисковой доходностью. Таким образом, полный коэффициент роста есть полином n-й степени от веса фонда x. Будем также считать, что инвестор не может открывать короткие позиции ни по активам фонда, ни по безрисковым активам. Иными словами, будем считать, что $0 \le x \le 1$.

Рассмотрим также логарифм полного коэффициента роста. В силу строгой монотонности логарифма, точки максимума по x коэффициента роста и его логарифма одинаковы. Покажем, что логарифм коэффициента роста — вогнутая (т. е. выпуклая вверх) функция:

$$\ln a_{\pi}(x) = \ln \left(\prod_{k=1}^{n} a_{\pi}^{k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \ln \left[a_{0}^{k} + x (a_{f}^{k} - a_{0}^{k}) \right].$$
 (10)

Civil Aviation High Technologies

Первая производная по х имеет вид

$$\left(\ln a_{\pi}(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{f}^{k} - a_{0}^{k}}{a_{0}^{k} + x(a_{f}^{k} - a_{0}^{k})},$$

а вторая

$$\left(\ln a_{\pi}(x)\right)'' = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\left(a_{f}^{k} - a_{0}^{k}\right)^{2}}{\left[a_{0}^{k} + x\left(a_{f}^{k} - a_{0}^{k}\right)\right]^{2}}.$$

С учетом того, что все слагаемые отрицательны, отсюда следует, что вторая производная всюду отрицательна, и, значит, логарифм полного коэффициента роста *строго вогнутая* функция. Строго вогнутая функция на отрезке либо возрастает, либо убывает, либо имеет единственную точку максимума, причем левее от нее она возрастает, а правее убывает. Поскольку экспонента — строго *возрастающая* функция, то этими же свойствами обладает и полный коэффициент роста:

$$a_{z}(x) = \exp(\ln(a_{z}(x))). \tag{11}$$

Следовательно, полный коэффициент роста либо строго возрастает, либо строго убывает, либо имеет единственную точку максимума внутри отрезка [0;1], и при этом он возрастает слева и убывает справа от этой точки. В общем случае, для нахождения точки максимума необходимо решать уравнение (n-1)-й степени a_{π} '(x) = 0 на отрезке [0;1], что можно сделать приближенным методом (например, «делением пополам»). В двумерном случае (для двух периодов) задачу нахождения максимума можно решить явным образом, поскольку она сводится к решению квадратного уравнения вида

$$a_{\pi}(x) = (a_0^1 + x(a_f^1 - a_0^1)(a_0^2 + x(a_f^2 - a_0^2)) = a_0^1 a_0^2 (1 + \delta_1 x)(1 + \delta_2 x),$$
(12)

где

$$\delta_1 = (a_f^1 - a_0^1)/a_0^1$$
 M $\delta_2 = (a_f^2 - a_0^2)/a_0^2$

– относительные превышения коэффициентов фонда роста над безрисковыми в первый и второй периоды ребалансировки. Тогда точка максимума полного (двухпериодного) коэффициента роста есть точка максимума квадратичной функции

$$(1 + \delta_1 x)(1 + \delta_2 x) = 1 + (\delta_1 + \delta_2)x + \delta_1 \delta_2 x^2.$$
(13)

Дифференцируя и приравнивая производную к нулю, получим

$$(\delta_1 + \delta_2) + 2\delta_1\delta_2x = 0$$
,

откуда

$$x = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\delta_1 \delta_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right). \tag{14}$$

В качестве примера рассмотрим графики зависимости коэффициента роста на отрезке для следующих исходных данных:

Vol. 21, No. 02, 2018

1) $r_0^1 = r_0^2 = 4\%$; $r_f^1 = 25\%$; $r_f^2 = -13\%$. Коэффициент роста имеет максимум в точке x = 0.5454 = 54.54%. Соответствующий график зависимости коэффициента роста от веса фонда в портфеле изображен на рис. 2;

2) $r_0^1 = r_0^2 = 4\%$; $r_f^1 = 25\%$; $r_f^2 = -9\%$. Коэффициент роста возрастает на отрезке [0; 1]. Соответствующий график зависимости коэффициента роста от веса фонда в портфеле изображен на рис. 3. Максимум достигается на правом конце отрезка [0; 1]: x = 1;

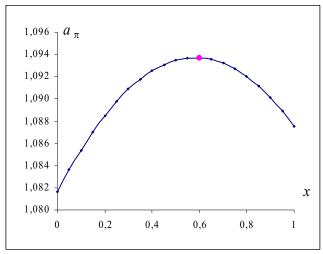


Рис. 2. График зависимости полного двухпериодного коэффициента роста от веса фонда x. Внутренняя точка максимума x = 0.58

Fig. 2. Graph of the dependence of full two-period growth coefficient on x fund weight.

The interior maximum point x = 0.58

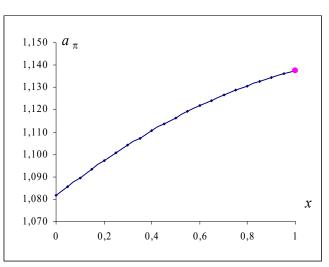


Рис. 3. График зависимости полного двухпериодного коэффициента роста от веса фонда x. Экстремальная точка максимума x = 1

Fig. 3. Graph of the dependence of full two-period growth coefficient on x fund weight.

The extreme maximum point x = 1

3) $r_0^1 = r_0^2 = 4\%$; $r_f^1 = 25\%$; $r_f^2 = -18\%$. Коэффициент роста убывает на отрезке [0; 1]. Максимум достигается на *левом* конце отрезка: x = 0. Соответствующий график зависимости коэффициента роста от веса фонда в портфеле изображен на рис. 4.

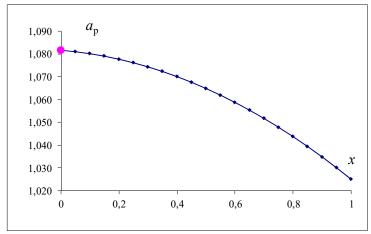


Рис. 4. График зависимости полного двухпериодного коэффициента роста от веса фонда x. Экстремальная точка максимума x=0

Fig. 4. Graph of the dependence of full two-period growth coefficient on x fund weight. The extreme maximum point x = 0

Civil Aviation High Technologies

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Как указывалось выше, целью работы являлась оценка и анализ оптимальных стратегий с индексными портфелями российских индексных фондов. В табл. 1 приведены основные характеристики некоторых наиболее известных индексных фондов.

Российские индексные фонды на индекс ММВБ Russian Index funds on MICEX

Таблица 1 Table 1

	Год создания	СЧА на 23.10.2017	Рост	R^2	Бета	Комиссия, %
Индекс ММВБ	25.02.1997		3,18	1,00	1,00	
РГС	04.03.2008	14757,09	3,82	0,98	0,95	3,00
Открытие	21.08.2007	107927,94	3,47	0,97	0,94	0,99
БКС	21.02.2005	155055,98	4,39	0,98	0,96	5,40
Максвелл	29.05.2007	14890,66	4,03	0,97	0,95	2,90
Газпромбанк	29.10.2007	105883,70	4,04	0,98	0,95	4,10
Ингосстрах	21.04.2008	33421,10	3,92	0,97	0,94	2,50
ВТБ	14.05.2004	672495,16	3,72	0,98	0,96	4,10
АКБ БАРС	28.03.2005	21797,04	3,73	0,81	0,66	4,00
Райффайзен	10.10.2007	516660,27	3,81	0,98	0,95	2,90
Альфа капитал	27.12.2006	247789,89	2,56	0,89	0,79	2,80

Для исследования были отобраны четыре самых крупных по чистой стоимости активов, работающих на рынке не менее 10 лет и «хорошо отслеживающих» индекс ММВБ (с коэффициентом детерминации R^2 и бетой близкими к 1) индексных фонда: РГС, Открытие, ВТБ, Райффайзен, и один крупный фонд Альфа-капитал с довольно низкими коэффициентами детерминации (R^2) и бетой.

В табл. 2 приведены данные о *месячных* доходностях этих фондов за 11-летний период от 21.10.2008 по 21.10.2017.

По данным о ежедневных котировках стоимости паев этих фондов за указанный период была сформирована *база данных* месячных доходностей этих фондов. Кроме того, в эту базу данных были включены данные о безрисковых ставках (годовых, полугодовых, квартальных и месячных) за этот период. Была также разработана универсальная программа, *входными данными* которой являются:

- 1) массив месячных доходностей одного из выбранных фондов за полный 11-летний период;
 - 2) период ребалансирования (месяц, квартал, полугодие, год);
- 3) последовательность инвестиционных периодов (кратных целому числу периодов ребалансирования) с началами каждой из 108 месячных дат (21.m.y) полного диапазона дат из базы данных;
 - 4) вес фонда в индексном портфеле.

На выходе программа для каждой последовательности инвестиционных периодов выдает:

1) последовательность накопленных коэффициентов роста индексного портфеля (с заданным весом фонда) для каждого инвестиционного периода, с учетом ребалансирования;

Vol. 21, No. 02, 2018

- 2) последовательность оптимальных весов фонда в портфеле постоянной пропорции;
- 3) последовательность максимальных коэффициентов роста, соответствующих оптимальным весам фонда в индексном в портфеле.

Кроме того, программа выдает статистику (графически и таблично) оптимальных весов индексных портфелей выбранного фонда для произвольных последовательностей инвестиционных периодов и периодов ребалансирования.

Таблица 2Table 2Данные о месячных доходностях фондов за период с 21.10.2008 по 21.10.2017The data on monthly yields of the funds for the period from 21.10.2008 at 21.10.2017

	ср.месяч. дох-ть, %	станд. откл., %	мин. дох-ть, %	макс. дох-ть, %	размах дох-ти, %
Индекс ММВБ	1,32	7,04	-20,78	25,39	46,17
РГС	1,62	6,94	-17,60	24,19	41,79
Открытие	1,45	7,15	-17,04	24,76	41,80
ВТБ	1,50	7,00	-17,66	25,43	43,10
Райффайзен	1,40	6,90	-15,69	25,11	40,80
Альфа-капитал	1,10	6,68	-19,00	21,17	40,17

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Во всех рассмотренных фондах на всех инвестиционных периодах оптимальные веса индексных портфелей почти во всех случаях принимают экстремальные значения: 0 или 1! Промежуточные значения встречаются исключительно редко. Для всех фондов и инвестиционных периодов, графики полных коэффициентов роста практически всегда имеют вид показанный на рис. 3 и 4, т. е. они всегда монотонно зависят от веса фонда. Зависимость типа изображенной на рис. 1 с внутренней точкой максимума встречается очень редко. Ниже, на рис. 5, приведен график оптимальных весов индексных портфелей фонда ВТБ для 106 годовых периодов с ежеквартальным ребалансированием. На рисунке отчетливо видно существенное преобладание крайних (экстремальных) значений оптимальных весов фонда. Внутренним для отрезка [0; 1] точкам максимума соответствуют всего 8 значений из 106. При этом нулевому значению оптимального веса (полное вложение в безрисковый актив) соответствует полное вложение капитала портфеля в безрисковый актив, а единичное значение — полному вложению капитала портфеля в индексный фонд. Поэтому принцип оптимальности весов индексных портфелей можно назвать (условно) принципом «все или ничего».

Естественно, возникает вопрос, в какой степени этот результат зависит от реальной статистики доходностей фондов, а в какой от вида (математической формы) оптимизируемой функции. Разобранный выше двумерный случай говорит о том, что оба фактора вносят свой вклад в полученный результат. Проведенное авторами моделирование для различного вида последовательностей (коэффициентов δ_k) приводит к такому же результату. В общем случае корни производной функции полного роста очень чувствительны к изменению коэффициентов δ_k , что приводит к их значительному разбросу по вещественной оси, и лишь их малая доля попадает в единичный интервал (0; 1).

На рис. 6 приведен график годовых коэффициентов роста для оптимальных и равновзвешенных (50/50) индексных ВТБ-портфелей для 106 годовых периодов с ежеквартальным ребалансированием.

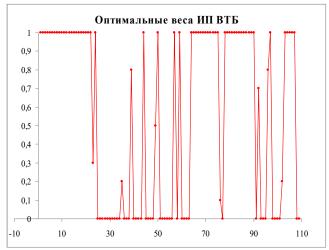


Рис. 5. График оптимальных весов фонда ВТБ в индексном портфеле для годовых периодов инвестирования с ежеквартальным ребалансированием Fig. 5. Graph of the VTB-Fund optimal weights in the index portfolio for annual investing periods with quarterly rebalancing

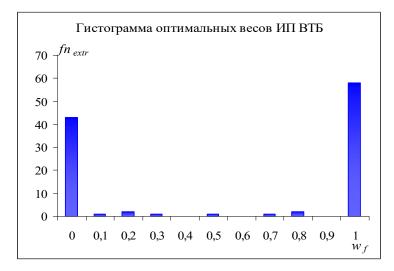


Рис. 7. Гистограмма оптимальных весов фонда ВТБ в индексном портфеле для годовых периодов инвестирования с ежеквартальным ребалансированием Fig. 7. The histogram of the optimal weights of the VTB fund in the index portfolio for annual periods of investment with quarterly rebalancing

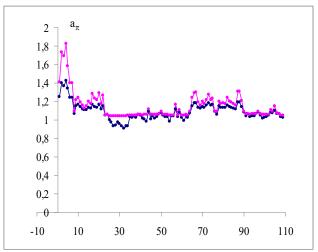


Рис. 6. График годовых коэффициентов роста оптимальных и равновзвешенных портфелей ВТБ для годовых периодов инвестирования с ежеквартальным ребалансированием Fig. 6. Graph of annual growth rates of optimal and equally weighed VTB-portfolios for annual investment periods with quarterly rebalancing

На графике рис. 6 видно, что оптимальный портфель практически нигде не дает отрицательных доходностей, т. к. при падении доходности индекса ниже процентной ставки оптимальным становится портфель с полным вложением в безрисковый актив. На рис. 7 изображена гистограмма оптимальных весов фонда в индексных портфелях фонда ВТБ для 106 годовых периодов с ежеквартальным ребалансированием 43 случая.

Аналогичные результаты получены для всех фондов и всех периодов инвестирования. Конечно, конкретные значения коэффициентов роста меняются от фонда к фонду и зависят от точности копирования индекса (близости коэффициентов R^2 и беты к единице), комиссии, взимаемой фондом,

и др. Но общая картина *распределения оптимальных весов* во всех случаях одна и та же. Аналогична она и в случае «идеального» индексного портфеля, когда в качестве рыночной (рисковой) доходности берется непосредственно доходность индекса ММВБ.

В табл. 3. приведено частотное распределение оптимальных весов для индексных портфелей фондов ВТБ, Открытие, Райффайзен и РГС для годовых инвестиционных периодов с ежеквартальным ребалансированием. Значения и частоты экстремальных весов выделены жирным шрифтом.

Таблица 3 Table 3

Частотное распределение оптимальных весов индексных фондов The frequency distribution of the optimal index funds weight

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
РГС	36	1	0	2	2	2	0	1	1	0	64
Открытие	38	1	0	1	3	1	2	0	2	1	60
ВТБ	43	1	2	1	0	1	0	1	2	0	58
Райффайзен	43	1	2	1	0	1	0	1	2	0	58
Альфа-капитал	46	1	0	0	1	1	2	0	1	1	56

Этот результат показывает, что, строго говоря, стратегия постоянной пропорции с весом вложения в индекс отличным от 0 и 1 практически не бывает оптимальной. Но это не означает практическую нецелесообразность применения стратегии постоянной пропорции. Наше исследование основано на использовании прошлых (исторических) данных. При планировании структуры портфеля для будущих инвестиционных периодов заранее невозможно предсказать, каким будет оптимальное значение веса фонда в портфеле. И выбор веса фонда в соответствии с профилем риска инвестора на практике дает пусть и не оптимальное, но приемлемое значение доходности стратегии в целом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ оптимальных стратегий постоянной пропорции с российскими индексными фондами на индекс ММВБ выявил интересный эмпирический результат, который мы назвали свойством экстремальности оптимальных значений весов индексных фондов в портфелях, реализующих стратегию постоянной пропорции. Оказалось, что для всех исследованных фондов, для всех инвестиционных периодов и периодов ребалансирования оптимальными весами фондов в таких портфелях являются экстремальные значения 0 или 1. Частично это можно объяснить тем, что область допустимых весов фондов из-за запрета коротких позиций представляет собой отрезок [0;1], поэтому точки максимума полного коэффициента, не попадающие в этот отрезок, редуцируются к его крайним значениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Исаакман М. Как инвестировать в индексы. М.: Альпина, 2003. 365 с.
- 2. Богл Дж. Руководство разумного инвестора. М.: Вильямс, 2010. 182 с.
- **3. Wild R.** Index Investing for Dummies. Wiley, 2009. 338 p.
- **4. Буренин А.Н.** Управление портфелем ценных бумаг. М.: ВТО им. С.И. Вавилова, 2015. 452 с.
- **5. Касимов Ю.Ф., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н.** Основы финансовых вычислений. Основные схемы расчета финансовых сделок: учебник для вузов. М.: Кнорус, 2017. 327 с.
- **6. Касимов Ю.Ф., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н.** Основы финансовых вычислений. Портфели активов, оптимизация и хеджирование: учебник. М.: Кнорус, 2017. 356 с.
 - **7. Боди 3., Маркус А., Кейн А.** Инвестиции. М.: Олимп Бизнес, 2013. 994 с.
 - 8. Bell S. Quantitative Finance For Dummies. Willey, 2016. 410 p.
 - **9. Rasmussen M.** Quantitative Portfolio Optimization. Palgrave, 2003. 442 p.
- **10. Michaud R.O.** Efficient Asset Management A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. Oxford: University Press, 2008. 130 p.

Civil Aviation High Technologies

СВДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Касимов Юрий Федорович, доцент кафедры прикладной математики Финансового университета при Правительстве РФ, у.f.kasimov@mail.ru.

Тимербаев Марсель Илдусович, студент 4-го курса Факультета международных экономических отношений Финансового университета при Правительстве РФ, timerbayevgroup@yandex.ru.

THE EXTREME WEIGHTS IN THE INDEX PORTFOLIO OF CONSTANT-PROPORTION STRATEGIES

Yury F. Kasimov¹, Marcel I. Timerbaev¹

¹Financial University under The Government of Russian Federation, Moscow, Russia

ABSTRACT

This paper analyzes the optimal of constant proportion index portfolio strategies. They are also called passive strategies which are becoming more common in Russia and abroad. They are significantly cheaper to implement than active strategies. In addition, as practice shows, in the long term they are more profitable and less risky. The main problem in these strategies is the choice of the proportions in which the investor allocates his capital between risky and risk-free assets. In constant proportion index portfolio the weight of risk asset remains constant throughout investment period. For this purpose, the investor with a certain frequency restores the desired balance between risky and risk-free assets. Each period at the beginning of which such recovery occurs is called the re-balancing period. In the case of strategies with index portfolios, risky assets are the shares of the index fund, and risk-free assets are the deposits in reliable bank or government bonds. According on the daily value of units of these funds and the annual interest rate for the 11-year period, using a specially developed program optimal weight index funds in the portfolios has been found. Parameters of the analyzed portfolios are: length of the investment period (from one year to 10 years) and the frequency of weight rebalancing (month, quarter, year). The sequence of optimal weights and the corresponding optimum yield for consecutive investment periods with a specified frequency of re-balancing were determined for each fund. It was found that in almost all cases, the optimal weights of fund equals the extreme values 0 or 1. Also, the frequencies of these values in the selected sequence is about the same for all funds. This empiric fact can be conventionally called the principle of extremeness or "all or nothing" principle.

Key words: passive investment strategy; constant proportion strategy, indices, index portfolios, the optimal index weights.

REFERENCES

- **1. Isaakman M**. *Kak investirpovat' v indeksy* [How to be an Index investor]. M.: Alpina, 2003, 365 p. (in Russian)
- **2. Bogle J.C.** The little book of common sense investing. Williams Publ. house, 2010, 182 p. (in Russian)
 - **3. Wild R.** Index Investing for Dummies. Wiley, 2009, 338 p.
- **4. Burenin A.N.** *Upravlenie portfelem tsennih bumag* [Investment portfolio management]. M.: Vavilov Scientific and Technical society, 2015, 452 p. (in Russian)
- **5. Kasimov Yu.F., Al-Nator M.S., Kolesnikov A.N.** *Osnovy finansovyh vychisleniy. Osnovniye shemy rascheta finansovyh sdelok: uchebnik dla vuzov* [Fundamentals of financial calculations. The basic schemes of financial transactions calculation. A text-book for Higher School]. M.: Knorus, 2017, 327 p. (in Russian)
- 6. Kasimov Yu.F., Al-Nator M.S., Kolesnikov A.N. Osnovy finansovyh vychysleniy. Portfeli aktivov, optimizatsiya i hedzhirovanie [Fundamentals of financial calculations. Portfoli-

Vol. 21, No. 02, 2018

os of assets. Portfolio optimization, bonds and hedging. A text-book]. M.: Knorus, 2017, 356 p. (in Russian).

- 7. Bodie Z., Kane A., Marcus A.J. *Investitsii* [Investments]. M.: Olymp.-Business, 2013, 994 p.
 - **8. Bell S.** Quantitative Finance For Dummies. Willey, 2016, 410 p.
 - 9. Rasmussen M. Quantitative Portfolio Optimization. Palgrave, 2003, 442 p.
- **10. Michaud R.O.** Efficient Asset Management A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. Oxford: University Press, 2008, 130 p.

INFORMAITION ABOUT THE AUTHORS

Yury F. Kasimov, Associated Professor of Applied Mathematics Chair of Financial University under the Government of Russian Federation, y.f.kasimov@mail.ru.

Marcel I. Timerbaev, Student of International Relations Faculty of Financial University under The Government of Russian Federation, timerbayevgroup@yandex.ru.

Поступила в редакцию	14.09.2017	Received	14.09.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК: 629.735.015:681.3

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-83-95

ОЦЕНКА ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ В ЗАДАЧЕ СОВМЕСТНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПОТОКОВ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

И.Е. ЖИЛЬЦОВ¹, А.К. МИТРОФАНОВ², Л.Е. РУДЕЛЬСОН¹

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия

Авиатранспортные системы традиционно находятся на передовых рубежах науки и техники. Инженерные достижения внедряются при проектировании и эксплуатации воздушных судов, обустройстве аэродромов и воздушных трасс, совершенствовании радиотехники. Для повышения экономической эффективности поставщики воздушных перевозок повышают пропускную способность воздушного пространства. Эксперты Международной организации гражданской авиации (ИКАО) планируют к 2025 г. утроить достигнутые количественные показатели как на основе растущего научно-технического потенциала, так и с помощью улучшения организации воздушного движения. Технически такой скачок подготовлен развитием спутниковой навигации, но требует обновления правил производства полетов. Этот пробел восполнен в руководящих документах ИКАО, где разработана технология, гарантирующая нужные показатели пропускной способности на основе оперативного взаимодействия специалистов в масштабе всего объема пространства (совокупности так называемых «горизонтов планирования»). В настоящее время отсутствует аналитический аппарат для оптимального выбора рациональной реализации новых технологий, известны лишь универсальные средства (например, комплексы имитационного моделирования авиационных систем). В данной статье обсуждаются родственные модели процессов управления полетами и получены оценки пропускной способности с учетом приоритетности выполняемых рейсов. Каждому рейсу ставится в соответствие государственный приоритет его обслуживания, который может изменяться в зависимости от развития воздушной обстановки (бедствие на борту, опасные атмосферные явления, отказы техники и т. д.). Задача оценки пропускной способности взаимодействующих горизонтов планирования анализируется на модели многоканальной системы с приоритетами. Каждый горизонт планирования является каналом обслуживания, выполняющим функции организации потоков движения, реструктуризации пространства и процесса управления на своей территории, а также поддержания целостности информации во взаимодействующих горизонтах. Критериями оценки предлагаются хорошо зарекомендовавшие себя на практике показатели среднего времени ожидания обслуживания и вероятности отказа, под которым понимаются такие события, как направление борта на запасной аэродром, уход на второй круг, задержка вылета и другие существенные отклонения от сбалансированного суточного плана использования воздушного пространства.

Ключевые слова: организация воздушного движения, использование воздушного пространства, модели горизонтов планирования, дисциплины обслуживания с приоритетами, формирование потоков самолетов.

ВВЕДЕНИЕ

Инвестиционная привлекательность авиатранспорта обеспечивает отрасли приток капитальных вложений и продвигает ее на передовые рубежи науки и техники. Инженерные достижения внедряются при проектировании и эксплуатации воздушных судов (ВС), обустройстве аэродромов и воздушных трасс, совершенствовании радиотехники. Для достижения максимальной экономической эффективности поставщики воздушных перевозок повышают пропускную способность воздушного пространства (ВП). Эксперты Международной организации гражданской авиации (ИКАО, англ. International Civil Aviation Organization – ICAO) планируют к 2025 г. утроить достигнутые количественные показатели как на основе научно-технического потенциала, так и с помощью улучшения организации воздушного движения (ОрВД).

Термин ОрВД [1] определяет комплекс мероприятий по оперативной оптимизации структуры ВП, а также процессов формирования и обслуживания потоков самолетов. Поначалу развитие ОрВД шло экстенсивно: для повышения пропускной способности системы объемы ВП

 $^{^{2}}$ Московский центр автоматизации управления воздушным движением, г. Москва, Россия

Vol. 21, No. 02, 2018

секторов управления воздушным движением (УВД) делили на части, отчего нагрузка на каждого диспетчера снижалась и освобождалось его время для принятия взвешенных решений. Этот путь исчерпал себя в конце 50-х годов, но именно тогда в обиход вошли средства вычислительной техники и начался бум автоматизации УВД. Все рутинные операции перекладывались на компьютеры, и до 90-х годов XX века заявленная пропускная способность ВП удовлетворяла спрос на авиаперевозки пассажиров и грузов. Однако на рубеже тысячелетий возросшие потребности в услугах гражданской авиации (ГА) вновь привели к необходимости увеличения пропускной способности ВП. Технически они были подготовлены развитием спутниковой навигации, однако не подкреплялись обновлением правил ОрВД. Этот пробел восполнен экспертами ИКАО в руководящих документах [2–5], где разработаны процедуры, обеспечивающие требуемые показатели пропускной способности ВП. В качестве основного инструмента измерения координат ВС, а также взаимодействия бортового и наземного сегментов полной системы УВД предлагается технология вещательного автоматического зависимого наблюдения (АЗН-В). Считается, что к моменту реализации этих процедур известные недостатки технологии будут устранены.

В настоящее время в научных исследованиях используют, как правило, возможности и методы имитационного моделирования (например, комплексы имитационного моделирования авиационных систем [6]), аналитические же подходы, к сожалению, еще не получили достаточного развития для их практического применения [7]. В данной статье обсуждаются родственные модели процессов обслуживания ВС и получены оценки пропускной способности с учетом приоритетности выполняемых рейсов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В области исследований, относящихся к техническим наукам, методологию развития определяют эксперты высшей квалификации в той предметной области, ради совершенствования которой привлекаются представители компьютерных наук. В сфере воздушного транспорта это упомянутые выше аналитики ИКАО. Отправным пунктом предложений по утроению пропускной способности ВП служат возросшие инструментальные возможности точного определения местоположения ВС, совершающих полеты. Традиционные средства радиолокационного сопровождения на воздушных трассах измеряют координаты самолетов с погрешностью 600 м по высоте и дальности, 3 мин. по азимуту. Спутниковая навигация дает точность 2,5–15 м.

Для повышения пропускной способности уже в начале XXI века было предложено вновь «уплотнить» ВП, теперь по вертикали. Точность новых средств наблюдения обеспечила успех внедрения. Была разработана концепция сокращенных минимумов вертикального эшелонирования, реализованная на международных трассах. Следующий шаг — «уплотнение» ВП по горизонтали, т. е. полеты ГА по так называемым «свободным траекториям», а не только по воздушным трассам. Авиалинии оснащены радиосвязным и навигационным оборудованием, охвачены сплошным полем радиолокационного наблюдения, что обеспечивает устойчивое УВД. Новые средства наблюдения могут сопровождать ВС в любой точке планеты.

Действующая технология ОрВД основана на установленной Федеральным законом структуре ВП, опубликованной [8] Центром аэронавигационной информации (ЦАИ) и доступной любым пользователям (эксплуатантам), а также на правилах обслуживания [9] и организации потоков воздушного движения (ОПВД) [10]. В обычных условиях, когда коэффициент загрузки диспетчера (отношение времени активных действий в течение смены к ее длительности) ниже 0,7; когда самолеты «гуськом» движутся по «ниточкам» трасс; когда отсутствуют опасные явления погоды, ограничения ВП и подобное, наземные органы четко выполняют свои обязанности и поддерживают бесконфликтное, регулярное и экономичное воздушное движение. Однако при изменении условий выполнения полетов, т. е. при отказах техники, погодных ката-

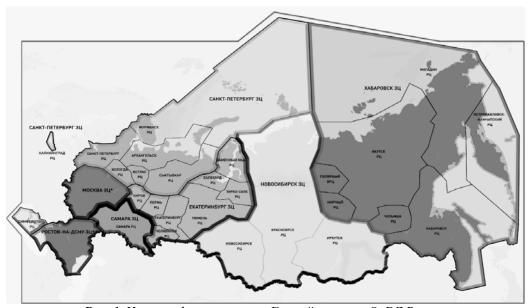
клизмах, потенциально конфликтных ситуациях и других чрезвычайных событиях, безмятежное развитие воздушной обстановки нарушается, особенно вблизи аэродромов с высокой интенсивностью полетов. Как следствие, образуются очереди ожидания вылета и посадки, а транзитные рейсы направляются по обходным маршрутам.

В [2–5] предлагается совместное оперативное принятие решений по улучшению неблагоприятной воздушной обстановки группой специалистов в области ОрВД, объединенных «духом сотрудничества», с целью повышения эффективности полетов (по критерию безопасности при ограничениях на экономичность и регулярность). В этом «сообществе» представлены аналитики (разбор полетов); метеорологи; плановики, выполняющие планирование использования воздушного пространства (ПИВП) и формирование потоков ВС; авиадиспетчеры и пилоты, совершающие полеты в их секторах и под их управлением. Вводится понятие «горизонт планирования», используемое в пространственном и временном аспектах. В первом аспекте — это работа «сообщества», нацеленная на распределение каждого ВС по времени, месту и высоте, т. е. выбору маневра, расчету, согласованию, утверждению в рамках совместного обсуждения результата и его выполнению в каждой точке траектории в каждом затрагиваемом объеме ВП. Второе значение термина — это заблаговременное изучение тенденций загруженности (потребность в полетах и ограничения, сведения о пропускной способности и ресурсах) каждого «горизонта планирования», развития его технической оснащенности, изменения структуры ВП.

Возникает задача разработки математического аппарата для оценки пропускной способности ВП с учетом приоритетности рейсов. Для наглядности начнем с популярных представлений потока ВС распределением Пуассона с эрланговским временем их обслуживания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Концептуальное представление об организации планирования и обслуживания потоков воздушного движения изложено в [5]. Рассмотрим схему центров ОрВД РФ [8], изображенную на рис. 1, которая содержит семь зональных и десятки районных центров (ЗЦ и РЦ) системы.



Puc. 1. Картографическая схема Единой системы ОрВД России **Fig. 1.** Cartographic diagram of the Russian Federation Unified ATM System

ВП РФ представлено здесь как мозаика ячеек разного размера (определяемого интенсивностью полетов по трассам и количеством аэродромов), расположенных вплотную друг к другу.

Vol. 21, No. 02, 2018

В первом приближении — это геометрическая интерпретация термина «горизонты планирования». Формирование потоков ВС начинается с составления сезонного расписания (на полугодие). Далее, за неделю до дня выполнения полетов, наступает стратегический этап, когда принимаются меры по нейтрализации неблагоприятных явлений, которые невозможно было предвидеть в расписании (стихийные бедствия, военные учения и действия и т. д.). Накануне дня выполнения полетов вступает в силу этап предтактического планирования. В сводный план использования воздушного пространства (ИВП) включаются рейсы по дополнительным (вне расписания) заявкам владельцев ВС. В день выполнения полетов осуществляется тактический этап, на котором в каждом горизонте планирования используются меры оперативного вмешательства в процесс ОрВД при изменении условий выполнения полетов.

В [5] задачи этапов ПИВП пересмотрены. Считается, что стратегическое планирование должно включать в себя составление расписания и начинаться за несколько месяцев (и даже лет) до ввода последнего в действие. Анализ статистики использования конкретного объема ВП позволяет предвидеть вероятные события в системе и управлять ими. Предполагается, что в результате можно преобразовать существующую систему ОрВД, оперативно (по принципу обратной связи) реагирующую на неблагоприятные изменения воздушной обстановки, в систему, которая стратегически (заблаговременно) предотвращает любые возможные отклонения от норм производства полетов.

Функции этапа предтактического планирования предлагается дополнить полноценным обменом аэронавигационной информацией между пользователями (авиакомпаниями) и поставщиками услуг (персоналом системы OpBД). В процессе координации и согласования сбалансированных на стратегическом этапе сводных планов ИВП (с учетом предпочтений и возможностей как перевозчиков, так и системы) совершенствуются процедуры прогнозирования спроса на авиатранспорт и устранения конфликтов интересов между лицами, планирующими деятельность по ИВП на годы вперед (эксплуатантами), и владельцами ВС, которые больше зависят от конъюнктуры рынка и «не могут далеко заглядывать в будущее» [5]. Равноправие в доступе к информации и взаимное понимание целей партнеров помогает оценить ежедневный резерв пропускной способности ВП. Каждому рейсу присваивают, согласно [11], государственный приоритет его обслуживания, который может изменяться в зависимости от развития воздушной обстановки (бедствие на борту, опасные атмосферные явления, отказы техники и т. д.).

В такой постановке задача оценки пропускной способности взаимодействующих ЗЦ и РЦ (горизонтов планирования) может анализироваться с помощью модели многоканальной системы с приоритетами. Каждый горизонт планирования является каналом обслуживания системы ОрВД, выполняющим функции ОПВД, реконфигурации ВП и УВД на своей территории, а также поддержания целостности информации во взаимодействующих горизонтах. Начнем с дисциплины статического (жесткого) распараллеливания.

ОПОРНАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть система насчитывает n каналов обслуживания и m=n простейших входящих потоков с интенсивностью λ_i ($i=\overline{1,m}$) каждый. Каналам предоставлены собственные секции буферного накопителя (БН) объемами r_i мест для ожидания (рис. 2). Времена обслуживания распределены экспоненциально с параметрами μ_i . Загрузка каждого i-го канала меньше единицы $\rho_i = \lambda_i/\mu_i < 1$. Если канал занят и в БН нет свободных мест, то заявка i-го потока теряется. Возможно при этом, что часть каналов простаивает, а в k-м БН ($k=\overline{1,n}, k \neq i$) есть места для ожидания.

Модель легко представить набором n автономных одноканальных систем массового обслуживания (СМО). Вероятность π_i потери заявки i-го потока равна $\pi_i = \frac{\rho_i^{r_i+1}(1-\rho_i)}{1-\rho_i^{r_i+2}}$. Средние

потери по всем
$$n$$
 каналам достигают $\pi_{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \pi_{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_{i}^{r_{i}+l} (1-\rho_{i})}{1-\rho_{i}^{r_{i}+2}}$.

Модель демонстрирует характерную особенность. Возможно, именно простота постановки выдвигает ее на передний план. Вероятность потери заявки не зависит ни от приоритетности потока, которому она принадлежит, ни от соотношения $y_i = \mu_1/\mu_i$ параметров обслуживания первого и *i*-го потоков, влияющих на эффективность одноканальных СМО. Величина π_i определяется размером БН, предоставленного і-му потоку, и создаваемой им загрузкой ρ_i . Проследим в дальнейшем, всегда ли, при переходе OT одноканальной CMO канальной, снижается эффективность приоритетного обслуживания или же обнаруженное выравнивание вероятностей π_i потерь заявок разных приоритетов присуще лишь данной дисциплине.

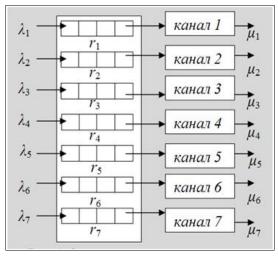


Рис. 2. Опорная статическая модель **Fig. 2.** Reference static model

обобществления Для анализа влияния автономных ресурсов рассмотрим модель с общим БН. Пусть, как и прежде, СМО содержит п однотипных каналов, обслуживающих с относительным приоритетом п пуассоновских потоков с интенсивностями λ_i каждый (i = 1, n); времена обслуживания экспоненциальные с параметрами μ_i . Заявки принимаются с вытеснением низших приоритетов из общего БН, Объединение буферной памяти насчитывающего г мест ДЛЯ ожидания. упорядоченность на входе системы за счет отказов низким приоритетам. Возникает корреляция потоками, управляющая заданными шкалой приоритетов отношениями предшествования. Другим содержательным отличием от модели, рассмотренной ранее, является «плавающее» (динамическое) распределение ресурса БН. Становится маловероятной ситуация, при которой заявка произвольного і-го потока, поступая в систему, застает занятым весь объем r общего БН. Заметим, что эта малая вероятность реализуется за счет требований низкого приоритета, что приводит к увеличению длительности простоя каналов их обслуживания.

ОБЩИЙ БУФЕРНЫЙ НАКОПИТЕЛЬ

Рассмотрим СМО с m=n=2, на которой проследим закономерности процесса. В распоряжение заявок высоких приоритетов (ЗВП) предоставлен первый канал и БН объемом на r мест для ожидания. Вероятность π_1 их потери может быть оценена как $\pi_1 = \frac{\rho_1^{r_1+1}(1-\rho_1)}{1-\rho_1^{r_1+2}}$.

Очевидно, что и здесь отсутствует зависимость $\pi = f(\gamma)$, так как первый канал по условиям задачи не бывает занят заявками низких приоритетов (ЗНП). Обслуживание потока ЗВП определяется лишь его собственными характеристиками. За время обслуживания одной ЗВП в БН накапливается их очередь, наиболее вероятная длина L_1 которой, согласно известному [12] приближению $L_1 = (I + v^2) \lambda T_1 = (I + v^2) \rho_1$, где v — коэффициент вариации, равный отношению среднеквадратического отклонения времени T обслуживания к его

математическому ожиданию. Параметр L_1 позволяет рассчитать величину остатка r' БH, которым по правилам вытеснения может пользоваться ЗНП, в виде $r' = r - (1 + v^2) \rho_1$. Тогда

$$\pi_2 = rac{
ho_2^{r+1-(1+artheta^2)
ho_1}(1-
ho_2)}{1-
ho_2^{r+2-(1+artheta^2)
ho_1}},$$
 если $r \! \geq \! (1+v^2)\,
ho_1.$

При невыполнении условия $r \ge (1+v^2)$ ρ_1 режим обслуживания ЗНП ухудшается. Неприоритетный поток теряет возможность образовать очередь ожидания, а принадлежащие ему заявки могут занимать выделенный им канал лишь в моменты его простоя от ЗВП.

Преобразуя известную формулу для одноканальной СМО, не имеющей БН (r=0), запишем $\pi_2 = \rho_2 / (1 + \rho_2)$. Подобная ситуация весьма маловероятна. Для пуассоновского потока на входе и экспоненциального времени обслуживания (v=1) даже при $\rho \to 1$ наиболее вероятная длина

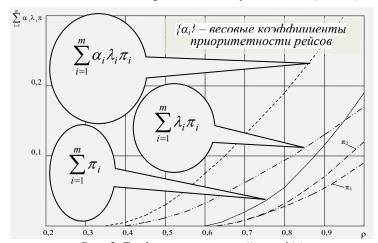


Рис. 3. Графики зависимостей $\pi_i = f(\rho)$ **Fig. 3.** Dependency graphs $\pi_i = f(\rho)$

очереди ЗВП не достигает двух заявок, т. е. $(L_1 < 2)$. На рис. 3 приведены зависимости $\pi_i = f(\rho)$ для данной модели совокупности горизонтов планирования. Для равноценных по аппаратным затратам систем с параметрами n = 2 и $r_1 = r_2 = r/2 = 5$ общий БН при статическом разделении потоков предпочтительнее по критерию минимизации потерь заявок. Эффект объясняется динамическим использованием буферной памяти, при котором относительный сдвиг по времени «сгущений» и «разрежений» нерегулярных входных потоков компенсируется подвижными границами

зон общего БН. Сказывается и восстановление отношений предпочтительности на входе СМО за счет возможности вытеснения из БН неприоритетных заявок. Обобщая модель для произвольного числа n каналов и m=n входящих потоков, определим наиболее вероятную длину L_{k-1} очереди всех заявок, расположенных в шкале приоритетов выше произвольного k-го потока, в обычном [12] ви-

де: $L_{k-1} = (1+\mathcal{G}^2)\sum_{i=1}^{k-1} \rho_i$. Тогда формула для вероятности потери k-го типа примет вид

$$\pi_{k} = \begin{cases} \frac{\rho_{k}^{r+1-(1+\vartheta^{2})\sum\limits_{j=1}^{k-1}\rho_{i}}(1-\rho_{k})}{1-\rho_{k}}, & \text{если } r \geq (1+\vartheta^{2})\sum\limits_{j=1}^{k-1}\rho_{j}.\\ \frac{\rho_{k}}{1+\rho_{k}} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

ВАРИАЦИИ МОДЕЛЕЙ ГОРИЗОНТОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Детализация статической дисциплины распараллеливания приводит к следующим моделям. Начнем с n-канальной системы, которая обслуживает m < n пуассоновских входных потоков заявок с интенсивностями λ_i ($i = \overline{1,m}$); времена обслуживания экспоненциальные с

параметрами μ_i . Заявки принимаются в раздельные зоны БН объемами r_i каждая, причем число зон равно количеству m входных потоков. При организации работы n процессоров разделяют на m групп, каждая из которых получает в свое распоряжение один из входных потоков с

приданым ему собственным БН, и n_i каналов, $i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^m n_i = n$. Модель представляет собой

набор m многоканальных СМО, на каждую из них поступает i-й поток, который принимает БН объемом r_i мест для ожидания. Вероятность потери заявки i-го потока оценивается формулой, в которую подставляются конкретные значения r_i и n_i . Уровень приоритетности не влияет на величину π_i . Включение в СМО большего, чем m, количества буферных зон нецелесообразно, так как фактически это будет означать простое наращивание секций БН.

Интереснее случай, при котором число d разделенных приемных зон меньше, чем количество m входящих потоков, т. е. d < m. При этом некоторые группы из n_i каналов будут обобществлять один физический объем памяти, в котором в соответствии с наперед заданной приоритетной шкалой осуществляется размещение заявок нескольких потоков с вытеснением менее приоритетных. Правила приема создают известную упорядоченность на входе, ставя в благоприятные условия заявки высоких приоритетов. Пусть в СМО поступают d групп потоков. Каждая группа с индексом i ($i = \overline{1,d}$) насчитывает S_i пуассоновских потоков с интенсивностями

$$\lambda_{j}$$
 ($j = \overline{1,S}$), пронумерованных в соответствии со шкалой приоритетов, сумма $\sum_{i=1}^{d} S_{i} = m$. Заявки

j-го типа, принадлежащие i-й группе входных потоков, поступают на обслуживание S_i разными группами каналов и, в случае занятости j-й группы каналов, направляются в очередь для ожидания в i-й обобществленный БН. Для произвольно выбранного j-го потока остаток БН, свободный от заявок более высоких приоритетов, может быть приближенно оценен как

$$r' = \left[r_i - (1 + \theta^2) \sum_{l=1}^{i-1} \rho_l \right] = \left[r_i - (1 + \theta^2) \sum_{l=1}^{i-1} \rho_l \right]$$
, где символ «антье», т. е. $\lceil * \rceil$, означает округление

до ближайшего целого в меньшую сторону. Тогда для расчета вероятности потери заявки j-го потока при положительном ближайшем меньшем целом вычисленной величины r' будет справедлива формула, в которую в качестве объема БН следует подставлять r', а в противном случае приравнивать r нулю. Количество n каналов СМО в формуле определяется исходя из того, сколько их назначено на обслуживание заявок j-го типа по условиям задачи.

Рассмотрим наиболее распространенную реализацию статического распараллеливания. Пусть система обслуживает m приоритетных потоков на n каналах, m > n. Количество разделенных секций БН равно числу m входных потоков. В этом случае m потоков заявок разделяются на n групп, каждая из которых назначается на отдельный канал. Внутри i-й группы

$$(i = \overline{1,n})$$
 осуществляется приоритетное обслуживание l_i потоков $(l_i < m, \sum_{i=1}^n l_i = m)$. Вероятность

потери заявки оценивается с помощью классического выражения для многоканальной СМО, работающей на l_i разделенных БН:

$$\pi = P_{n+r} = \frac{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \rho^{n+r} (1-\rho)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k-1} (n-k)}{k!} \rho^{k} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \rho^{n+r+1}}.$$

Если количество секций БН равно количеству каналов, т. е. каждый из них обслуживает l_i потоков с приоритетным приемом в i-й БН, то для определения вероятности потери заявки

следует пользоваться выражениями, полученными в [12], где $\gamma_i = \mu_I / \mu_i$ – соотношение параметров обслуживания:

$$\pi_{k} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r-\left(1+\upsilon^{2}\right)\gamma_{k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}}\right)}\left(1-\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)}{1-\left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r-\left(1+\upsilon^{2}\right)\gamma_{k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}}\right)+1}+\sum_{j=k}^{m} \delta_{jk} \rho_{j} \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}}\left\{1-\frac{\gamma_{k}\left[r-\left(1+\mathcal{G}^{2}\right) \gamma_{j} \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}}\right)\right]}{\left(1+\mathcal{G}^{2}\right) \gamma_{j} \rho_{k}}\right\},$$

если
$$\left(1+\mathcal{G}^2\right)\gamma_j\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right) \leq r < \left(1+\mathcal{G}^2\right)\gamma_j\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right),$$

$$\pi_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r-\left(1+\mathcal{G}^2\right)\gamma_k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right)}{1-\left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r-\left(1+\mathcal{G}^2\right)\gamma_k}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right)+1} , \text{ если } \left(1+\mathcal{G}^2\right)\gamma_k\sum_{i=1}^k\left(\frac{\rho_i}{\gamma_i}\right) \leq r,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера; $j,k=\left\{\overline{1,m}\right\},m$ — количество входных потоков,

$$\pi_k = rac{\displaystyle\sum_{i=1}^k
ho_i}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^k
ho_i}$$
 , если $\left(1 + \mathcal{G}^2\right) \gamma_j \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \left(rac{
ho_i}{\gamma_i}
ight) > r$.

Обобщим модель статического распараллеливания m потоков заявок на n=m каналов с приоритетным приемом в общий БН для произвольного соотношения $m \neq n$ (рис. 4).

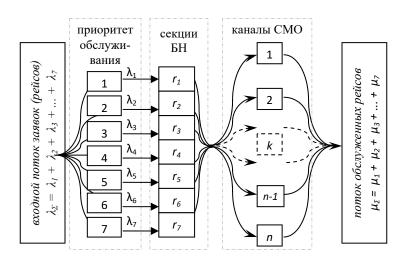


Рис. 4. Система с относительными приоритетами и приоритетным приемом заявок в секции БН **Fig. 4.** System with relative priorities and priority reception of applications in the buffer section

Пусть n < m, что соответствует реальной ситуации. Ее можно представить суперпозицией n обслуживающих каналов, каждый из которых обрабатывает заявки j-й группы пуассоновских потоков ($j=\overline{1,n}$), накапливаемых в динамически изменяющейся зоне общего БН, свободной от ЗВП. Размер r_j этой зоны можно приближенно рассчитать как

$$r_{j} = r - (1 + \mathcal{G}^{2}) \left(\sum_{s=k_{j}+1}^{l_{j}} \delta_{ks} \gamma_{l_{j}} \sum_{i=1}^{s} \frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}} + \sum_{p=l_{j}+1}^{m} \delta_{kp} \gamma_{m} \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{l_{s}} \frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}} \right),$$

где k_j — индекс произвольного потока, входящего в j-ю группу, $k_j = \overline{1, l_j}; \sum_{j=1}^m l_j = m;$

 δ_{kp} — символ Кронекера, учитывающий переполнение общего БН заявками высоких приоритетов в сеансах обслуживания заявок низких приоритетов. Далее, двойная сумма до p-1 учитывает заполнение БН заявками потоков, принадлежащих группам более высокой, чем j, приоритетности, в сеансах обслуживания заявок потоков, принадлежащих группам низшей приоритетности; сумма до s — то же относительно k-го потока заявок внутри j-й группы, в которой производится обслуживание с относительными приоритетами l_j самостоятельных потоков.

Рассматриваемая модель вписывается в рамки ограничений, оговоренных перед выводом приближенной формулы для одноканальной модели [12]. При ее использовании вместо r следует подставлять r_j . При $(1+\mathcal{G}^2)\sum_{p=l_j+1}^m \delta_{kp}\gamma_m\sum_{s=i}^{p-1}\sum_{i=1}^{l_s}\frac{\rho_i}{\gamma_i}>r_j$ потери по любому k_j -му входящему потоку, принадлежащему j-й группе, рассчитываются как для системы с r=0.

$$\pi_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k} \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)}{1 - \left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k+1}}, \text{ если для всех } j = \overline{k+1,m} \text{ справедливо } (1+\mathcal{G}^2)\gamma_j \frac{\rho_k}{\gamma_k} \leq r_k;$$

$$\pi_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k} \left(1 - \sum_{i=1}^k \rho_i\right)}{1 - \left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k+1}} + \sum_{j=1}^m \delta_{jk} \ \rho_j \frac{1 - \left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k}}{1 - \left(\sum_{i=1}^k \rho_i\right)^{r_k+1}} \left[1 - \frac{r_k \cdot \gamma_k}{(1 + \mathcal{G}^2) \cdot \gamma_j \cdot \rho_k}\right], \ \text{где}$$

если хотя бы для одного $j,\,j=\overline{k+1,m},\,\,(1+\mathcal{G}^2)\gamma_j\,\frac{\rho_k}{\gamma_k}>r_k\,$ и очередь

$$Q_k = (1 + \mathcal{G}^2) \rho_k \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i \left[1 - \left(\frac{\rho_i}{\gamma_i} \right)^{l_i + 1} \right] / \left(1 - \frac{\rho_i}{\gamma_i} \right) \le r_k;$$

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\pi_{k} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r_{k}} \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)}{1 - \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r_{k+1}}} + \sum_{j=1}^{m} \delta_{jk} \rho_{j} \frac{1 - \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r_{k}}}{1 - \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_{i}\right)^{r_{k+1}}} \left[1 - \frac{r_{k} \gamma_{k}}{(1 + \vartheta^{2}) \gamma_{j} \rho_{k}}\right] \times r_{k} / \left\{ (1 + \vartheta^{2}) \rho_{k} \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{i} \left[1 - \left(\frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}}\right)^{l_{i}+1}\right] / \left(1 - \frac{\rho_{i}}{\gamma_{i}}\right)\right\},$$

если хотя бы для одного $j, \quad j = \overline{k+1,m}, \ \left(1+\mathcal{G}^2\right)\!\gamma_j \frac{\rho_k}{\gamma_k} > r_k \quad \text{ и } \quad Q_k > r_k.$

Это означает, что вероятность обслуживания заявки произвольного k-го потока, независимо от уровня его приоритетности, есть вероятность P_{Ok_j} застать j-й обслуживающий канал свободным, а вероятность потери заявки есть ее дополнение до единицы

$$\pi_{k_j} = 1 - P_{Ok_j} = \frac{\sum_{s=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{l_s} \rho_i + \sum_{i=1}^{k_j} \rho_i}{1 + \sum_{s=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{l_s} \rho_i + \sum_{i=1}^{k_j} \rho_i}.$$

Наконец, при n > m модель представляет собой совокупность нескольких многоканальных СМО, обслуживающих каждая один k-й поток, $k = \overline{1,m}$, использующих каждая свою собственную k-ю динамическую секцию общего БН, объем которой вычисляется как

$$r_k = \min \left[0, \left[r - (1 + \mathcal{G}^2) \cdot \sum_{j=k+1}^m \delta_{jk} \cdot \gamma_j \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\rho_i}{\gamma_i} \right] \right].$$
 Обозначенное здесь ближайшее большее неотрица-

тельное целое вычисленной величины подставляется в выражения для оценки вероятности потери заявки по k-му потоку в такой системе.

В каждой модели наиболее вероятное время T_{wk} ожидания обслуживания заявки k-го потока рассчитывается [12] как произведение вычисленной длины L_{k-1} очереди всех заявок более высоких приоритетов и среднего времени $T_i = 1/\mu_i$ обслуживания каждой из них (i = 1, 2, ..., k-1)

$$T_{wk} = L_{k-1} = (1 + \mathcal{G}^2) \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Материалы данной статьи являются лишь первым шагом на пути разработки аналитического аппарата для оперативной оценки пропускной способности элементов структуры ВП при изменении условий выполнения полетов. В исследованных здесь моделях статической дисциплины обслуживания постулируется, что весь спектр текущих задач ОрВД решается внутри каждого горизонта планирования, без взаимодействия с соседними и удаленными центрами единой системы. Возможность учета таких связей предоставляют модели динамической дисциплины, в которых изменяющаяся загрузка элементов может перераспределяться между взаимодействующими горизонтами планирования. Подготовлена статья, восполняющая этот пробел.

Civil Aviation High Technologies

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Воздушный кодекс РФ. Федеральный закон № 60-Ф3 от 19.03.97 // Собр. законодательства РФ. 2012.
- **2.** Глобальная эксплуатационная концепция ОрВД. Документ 9854 AN/458. ИКАО. Монреаль, 2012.
- **3.** Руководство по совместной организации потоков воздушного движения. Документ 9971 AN/485. ИКАО. Монреаль, 2012.
- **4.** Руководство по управлению общесистемной информацией. Документ 10039 AN/511. ИКАО. Монреаль, 2012.
- **5.** Руководство по полетам и потокам движения: информация для совместного использования воздушного пространства (FF-ICE). Документ 9965 AN/483. ИКАО. Монреаль, 2012.
- **6.** Программный комплекс имитационного моделирования процессов организации и управления воздушным движением (КИМ УВД). Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005612007 от 08.08.2005 / О.В. Дегтярев, В.П. Егорова, И.Ф. Зубкова и др.
- 7. **Кузнецов В.Л., Филонов П.В., Чепурина А.А.** Метод построения системы квантовых состояний в модели расчета пропускной способности аэропорта // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 184.
- **8.** Сарайский Ю.Н., Алешков И.И. Аэронавигация. Часть І. Основы навигации и применение геотехнических средств: учебное пособие. СПб.: СПбГУ ГА, 2010.
- **9.** Типовые технологии работы диспетчеров органов обслуживания воздушного движения (управления полетами) при аэронавигационном обслуживании пользователей воздушного пространства Российской Федерации. Утв. Приказом Росаэронавигации № 108 от 14.11.07, зарегистрировано в Минюсте 21.12.07, № 10797.
- **10.** Федеральные авиационные правила «Организация планирования использования воздушного пространства Российской Федерации». Утв. Приказом Минтранса РФ от 16.01.12. № 6, Минтранса РФ от 16.01.12. № 6, зарегистрировано в Минюсте РФ 22.0312, № 23577.
- **11.** Табель сообщений о движении воздушных судов в Российской Федерации. Утв. Приказом Минтранса РФ от 24.01.2013 № 13, зарегистрировано в Минюсте РФ 23.05.13, № 28488.
- **12. Рудельсон Л.Е.** Программное обеспечение автоматизированных систем управления воздушным движением. Часть І. Системное программное обеспечение. Кн. 2. Операционные системы реального времени: учебное пособие. М.: МГТУ ГА, 2008.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Жильцов Илья Евгеньевич, аспирант МГТУ ГА, frostsaberr@gmail.com.

Митрофанов Артем Константинович, авиадиспетчер МЦ АУВД, s7arts-7artem@mail.ru.

Рудельсон Лев Ефимович, доктор технических наук, профессор, профессор МГТУ ГА, l-rudelson44@yandex.

AIR SPACE CAPACITY ASSESSMENT REGARDING THE PROBLEM OF THE COLLABORATIVE MANAGEMENT OF AIR TRAFFIC FLOWS

Ilya E. Zhiltsov¹, Artem K. Mitrofanov², Lev E. Rudel'son¹

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

Moscow Air Traffic Control Centre, Moscow, Russia

ABSTRACT

Air transportation industry traditionally stays on the cutting edge of technology. Feats of engineering are introduced during aircraft design and operation, airfields and airways arrangement, radio technology development. In order to raise the economic efficiency, air transportation providers increase airspace capacity. Experts of the International Civil Aviation Organization (ICAO) are planning to triple the achieved quantitative indicators by 2025 both on the basis of growing

scientific and technical potential and through the improvement of air traffic management. Technically, such a rise is due to the development of the satellite navigation, but it requires updating of the flight regulation rules. This gap is filled in the ICAO regulatory documents where the technology which guarantees the required air space capacity indicators on the basis of the operational coordination of specialists (the totality of the so-called "planning horizons") has been developed. At present, there is no analytical apparatus for the optimal choice of new technologies practical realization; only universal means are known (for example, simulation modeling of aviation systems). This article discusses several related analytical models of flight control processes and air space capacity assessments on a flight priority basis are given. Each flight corresponds to the state priority of its service, which can vary depending on the development of the situation in the air (distress on board, hazardous atmospheric phenomena, equipment failures, etc.). The problem of the interacting planning horizons capacity assessment is analyzed using a model of a multichannel system with priorities. Each planning horizon is a service channel that performs the functions of air traffic flow management, restructuring the space and the management process on its territory, as well as maintaining the integrity of information in the interacting horizons. The evaluation criteria which worked well in practice are indicators of the average service waiting time and the probability of failure which is thought of such events as the direction of the aircraft to the alternate aerodrome, missed approach procedure, departure delay and other significant deviations from the balanced daily plan of airspace use.

Key words: air traffic management, airspace use, models of planning horizons, service disciplines with priorities, organization of aircraft flows.

REFERENCES

- **1.** Vozdushnyy kodeks RF. Federal'nyy zakon № 60-FZ ot 19.03.97 [The Air Code of the Russian Federation. Federal Law No. 60-FZ of 19.03.97]. Coll. legislation of the Russian Federation. 2012. (in Russian)
 - 2. Global ATM operational concept. Document 9854 AN/458. ICAO. Montreal, 2012. (in Russian)
- **3.** Manual on Collaborative Air Traffic Flow Management, Doc. 9971 AN/485. ICAO. Montreal, 2012. (in Russian)
- **4.** Manual on System Wide Information Management (SWIM) Concept, Doc. 10039 AN/511. ICAO. Montreal, 2012. (in Russian)
- **5.** Manual on Flight and Flow Information for a Collaborative Environment (FF-ICE), Doc. 9965 AN/485. ICAO. Montreal, 2012. (in Russian)
- 6. Degtyarev O.V., Egorova V.P., Zubkova I.F., Kan A.V., Orlov V.S. Programmnyy kompleks imitatsionnogo modelirovaniya protsessov organizatsii i upravleniya vozdushnym dvizheniyem (KIM UVD). Svidetel'stvo ob ofitsial'noy registratsii programmy dlya EVM № 2005612007 ot 08.08.2005 [The program complex of simulation modeling of the processes of organization and control of air traffic (KIM ATC)]. Certificate of official registration of the computer program No. 2005612007 of 08.08.2005. (in Russian)
- 7. Kuznetsov V.L., Filonov P.V., Chepurina A.A. Metod postroyeniya sistemy kvantovykh sostoyaniy v modeli rascheta propusknoy sposobnosti aeroporta [The Quantum States System Constructing Method in Airport Throughput Computation Model]. Seientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, no. 184. (in Russian)
- **8. Saraysky Yu.N., Aleshkov I.I.** Aeronavigatsiya. Chast' I. Osnovy navigatsii i primeneniye geotekhnicheskikh sredstv [Air navigation. Part I. The fundamentals of navigation and the application of geotechnical means: Tutorial of SPb: SPbGU GA], 2010. (in Russian)
- 9. Tipovyye tekhnologii raboty dispetcherov organov obsluzhivaniya vozdushnogo dvizheniya (upravleniya poletami) pri aeronavigatsionnom obsluzhivanii pol'zovateley vozdushnogo prostranstva Rossiyskoy Federatsii [Typical technologies for air traffic controllers (flight control) dispatchers in air navigation services for users of the airspace of the Russian Federation]. Approved by the Order of Rosaeronavigatsiya No. 108 of 14.11.07, registered with the Ministry of Justice on 21.12.07, No. 10797. (in Russian)
- 10. Federal'nyye aviatsionnyye pravila "Organizatsiya planirovaniya ispol'zovaniya vozdushnogo prostranstva Rossiyskoy Federatsii" [Federal Aviation Regulations "Organization of Air-

space Planning of the Russian Federation"]. Approved by the Order of the Ministry of Transport of the Russian Federation of 16.01.12. No. 6, registered with the Ministry of Justice of the Russian Federation on 22.0312, No. 23577. (in Russian)

- 11. Tabel' soobshcheniy o dvizhenii vozdushnykh sudov v Rossiyskoy Federatsii [Reporting table on the movement of aircraft in the Russian Federation]. Approved by Order of the Ministry of Transport of the Russian Federation of January 24, 2013 № 13, registered with the Ministry of Justice of the Russian Federation on May 23, No. 28488. (in Russian)
- 12. Rudel'son L.E. Programmnoye obespecheniye avtomatizirovannykh sistem upravleniya vozdushnym dvizheniyem. Chast' I. Sistemnoye programmnoye obespecheniye. Kn. 2. Operatsionnyye sistemy real'nogo vremeni [Software for Automated Air Traffic Control Systems]. Part I. System Software. Book 2. Real-time operating systems: tutorial. M.: MSTUCA, 2007. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ilya E. Zhiltsov, Postgraduate Student, Moscow State Technical University of Civil Aviation, frostsaberr@gmail.com.

Artem K. Mitrofanov, Air Traffic Controller, Moscow Air Traffic Control Centre, s7arts-7artem@mail.ru.

Lev E. Rudel'son, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow State Technical University of Civil Aviation, l-rudelson44@yandex.ru.

 Поступила в редакцию
 27.10.2017
 Received
 27.10.2017

 Принята в печать
 14.03.2018
 Accepted for publication
 14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 517.957

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-96-104

ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАПОПОРТА – ЛИСА

E.H. KYIIIHEP¹

¹ Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва. Россия

Для обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса построена алгебра дифференциальных инвариантов относительно точечных преобразований, то есть преобразований независимых и зависимых переменных. Нахождение общего преобразования такого типа сводится к решению крайне сложного функционального уравнения. Поэтому мы, следуя подходу Софуса Ли, ограничимся поиском инфинитезимальных преобразований, то есть таких, которые порождаются сдвигами вдоль траекторий векторных полей. Задача отыскания этих векторных полей сводится к решению переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений относительно их коэффициентов. Уравнения Рапопорта – Лиса возникают при изучении процессов нелинейной фильтрации в пористых средах, а также в других областях естествознания: например, эти уравнения описывают различные физические процессы: двухфазную фильтрацию в пористой среде, фильтрацию политропного газа, распространение тепла при ядерном взрыве. Они являются актуальной темой для исследования: в недавних работах Бибикова, Лычагина и других проведен анализ симметрий обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса и найдены его конечномерные динамики и условия существования аттракторов. Поскольку обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, для их изучения в работе используются методы геометрической теории дифференциальных уравнений. Согласно этой теории дифференциальные уравнения порождают подмногообразия в пространстве джетов. Это позволяет использовать аппарат современной дифференциальной геометрии для исследования дифференциальных уравнений. Вводится понятие допустимых преобразований, то есть замен переменных, не выводящих уравнения за пределы класса уравнений Рапопорта – Лиса. Такие преобразования образуют группу Ли. Для этой группы Ли находятся дифференциальные инварианты, которые разделяют ее регулярные орбиты, что позволяет классифицировать обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса.

Ключевые слова: джеты, точечные преобразования, дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования.

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса имеют следующий вид [1, 2]:

$$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx},\tag{1}$$

где u = u(t,x) — неизвестная функция, A и B — функции от переменной u, которые мы будем считать бесконечно дифференцируемыми. Эти уравнения описывают различные физические процессы: двухфазную фильтрацию в пористой среде, фильтрацию политропного газа, распространение тепла при ядерном взрыве [3].

В данной работе построена алгебра дифференциальных инвариантов уравнений (1) относительно точечных преобразований. А именно, среди точечных преобразований выделяются преобразования, сохраняющие класс обобщенных уравнений Рапопорта — Лиса. Такие преобразования мы называем допустимыми. Они образуют группу Ли, а ее дифференциальные инварианты являются также и дифференциальными инвариантами обобщенных уравнений Рапопорта — Лиса.

В работе [4] проведен анализ симметрий обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса, а в работе [1] найдены его конечномерные динамики и условия существования аттракторов.

Civil Aviation High Technologies

ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Уравнение (1) можно записать в виде

$$u_t = A'(u)u_x + B'(u)u_{xx} + B''(u)u_x^2.$$
 (2)

Для упрощения вычислений обозначим

$$a(u) = A'(u), \qquad b(u) = B'(u)$$

и вместо уравнения (2) будем рассматривать уравнение

$$u_t = a(u)u_r + b(u)u_{rr} + b'(u)u_r^2. (3)$$

В пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$ с каноническими координатами $t, x, u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{0,2}$ уравнение (3) определяет гиперповерхность [6]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(a,b)} = \{ F(a,b) = 0 \},$$

где

$$F(a,b) = u_{1,0} - a(u_{0,0})u_{0,1} - b(u_{0,0})u_{0,2} - b'(u_{0,0})u_{0,1}^2.$$

Пусть $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{(\tilde{a},\tilde{b})}$ – другое уравнение типа (3).

Будем говорить, что уравнения $\mathcal E$ и $\tilde{\mathcal E}$ эквивалентны, если существует точечное преобразование $\varphi\colon J^0(\mathbb R^2)\to J^0(\mathbb R^2)$ такое, что

$$\varphi^{(2)}(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}.$$

Здесь $\varphi^{(2)}$ — продолжение преобразования φ в пространство 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$. В терминах функций это означает, что

$$\left(\varphi^{(2)}\right)^* (F(a,b)) = \lambda F(\tilde{a}, \tilde{b}),\tag{4}$$

где λ – некоторая функция на пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$.

Заметим, что нахождение общего преобразования φ сводится к решению крайне сложного функционального уравнения. Поэтому мы, следуя подходу Софуса Ли, ограничимся поиском инфинитезимальных преобразований, то есть таких, которые порождаются сдвигами вдоль траекторий векторных полей. Задача отыскания этих векторных полей сводится к решению переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений относительно их коэффициентов.

Пусть X — векторное поле на пространстве $J^0(\mathbb{R}^2)$ и φ_{τ} — преобразование сдвига вдоль его траекторий от $\tau=0$ до τ . Тогда φ_0 — тождественное преобразование. Вместо формулы (4) получаем

$$\left(\varphi_{\tau}^{(2)}\right)^{*}(F(a,b)) = \lambda_{\tau}F(\tilde{a}_{\tau},\tilde{b}_{\tau}),\tag{5}$$

где λ_{τ} – однопараметрическое семейство функций на $J^2(\mathbb{R}^2)$, \tilde{a}_{τ} , \tilde{b}_{τ} – однопараметрические семейства функций от переменной u, причем $\lambda_0=1$, $\tilde{a}_0=a$, $\tilde{b}_0=b$.

Дифференцируя обе части формулы (5) по параметру τ при $\tau=0$ и ограничивая полученное равенство на уравнение \mathcal{E} , получим

Vol. 21, No. 02, 2018

$$X^{(2)}(F(a,b))\big|_{F(a,b)=0} = -\frac{da_{\tau}}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,1} - \frac{db_{\tau}}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,2} - \frac{db'_{\tau}}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,1}^2.$$
 (6)

Здесь $X^{(2)}$ — продолжение векторного поля X в пространство 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$.

Формула (6) эквивалентна системе одиннадцати линейных дифференциальных уравнений на коэффициенты векторного поля X, решая которую получаем вид векторного поля X:

$$X = (\alpha_0 + \alpha_1 t) \frac{\partial}{\partial t} + (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x) \frac{\partial}{\partial x} + (\delta_0 + \delta_1 u_{0,0}) \frac{\partial}{\partial u_{0,0}}.$$

Греческими буквами здесь обозначены произвольные постоянные.

Таким образом, базис алгебры Ли векторных полей, порождающих группу Ли допустимых преобразований, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}$$
, $t\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $t\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial u_{0,0}}$, $u_{0,0}\frac{\partial}{\partial u_{0,0}}$

Преобразования сдвига вдоль траекторий этих векторных полей имеют вид:

$$t \mapsto t + \tau; \quad t \mapsto te^{\tau};$$

$$x \mapsto x + \tau; \quad x \mapsto x + t\tau; \quad x \mapsto xe^{\tau};$$

$$u_{0,0} \mapsto u_{0,0} + \tau; \quad u_{0,0} \mapsto u_{0,0}e^{\tau}.$$
(7)

Для краткости здесь мы указываем только те переменные, которые изменяются при сдвигах.

Видим, что группа Ли допустимых преобразований порождена трансляциями и растяжениями вдоль осей координат t, x, u_{0,0}, а также одним обобщенным растяжением вдоль оси x.

РАССЛОЕНИЕ RL

Выясним, как группа Ли допустимых преобразований действует на коэффициенты a и b уравнения (3).

Введем пространство \mathbb{R}^3 с координатами u,a,b и пространство \mathbb{R}^2 с координатами a,b и определим тривиальное расслоение

$$\pi_{RL} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \pi_{RL} \colon (u,a,b) \mapsto (a,b).$$

Это расслоение будем называть расслоением Panonopma - Лиса или расслоением RL. Первое преобразование в (7) не меняет уравнения (3). Второе переводит его в уравнение

$$e^{-\tau}u_t = a(u)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2,$$

и поэтому на расслоении Рапопорта – Лиса оно действует так:

$$(u,a,b) \mapsto (u,e^{\tau}a,e^{\tau}b).$$

Третье преобразование не меняет уравнения, а четвертое переводит его в уравнение

$$u_t = (a(u) + \tau)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2,$$

и на расслоении Рапопорта – Лиса оно действует так:

$$(u, a, b) \mapsto (u, a + \tau, b).$$

Пятое преобразование переводит уравнение (3) в уравнение

$$u_t = e^{-\tau}a(u)u_x + e^{-2\tau}b(u)u_{xx} + e^{-2\tau}b'(u)u_x^2$$

и порождает преобразование

$$(u,a,b) \mapsto (u,e^{-\tau}a,e^{-2\tau}b)$$

на расслоении.

Последние два преобразования на расслоении Рапопорта – Лиса действуют следующим образом:

Таблица 1

 $(u, a, b) \mapsto (u + \tau, a, b)$

И

$$(u,a,b) \mapsto (e^{\tau}u,a,b).$$

Таким образом, допустимые преобразования, ограниченные на расслоение Рапопорта — Лиса, образуют пятимерную группу Ли, которую обозначим через G_{RL} . Соответствующая алгебра Ли G_{RL} порождена векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}$$
, $Y_2 = u \frac{\partial}{\partial u}$, $Y_3 = \frac{\partial}{\partial a}$, $Y_4 = a \frac{\partial}{\partial a}$, $Y_5 = b \frac{\partial}{\partial b}$.

Table 1
Коммутационные соотношении
Commutation correlations

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	0	Y_1	0	0	0
<i>Y</i> ₂	$-Y_1$	0	0	0	0
<i>Y</i> ₃	0	0	0	Y_3	0
Y_4	0	0	$-Y_3$	0	0
Y_5	0	0	0	0	0

Ее коммутационные соотношения приведены в таблице 1.

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Пусть $J^k(\pi_{RL})$ — пространство k-джетов сечений расслоения RL и u,a_0,b_0,\dots,a_k,b_k — канонические координаты на этом пространстве.

Дифференциальным инвариантом порядка k группы Ли G_{RL} (и обобщенных уравнений Рапопорта — Лиса) называется функция J на пространстве k-джетов расслоения RL, постоянная на орбитах продолженной в пространство $J^k(\pi_{RL})$ группы Ли G_{RL} [5].

При этом функция J является решением системы пяти линейных дифференциальных уравнений $J^k(\pi_{RL})$

$$Y_i^{(k)}(J) = 0, \quad i = 1, ..., 5.$$
 (8)

Здесь $Y_i^{(k)}$ – продолжение векторного поля Y_i в пространство $J^k(\pi_{RL})$.

Дифференциальные инварианты образуют алгебру относительно операции сложения и умножения, то есть если J_1 и J_2 — дифференциальные инварианты, то их сумма J_1+J_2 и произведение J_1J_2 также являются дифференциальными инвариантами.

Дифференциальные инварианты J_1, \dots, J_s порядка не выше k называются базовыми, если они функционально независимы и любой другой дифференциальный инвариант порядка не

выше k является функцией от них. В этом случае число s называется размерностью алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k.

Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k равна коразмерности регулярной орбиты группы Ли $G_{RL}^{(k)}$.

В нашем случае точка $\theta \in J^k(\pi_{RL})$ является регулярной, если ранг системы касательных векторов $Y_{1,\theta}^{(k)}$, ..., $Y_{5,\theta}^{(k)}$ максимален.

Это означает, например, что в пространстве $J^0(\pi_{RL})$ регулярными являются все точки, в которых ни одна из координат u, a_0 , b_0 не обращается в нуль.

В пространстве $J^k(\pi_{RL})$ точки, в которых ни одна из координат $u, a_0, b_0, ..., a_k, b_k$ не обращается в нуль, также являются регулярными. Это следует из вида векторных полей

$$Y_1^{(k)} = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_2^{(k)} = u \frac{\partial}{\partial u} - \sum_{i=1}^k i \left(a_i \frac{\partial}{\partial a_i} + b_i \frac{\partial}{\partial b_i} \right),$$

$$Y_3^{(k)} = \frac{\partial}{\partial a_0},$$

$$Y_4^{(k)} = \sum_{j=0}^k a_j \frac{\partial}{\partial a_j},$$

$$Y_5^{(k)} = \sum_{j=0}^k b_j \frac{\partial}{\partial b_j}.$$

Первые два нетривиальных дифференциальных инварианта имеют порядок два. Действительно,

$$\dim J^k\left(\pi_{RL}\right) = 2k + 3,$$

а размерность регулярной орбиты равна пяти. Эти инварианты мы получаем, решая систему (8) для k=2:

$$J_{2,1} = \frac{a_2 b_0}{a_1 b_1},$$
$$J_{2,2} = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}.$$

Легко подсчитать, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k равна 2k ($k \ge 2$). При этом порядок равный ровно k имеют только два инварианта.

Для вычисления дифференциальных инвариантов более высоких порядков мы используем инвариантное дифференцирование.

Напомним, что дифференциальный оператор

$$\nabla = f \frac{d}{du}$$

называется инвариантным дифференцированием, если для любого векторного поля X^* на пространстве $J^{\infty}(\pi_{RL})$

Civil Aviation High Technologies

$$X^* \circ \nabla = \nabla \circ X^*. \tag{9}$$

Здесь f — некоторая локально гладкая функция на пространстве бесконечных джетов dim $J^{\infty}(\pi_{RL})$, а

$$\frac{d}{du} = \frac{\partial}{\partial u} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial b_1} + \cdots$$

- оператор полного дифференцирования по переменной u.

Несложно проверить, что оператор

$$\nabla = \frac{b_0}{b_1} \frac{d}{du}$$

является оператором инвариантного дифференцирования.

Из формулы (9) следует, что если J — дифференциальный инвариант, то и функция $\nabla(J)$ также является дифференциальным инвариантом.

Действительно, для любого векторного поля

$$X^*(I) = 0.$$

Но тогда в силу формулы (9) получаем, что

$$X^*(\nabla(J)) = \nabla(X^*(J)) = 0.$$

Таким образом, применяя к двум найденным дифференциальным инвариантам $J_{2,1}$ и $J_{2,2}$ оператор ∇ , получим два дифференциальных оператора третьего порядка

$$J_{3,1} = \nabla(J_{21}) = \frac{b_0}{a_1^2 b_1^3} (a_1 a_2 b_0 b_2 - a_1 a_2 b_1^2 - a_1 a_3 b_0 b_1 + a_2^2 b_0^2 b_1),$$

$$J_{3,2} = \nabla(J_{22}) = \frac{b_0}{b_1^4} (b_1^2 b_2 - 2b_0 b_2^2 + b_0 b_1 b_2).$$

Таким же образом можно получить новые дифференциальные инварианты порядка k:

$$J_{k,1} = \nabla(J_{k-1,1}),$$

$$J_{k,2} = \nabla(J_{k-1,2}).$$

Следующая теорема дает описание структуры алгебры дифференциальных инвариантов. **Теорема 1.** Алгебра дифференциальных инвариантов обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса порождена двумя базовыми инвариантами второго порядка

$$J_{2,1} = \frac{a_2 b_0}{a_1 b_1}$$
 и $J_{2,2} = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}$

и одним инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{b_0}{b_1} \frac{d}{du}.$$

Эта алгебра разделяет регулярные орбиты группы Ли G_{RL} .

Доказательство. Пусть $\theta \in J^k(\pi_{RL})$ – регулярная точка и

$$\pi_{k,0}: J^k(\pi_{RL}) \to J^0(\pi_{RL}),$$

$$\pi_{k,0}: (u, a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) \mapsto (u, a_0, b_0)$$

- естественная проекция на пространство 0-джетов. Так как точка θ регулярная, то ее проекция

$$\pi_{k,0}(\theta) = (u(\theta), a_0(\theta), b_0(\theta))$$

имеет ненулевую компоненту $b_0(\theta)$.

На множестве

$$M = J^{0}(\pi_{RL}) \setminus \{(u, a_{0}, 0) | u, a_{0} \in \mathbb{R}\}$$

группа Ли G_{RL} действует транзитивно.

Действительно, сдвигом вдоль траекторий векторных полей

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial a_0}, \qquad Y_5 = b_0 \frac{\partial}{\partial b_0}$$

любую точку множества M можно перевести в точку (0,0,1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\pi_{k,0}(\theta) = \sigma = (0,0,1)$.

Стационарная подалгебра точки σ порождена векторными полями

$$Y_2 = u \frac{\partial}{\partial u}$$
 и $Y_4 = a_0 \frac{\partial}{\partial a_0}$

Рассмотрим слой проекции

$$N_{\sigma}=\pi_{k,0}^{-1}(\sigma)\subset J^k(\pi_{RL}).$$

Размерность этого слоя равна 2k и функции $a_1,b_1,...,a_k,b_k$ можно рассматривать как координаты на нем. Ограничение векторных полей $Y_2^{(k)}$ и $Y_4^{(k)}$ на этот слой имеют вид

$$\begin{aligned} Y_2^{(k)}\Big|_{N_\sigma} &= -b_1 \frac{\partial}{\partial b_1} - 2b_2 \frac{\partial}{\partial b_2} - \dots - kb_k \frac{\partial}{\partial b_k}, \\ Y_4^{(k)}\Big|_{N_\sigma} &= a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + a_k \frac{\partial}{\partial a_k}. \end{aligned}$$

Так как точка θ регулярная, то в каждой точке слоя N_{σ} эти поля линейно независимы. Поэтому размерность орбиты алгебры Ли $\mathcal{G}_{RL}|_{N_{\sigma}}$ равна двум, а коразмерность орбиты точки θ , а следовательно и размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше чем k, равна 2k-2.

Итак, количество функционально независимых диффренциальных инвариантов порядка не выше чем k равно 2k-2. Все они исчерпываются построенными инвариантами $J_{k,1}$ и $J_{k,2}$.

Теорема доказана.

Вместо дифференциальных инвариантов $J_{k,1}$ и $J_{k,2}$ можно использовать функции

$$I_{k,1} = \frac{a_k b_0^{k-1}}{a_1 b_1^{k-1}}, \qquad I_{k,2} = \frac{b_k b_0^{k-1}}{b_1^k},$$

Civil Aviation High Technologies

которые также являются дифференциальными инвариантами, что несложно проверить.

Построенная алгебра дифференциальных инвариантов может быть использована для классификации обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.** Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады Акад. наук. 2017. Т. 472, № 6. С. 627–630.
 - 2. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. Vol. 198. Pp. 139–148.
- **3. Баренблатт Г.И.** Нелинейная фильтрация: прошлое, настоящее и будущее // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 15–27.
- **4. Bibikov P.** Group classification of Rapoport-Leas equations // Lobachevskii J Math. 2017. Vol. 38, No. 1. P. 116.
- **5.** Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1988. 297 с.
- **6.** Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 336 с.
- 7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations // Analysis and Mathematical Physics. 2016. Vol. 7, No. 2. Pp. 107–115.
- **8.** Lychagin V.V., Kruglikov B.S. Global Lie-Tresse theorem // Selecta Mathematica, New Series. 2016. C. DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.
- **9. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A.** Natural spinor structures over Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2016. Vol. 106. Pp. 1–5.
- 10. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Mass and heat transport in the two-phase Buckley-Leverett model // Journal of Geometry and Physics. 2017. Vol. 113. Pp. 2–9.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кушнер Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, ekushner@ro.ru.

INVARIANTS OF GENERALIZED RAPOPORT-LEAS EQUATIONS

Elena N. Kushner¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

ABSTRACT

For the generalized Rapoport-Leas equations, algebra of differential invariants is constructed with respect to point transformations, that is, transformations of independent and dependent variables. The finding of a general transformation of this type reduces to solving an extremely complicated functional equation. Therefore, following the approach of Sophus Lie, we restrict ourselves to the search for infinitesimal transformations which are generated by translations along the trajectories of vector fields. The problem of finding these vector fields reduces to the redefined system decision of linear differential equations with respect to their coefficients. The Rapoport-Leas equations arise in the study of nonlinear filtration processes in porous media, as well as in other areas of natural science: for example, these equations describe various physical phenomena: two-phase filtration in a porous medium, filtration of a polytropic gas, and propagation of heat at nuclear explosion. They are vital topic for research: in recent works of Bibikov, Lychagin, and others, the analysis of the symmetries of the generalized Rapoport-Leas equations has been carried out; finite-dimensional dynamics and conditions of attractors existence have been found. Since the generalized Rapoport-Leas equations are nonlinear partial differential equations of the second order with two independent variables; the methods of the geometric theory of differential equations are used to study them in this paper. According to this theory differential equations generate subvarieties in the space of jets. This makes it possible to use the apparatus of modern differential geometry to study differential equations.

Vol. 21, No. 02, 2018

ential equations. We introduce the concept of admissible transformations, that is, replacements of variables that do not derive equations outside the class of the Rapoport-Leas equations. Such transformations form a Lie group. For this Lie group there are differential invariants that separate its regular orbits, which allow us to classify the generalized Rapoport-Leas equations.

Key words: jets, point transformations, differential invariants, invariant differentiations.

REFERENCES

- 1. Lychagin V.V., Kushner A.G., Akhmetzyanov A.V. Attraktory v modelyakh fil'tratsii [Attractors in Models of Porous Media Flow]. Doklady Academii nauk [Doklady Mathematics], 2017, vol. 472, No. 6, pp. 627–630. (in Russian)
 - 2. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood. AIME Trans, 1953, vol. 198, pp. 139–148.
- **3. Barenblatt G.I.** *Nelineynaya fil'tratsiya: proshloye, nastoyashcheye i budushcheye* [Nonlinear filtering: past, present, and future]. *Problemy teorii fil'tratsii i mekhanika protsessov povysheniya nefteotdachi* [Problems of the theory of filtration and mechanics of enhanced oil recovery processes]. M.: Nauka, 1987, pp. 15–27. (in Russian)
- **4. Bibikov P.** Group classification of Rapoport-Leas equations. Lobachevskii J Math, 2017, vol. 38, no. 1, p. 116.
- **5.** Alekseevskiy D.V., Lychagin V.V., Vinogradov A.M. Osnovnyye ponyatiya differentsial'noy geometrii [Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry]. Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremenniye problemy matematiki. Fundamental 'niye napravleniya" [Results of Science and Engineering. A series of "Modern problems of mathematics. Fundamental directions]. M.: VINITI, vol. 28, 1988, 297 p. (in Russian)
- **6. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S., Lychagin V.V.** *Vvedeniye v geometriyu nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the geometry of nonlinear differential equations]. M.: Nauka, 1986, 336p. (in Russian)
- 7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations. Analysis and Mathematical Physics, 2016, vol. 7, no 2, pp. 107–115.
- **8.** Lychagin V.V., Kruglikov B.S. Global Lie-Tresse theorem. Selecta Mathematica, New Series. 2016. C. DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.
- **9. Lychagin V.V.**, **Yumaguzhin V.A.** Natural spinor structures over Lorentzian manifolds. Journal of Geometry and Physics, 2016, vol. 106, pp. 1–5.
- 10. Lychagin V.V., Kushner A.G., Akhmetzyanov A.V. Mass and heat transport in the two-phase Buckley-Leverett model. Journal of Geometry and Physics, 2017, vol. 113, pp. 2–9.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Elena N. Kushner, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, ekushner@ro.ru.

Поступила в редакцию	28.10.2017	Received	28.10.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК 519.46

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-105-113

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА НА ТРЕХМЕРНОМ ТОРЕ

А.М. ЛУКАЦКИЙ¹

 1 Институт энергетических исследований Российской академии наук, г. Москва, Россия

Рассматривается уравнение Ландау – Лифшица на трехмерном торе. Уравнение приводится к форме уравнения Эйлера на геодезические левоинвариантной метрики в бесконечномерной алгебре Ли группы токов. Группа токов задается поточечным отображением трехмерного тора в трехмерную ортогональную группу. В алгебре Ли используется введенный ранее нестандартный коммутатор. Решения уравнения Ландау – Лифшица разлагаются по ортонормированному базису левоинвариантной метрики в алгебре токов. Для коэффициентов разложения решения уравнения Ландау – Лифшица в рамках построенной модели вычисляется явный вид эволюционных уравнений. Для этого используются полученные ранее выражения для сумм операторов присоединенного и коприсоединенного действия в бесконечномерной алгебре Ли токов с нестандартным коммутатором. Свойство компактности указанных операторов суммы позволяет получить асимптотическую форму уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе. Найдены эволюционные уравнения на подпространство потоков, состоящее из векторных полей, чьи Фурье-разложения содержат только простые гармоники вида $\cos k\phi$. Такие векторные поля составляют подалгебру алгебры токов, которая является также замкнутой относительно действия коприсоединенных операторов. В таком случае произвольное уравнение Ландау – Лифшица, для которого вектор начальных условий лежит в этой подалгебре, останется в ней для всех t, для которых это решение определено. Отметим, что для изучения уравнения Ландау – Лифшица алгебра токов со стандартным коммутатором оказалась неэффективной: в частности, уравнение Ландау – Лифшица не является уравнением Эйлера на алгебре токов со стандартным коммутатором. Таким образом, для уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе вычислен явный вид эволюционных уравнений на коэффициенты Фурье-разложений его решений при помощи операторов, представляющих собой сумму операторов присоединенного и коприсоединенного действия алгебры токов на трехмерном торе с нестандартным коммутатором. При этом именно свойство компактности указанных операторов суммы (в то время как по отдельности их составляющие оператор присоединенного и оператор коприсоединенного действий не являются даже непрерывными) позволило получить указанную асимптотическую форму.

Ключевые слова: алгебра токов, скобка Ли, оператор присоединенного действия, оператор коприсоединенного действия, трехмерный тор, уравнение Ландау – Лифшица, асимптотика.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дан трехмерный тор T^3 . Обозначим через $V(T^3)$ пространство гладких векторных полей на T^3 . Пространство $V(T^3)$ с операцией поточечного векторного произведения

$$(m \times n)(x) = m(x) \times n(x) \tag{1}$$

является алгеброй Ли, которая называется алгеброй токов. Назовем операцию (1) стандартным коммутатором.

Рассмотрим уравнение Ландау – Лифшица [1] на T³:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = m \times \Delta m \,. \tag{2}$$

Здесь $m \in V(T^3)$, Δ — оператор Лапласа на векторных полях.

Для изучения уравнения Ландау — Лифшица алгебра токов со стандартным коммутатором (1) оказалась неэффективной. В частности, уравнение Ландау — Лифшица (Л-Л) не является уравнением Эйлера на алгебре токов со стандартным коммутатором [1]. Чтобы представить (Л-Л) как уравнение Эйлера, в пространстве $V(\mathbf{T}^3)$ в [2] был введен нестандартный коммутатор. Для пояснения этой конструкции фиксируем a>0 и введем оператор

$$P_a = -a \operatorname{Id} + \Delta$$
,

здесь Id — тождественный оператор. Оператор P_a не имеет ядра, в отличие от оператора Лапласа Δ , и является обратимым.

Нестандартный коммутатор в пространстве $V(T^3)$ (в дальнейшем называемый также оператором присоединенного действия) задается следующим образом:

$$\operatorname{ad}_{m} n = [m, n] = P_{a}^{-1}(P_{a}m \times P_{a}n). \tag{3}$$

В пространстве $V(T^3)$ имеется также скалярное произведение

$$\langle m, n \rangle = \int_{T^3} (m(x), -P_a(n)(x)) dx.$$
 (4)

Уравнение Л-Л (2) по отношению к алгебре Ли с коммутатором [3] и скалярному произведению (4) принимает вид уравнения Эйлера в алгебре Ли группы токов [2–5]:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \operatorname{ad}_{m}^{*}(m). \tag{5}$$

Здесь $\operatorname{ad}_{\mathfrak{m}}^* n$ является оператором коприсоединенного действия в пространстве $V(\mathsf{T}^3)$ с коммутатором (3) и скалярным произведением (4), задаваемым условием

$$< ad_{m}^{*}(u), v > = < u, ad_{m}(v) >$$
 (6)

Из [6, (6)] оператор коприсоединенного действия имеет вид

$$ad_{m}^{*}(n) = -P_{a}ad_{m}P_{a}^{-1}(n) = -P_{a}m \times n.$$
 (7)

Согласно [2–5] решениями уравнения (5) на отрезке времени [0, T] являются кривые m(t), которые минимизируют следующий функционал:

$$I = \int_{0}^{T} \langle m, m \rangle dt = \int_{0}^{T} \left(\int_{\mathbb{T}^{3}} (m(x), -P_{a}(m)(x)) dx \right) dt.$$
 (8)

Решения Л-Л являются геодезическими левоинвариантной метрики на группе токов с алгеброй Ли $V(T^3)$. Эта метрика задается в касательном пространстве к единице группы токов, отождествляемом с $V(T^3)$, скалярным произведением (4).

Введем в алгебре токов оператор, представляющий собой сумму операторов присоединенного и коприсоединенного действий:

$$S_{m} = \frac{1}{2} (ad_{m} + ad_{m}^{*}). \tag{9}$$

Далее мы будем использовать введенный в [5, (9)] ортонормированный в смысле метрики (4) базис в пространстве $V(T^3)$ из собственных векторов оператора P_a :

$$e_{k}^{i} = \frac{\lambda_{k}}{\sqrt{(|k|^{2} + a)}} (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3}) \cos(kx), f_{k}^{i} = \frac{\lambda_{k}}{\sqrt{(|k|^{2} + a)}} (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3}) \sin(kx), k \neq 0.$$
 (10)

Здесь
$$k \in \mathbb{Z}^3$$
, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_k = \sqrt{\frac{2}{vol(\mathbb{T}^3)}}$, $k \neq 0$; $\lambda_0 = \sqrt{\frac{1}{vol(\mathbb{T}^3)}}$.

Следуя [6], для однозначности при индексации элементов базиса (10) в дальнейшем будем представлять произвольный целочисленный вектор $k \neq 0$ в виде $k = \varepsilon(k)\overline{k}$, где первая ненулевая координата вектора \overline{k} — положительна, а $\varepsilon(k) \in \{1, -1\}$.

Введем также фактор-пространство $[Z^3] = Z^3 / \{\pm 1\}.$

Пусть теперь m(t) является решением уравнения Л-Л в форме уравнения Эйлера на группе токов (5). Разложим его по ортонормированному базису (10).

$$m(t) = \sum_{i} g_{0,i}(t) e_0^i + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus i} (g_{k,i}(t) e_k^i + h_{k,i}(t) f_k^i).$$
 (11)

Тогда из [6] уравнение Л-Л распадается на серию эволюционных уравнений на коэффициенты разложения (11):

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} = -\langle S_{e_k^i} | m, m \rangle,
\frac{\partial h_{k,i}}{\partial t} = -\langle S_{f_k^i} | m, m \rangle.$$
(12)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА

В [6] были вычислены матричные коэффициенты операторов $S_{e_k^i}$, $S_{f_k^i}$ в базисе (10), причем там даны как их точные [6, (18)–(19)], так и приближенные [6, (22)] формулы. Используя эти формулы, раскроем уравнения на коэффициенты разложения решений Л-Л (12).

Введем векторы $\delta_i = (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})$. Здесь заметим, что при вычислении структурных констант алгебры токов в [6] можно было ограничиться рассмотрением только таких пар i, j, что $\delta_i \times \delta_j = \delta_s$, т. к., имея вычисленными эти случаи, все остальные легко получить заменой знака в соответствующих выражениях. Теперь же для суммирования рядов, возникающих при раскрытии рассматриваемых ниже эволюционных уравнений, необходимо ввести следующую функцию

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, \delta_i \times \delta_j = \delta_s \\ -1, \delta_i \times \delta_j = -\delta_s \end{cases}.$$

Здесь удобно привести наиболее важные для последующих расчетов формулы, фигурирующие при вычислении операторов S_{e^i} , S_{f^i} , из [6,(20)].

$$\mu_{k,l} = \frac{2(k,l) + |k|^2}{\sqrt{(a + |k + l|^2)(a + |l|^2)}},$$

$$\nu_{k,l} = \frac{-2(k,l) + |k|^2}{\sqrt{(a + |k - l|^2)(a + |l|^2)}}.$$
(13)

Чтобы избежать излишне громоздких формул, условимся, что в приводимых ниже суммах в\при употреблении символа $\sum_{l,j}$ подразумевается, что первый вектор l пробегает пространство [Z³]. Индексы k, j, s отождествляются с векторами δ_i , δ_j , δ_s , причем соблюдается следующее соотношение знаков при их подстановке в следующие ниже формулы:

$$\delta_i \times \delta_j = \gamma(i,j) \delta_s$$
.

Теперь, используя [6, (18)–(19)], получаем следующие выражения для эволюционных уравнений на коэффициенты разложения (11).

Предложение 1. Коэффициенты разложения (11) удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} = -\frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a+|k|^2)} \gamma(i,j) \left\{ \sum_{l,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}} v_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{l \neq k,j} h_{l,j} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} - \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}} v_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + h_{k,j} \frac{1}{\lambda_{2k}} \mu_{k,k} h_{2k,s} \right\}.$$

$$(14)$$

$$\frac{\partial h_{k,i}}{\partial t} = -\frac{\lambda_{k}}{4} \sqrt{(a + |k|^{2})} \gamma(i, j) \left\{ \sum_{l,j} h_{l,j} \left(-\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + g_{k,j} \frac{1}{\lambda_{2k}} \mu_{k,k} h_{2k,s} \right\}.$$
(15)

Доказательство проводится путем раскрытия уравнений (12) на коэффициенты разложения (11) с использованием формул [6, (18)–(19)].

ПОЛУЧЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ

В [6] было установлено, что линейные операторы $S_{e_k^i}$, $S_{f_k^i}$ в пространстве $V(T^3)$ с нормой, определяемой метрикой (4), являются компактными. Свойство компактности этих операторов позволяет получить асимптотические выражения для эволюционных уравнений (14)–(15). Фиксируем L>0 и введем следующие частичные суммы для рядов (14), (15):

$$P_{k,i,L} = -\frac{\lambda_{k}}{4} \sqrt{(a + |k|^{2})} \gamma(i,j) \left\{ \sum_{|l| \leq L,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} h_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} - \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + \left\{ h_{k,j} \frac{1}{\lambda_{2k}} \mu_{k,k} h_{2k,s} \right\}.$$

$$Q_{k,i,L} = -\frac{\lambda_{k}}{4} \sqrt{(a + |k|^{2})} \gamma(i,j) \left\{ \sum_{|l| \leq L,j} h_{l,j} \left(-\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{k+l,s} + \frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} h_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_{l}}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} h_{2k,s} \right) + \sum_{|l| \leq L,l \neq k,j}$$

Для дальнейшего удобно воспроизвести асимптотические формулы для выражений, фигурирующих в структурных константах алгебры Ли токов, из [6, (21)]:

$$\mu_{k,l} = \frac{2(k,l)}{|l|^2} + \frac{|k|^2}{|l|^2} - \frac{2(k,l)^2}{|l|^4} + o(\frac{1}{|l|^2}),$$

$$v_{k,l} = -\frac{2(k,l)}{|l|^2} + \frac{|k|^2}{|l|^2} - \frac{2(k,l)^2}{|l|^4} + o(\frac{1}{|l|^2}).$$
(18)

Приведем также обозначения из [6]:
$$\lambda_k = \sqrt{\frac{2}{vol(T^3)}} = \lambda$$
, $a_{\kappa l} = \frac{2(k,l)}{\left|l\right|^2}$, $b_{k,l} = \frac{\left|k\right|^2}{\left|l\right|^2} - \frac{2(k,l)^2}{\left|l\right|^4}$.

Предложение 2. Для эволюционных уравнений (14)–(15) получаем следующие асимптотические выражения при $|l| \to \infty$.

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} = P_{k,i,L} - \frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a + |k|^2)} \gamma(i,j) \left\{ \sum_{|l| > L,j} g_{l,j} \left((a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{k+l,s} + (-a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| > L,j} h_{l,j} \left((a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) h_{k+l,s} + (a_{k,l} - b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) h_{\overline{k-l},s} \right) \right\}$$
(19)

$$\frac{\partial h_{k,i}}{\partial t} = Q_{k,i,L} - \frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a + |k|^2)} \gamma(i,j) \left\{ \sum_{|l| > L,j} g_{l,j} \left((a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) h_{k+l,s} + (-a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) h_{\overline{k-l},s} \right) + \sum_{|l| > L,j} h_{l,j} \left((-a_{k,l} - b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{k+l,s} + (-a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{\overline{k-l},s} \right) \right\}$$
(20)

Доказательство проводится декомпозицией правых частей выражений (14) и (15) с использованием формул из [6, (22)].

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА НА ПОДАЛГЕБРЕ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

Рассмотрим также подпространство $V_0(\mathsf{T}^3)$ в алгебре токов $V(\mathsf{T}^3)$, состоящее из векторных полей, в разложении в ряд Фурье которых участвуют только простые гармоники вида $\cos k\varphi$ (элементы базиса (9) вида e_k^i). Для элементов из $V_0(\mathsf{T}^3)$ в разложении (11) ненулевыми являются только коэффициенты $g_{0,i}(t), g_{k,i}(t)$.

Легко проверить, что векторные поля из $V_0(\mathsf{T}^3)$ образуют подалгебру в алгебре токов $V(\mathsf{T}^3)$. Пространство $V_0(\mathsf{T}^3)$ является замкнутым не только относительно операторов присоединенного действия элементами из $V_0(\mathsf{T}^3)$ (свойство подалгебры), но также относительно операторов коприсоединенного действия (последнее вытекает из формулы для оператора коприсоединенного действия (7)).

Для такого типа подалгебр в алгебре токов произвольное решение m(t) уравнения Л-Л, у которого вектор начальных условий m(0) лежит в подалгебре $V_0(\mathsf{T}^3)$, будет оставаться в подалгебре $V_0(\mathsf{T}^3)$ при всех t, для которых это решение определено.

Предложение 3. Для элементов из $V_0(\mathsf{T}^3)$ получаем следующую форму эволюционных уравнений их коэффициентов разложения по базису $\{e_k^i\}$.

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} = -\frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a+|k|^2)} \gamma(i,j) \sum_{l,j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}} \nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right)$$
(21)

Здесь, как и выше, получим асимптотические формулы для эволюционных уравнений. Для этого также фиксируем L > 0 и введем следующие частичные суммы:

$$P_{k,i,L} = -\frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a+\left|k\right|^2)} \gamma(i,j) \sum_{|l| \le L, j} g_{l,j} \left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}} \mu_{k,l} g_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}} v_{k,l} g_{\overline{k-l},s} \right)$$

$$(22)$$

Civil Aviation High Technologies

Предложение 4. Для уравнений (21) получаем следующие асимптотические выражения эволюционных уравнений при $|l| \to \infty$.

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} = P_{r,i,L} - \frac{\lambda_k}{4} \sqrt{(a + |k|^2)} \gamma(i,j) \sum_{|l| > L,j} g_{l,j} \left((a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{k+l,s} + (-a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2})) g_{\overline{k-l},s} \right)$$
(23)

выводы

Для уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе вычислен явный вид эволюционных уравнений на коэффициенты Фурье-разложений его решений. Для этого использованы вычисленные ранее операторы, представляющие суммы операторов присоединенного и коприсоединенного действия для алгебры токов на трехмерном торе с нестандартным коммутатором.

Установленное ранее свойство компактности указанных операторов суммы (в то время как по отдельности их составляющие оператор присоединенного и оператор коприсоединенного действий не являются даже непрерывными) позволило получить асимптотическую форму для уравнения Ландау — Лифшица на трехмерном торе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Алексовский В.А., Лукацкий А.М.** Нелинейная динамика намагниченности ферромагнетиков и движение обобщенного твердого тела с группой токов // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т. 85, № 1. С. 115–123.
- **2.** Lukatsky A.M. On the geometry of current group and a model of the Landau Lifschitz equation // Lie groups and Lie Algebras / B.P. Komrakov et al.(eds.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. Pp. 425–433.
- **3. Арнольд В.И., Хесин Б.А.** Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.
- **4. Хесин Б.А., Вендт Р.** Геометрия бесконечномерных групп. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2014. 368 с.
- **5.** Лукацкий А.М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 175 с.
- **6. Лукацкий А.М.** О структуре действия коприсоединенного оператора на алгебре токов трехмерного тора // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 02. С. 117–125.
- **7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
- **8.** Lukatskii A.M. On the structure of spherical Lie vector fields and groups of diffeomorphisms and // Siberian Math. Zh. 1977. T. 28, No. 1. Pp. 161–173.
- **9. Temam R.** Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis // North Holland Publ. Comp., 1979.
- 10. Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry. 3rd ed. Springer-Verlag, 1966.

Vol. 21, No. 02, 2018

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Лукацкий Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИНЭИ РАН, lukatskii.a.m.math@mail.ru.

ON THE ASYMPTOTIC FORM OF THE LANDAU-LIFSHITZ EQUATION ON A THREE-DIMENSIONAL TORUS

Alexander M. Lukatsky¹

 1 Energy Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

We consider the Landau-Lifshitz equation on a three-dimensional torus. The equation is reduced to the form of the Euler equation for the geodesic left-invariant metric on the infinite-dimensional Lie algebra of the current group. The group of currents is given by a pointwise mapping of the three-dimensional torus into a three-dimensional orthogonal group. In Lie algebra we use the non-standard commutator introduced earlier. The solutions of the Landau-Lifshitz equation can be expanded in terms of the orthonormal basis of the left-invariant metric in the currents algebra. For the expansion coefficients of the solution of the Landau-Lifshitz equation, the explicit form of the evolution equations is deduced in the framework of the constructed model. To do this, we use the expressions obtained earlier for the sums of the adjoint and coadjoint action operators in an infinite-dimensional Lie algebra of currents with nonstandard commutator. The compactness property of the indicated sum operators makes it possible to obtain the asymptotic form of the Landau-Lifshitz equation on a threedimensional torus. Evolution equations are found on the subspace of flows consisting of vector fields whose Fourier expansions contain only simple harmonics of the form $\cos(k\varphi)$. Such vector fields form a subalgebra of the currents algebra which is also closed under the action of coadjoint operators. In this case, an arbitrary Landau-Lifshitz equation for which the vector of initial conditions lies in this subalgebra remains in it for all t for which this solution is defined. We note that to study the Landau-Lifshitz equation the currents algebra with the standard commutator turned out to be ineffective: in particular, the Landau-Lifshitz equation is not an Euler equation on the current algebra with a standard commutator. Thus, for the Landau-Lifshitz equation on the three-dimensional torus, the explicit form of the evolution equations for the coefficients of the Fourier expansion of its solutions by means of operators representing the sum of the operators of the adjoint and co-adjoint action of the current algebra on a three-dimensional torus with nonstandard commutator is obtained. Moreover, it is the property of compactness of the indicated sum operators (while, separately, their components, the operator of the adjoint action operator as well as the coadjoint one are not even continuous) made it possible to obtain the indicated asymptotic form.

Key words: currents algebra, Lie bracket, operator of the adjoint action, operator of the co-adjoint action, three-dimensional torus, the Landau-Lifshitz equation, asymptotics.

REFERENCES

- 1. Aleksovskiy V.A., Lukatskiy A.M. Nelineynaya dinamika namagnichennosti feromagnetikov i dvizhenie oboshyonnogo tverdogo tela s gruppoy tokov [Nonlinear dynamics of ferromagnets magnetization and motion of generalized solid body with the current group]. Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika [Theoretical and Mathematical Physics], 1990, vol. 85, No. 1, pp. 1090–1096. (in Russian)
- **2.** Lukatsky A.M. On the geometry of current group and a model of the Landau Lifschitz equation. Lie groups and Lie Algebras / B.P. Komrakov et al. (eds.). Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, 1998, pp. 425–433.
- **3. Arnold V.I., Khesin B.A.** *Topologicheskiye metody v gidrodinamike* [Topological methods in hydro-dynamics]. M.: MCCME Publ. 2007, 392 p. (in Russian)

- **4. Khesin B.**A., **Wendt R.** *Geometriya beskonechnomernyh grupp. Topologicheskiye metody v gidrodinamike* [The geometry of infinite-dimensional groups. Topological methods in hydrodynamics]. M.: MCCME, 2014, 368p. (in Russian)
- **5.** Lukatsky A.M. Strukturno-geometricheskiye svoystva beskonechnomrnykh grupp Li v primenenii k uravneniyam matematicheskoy fiziki [Structural and geometric properties of infinite dimensional Lie groups in the application to the equations of mathematical physics]. Yaroslavl: Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, 2010, 175p. (in Russian)
- **6.** Lukatsky A.M. On the structure of the operator coadjoint action for the current algebra on the three-dimensional torus. Civil Aviation High Technologies, 2017, vol. 20, no. 02, pp. 117–125.
- 7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1972, 496 p. (in Russian)
- **8.** Lukatskii A.M. On the structure of spherical Lie vector fields and groups of diffeomorphisms and. Siberian Math. Zh., 1977, vol. 28, no. 1, pp. 161–173.
- **9. Temam R.** Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North Holland Publ.Comp., 1979.
- 10. Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd ed., Springer-Verlag, 1966.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander M. Lukatsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Energy Research Institute of Russian Academy of Sciences, lukatskii.a.m.math@mail.ru.

Поступила в редакцию	23.11.2017	Received	23.11.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 514.7

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-114-121

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН УРАВНЕНИЯ КДВ-БЮРГЕРСА В ДИССИПАТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А.В. САМОХИН 1,2 , Ю.И. ДЕМЕНТЬЕВ 1

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия

 2 Институт проблем управления Российской академии наук, г. Москва, Россия

Работа является продолжением исследования, начатого в предшествующих работах авторов. В настоящее время теория нелинейных волн переживает бурное развитие, и ее результаты находят многочисленные практические применения. Можно упомянуть направление, связанное с изучением возникновения и эволюции ударных волн, уединенные волны, кинки, периодические и квазипериодические колебания (например – кноидальные волны) и многое другое. В этом ряду малоизученными остаются вопросы с движением солитонов в неоднородной среде; в настоящей статье рассматривается вопрос о простейшей модели такой среды: слоисто-неоднородной. Рассматривается поведение решений типа одиночной волны для уравнения КдВ-Бюргерса при различных видах диссипативной неоднородности среды. В работе исследованы разнообразные виды финитных препятствий, а также переход из диссипативной среды в свободную. Получены численные модели поведения решения. Моделирование проводилось при помощи математической программы Maple с использованием пакета PDETools. Рассмотренные задачи вычислительно очень трудоемки и требуют больших затрат машинного времени. Особо интересен случай увеличения высоты препятствия при сохранении ширины. При анализе численных экспериментов наблюдается неожиданный эффект увеличения высоты волны при увеличении высоты препятствия, что может являться предметом дальнейшего исследования. Вместе с этим при увеличении высоты препятствия увеличивается рябь, бегущая впереди волны. Отметим, что в предыдущих работах авторов была описана другая ситуация, связанная с возникновением ряби. Если же при сохранении высоты препятствия снова увеличим ширину, то ожидаемо наблюдается существенное уменьшение амплитуды волны, что продемонстрировано на модельных графиках. Таким образом, в работе, имеющей экспериментальный характер, продемонстрированы новые интересные свойства движения квазисолитонов в зависимости от вида и размера диссипативных препятствий на основе численного моделирования.

Ключевые слова: уравнение КдВ-Бюргерса, солитон, неоднородная диссипативная среда.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория нелинейных волн переживает бурное развитие, и ее результаты находят многочисленные практические применения. Можно упомянуть направление, связанное с изучением возникновения и эволюции ударных волн [2–4, 10–12], уединенные волны [1, 5], кинки, периодические и квазипериодические колебания (например – кноидальные волны [6–8]) и многое другое. В этом ряду малоизученными остаются вопросы, связанные с движением солитонов в неоднородной среде. В настоящей статье рассматривается вопрос о простейшей модели такой среды: слоисто-неоднородной.

Будем рассматривать уравнение Кортевега – де Фриза – Бюргерса (КдВ-Б)

$$u_{t} = \varepsilon^{2} u_{xx} + 2u u_{x} + \lambda u_{xxx},$$

описывающее волны в среде с дисперсией и диссипацией. При $\varepsilon=0$ диссипация отсутствует и получившееся уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 2uu_x + \lambda u_{xxx}$$

в качестве решения дает уединенные волны (солитоны).

На рис. 1 изображен квазисолитон (солитон, сдвинутый по высоте), заданный формулой $-0,375 \tanh^2(0,25x+3,75)-0,25$. Коэффициент λ в уравнении взят единицей. Переменную x рассмотрели на отрезке [-40;10]. Подробнее о понятии солитонов и принципах их движения см. в работе [1].

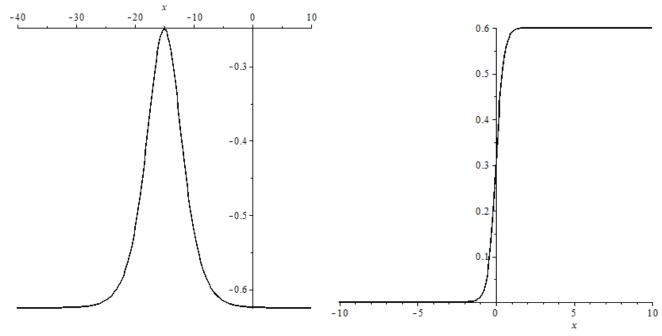


Рис. 1. Солитонное решение уравнения КдВ-Б **Fig. 1.** Soliton solution of the KdV-B equation

Рис. 2. График коэффициента диссипации **Fig. 2.** Graph of the dissipation coefficient

Целью настоящего исследования является изучение поведения (квази) солитонов, которые при движении по недиссипативной среде встречают финитные препятствия с постоянной диссипацией, разные по высоте и толщине, а также переход волны из диссипативной среды в недиссипативную. Физически это можно представить, как луч света, встречающий на своем пути частично поглощающий слой разной формы или свет, пробивающийся через стекло или лед.

Предлагаемая работа является продолжением исследований авторов [2, 4, 5] и работы [3]. Расчеты выполнялись в среде Maple с использованием пакета PDETools.

Ситуация, когда сначала диссипации нет, а затем диссипация равна константе, описывается уравнением

$$u_t = 0, 3 \cdot (1 + \tanh(2x)) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

В этом случае для диссипативного коэффициента $0,3 \cdot (1 + \tanh(2x))$ (рис. 2) при переходе через ноль получаем смену типа уравнения с уравнения КдВ на уравнение КдВ – Бюргерса (см. [5]).

На рис. З показано движение квазисолитона при изменении типа уравнения для следующих начально-граничных условий:

$$u(x,0) = -0.375 \tanh^{2}(0.25(-t+x)+3.75) - 0.25\big|_{t=0};$$

$$u(-20,t) = -0.375 \tanh^{2}(0.25(-t+x)+3.75) - 0.25\big|_{x=-20};$$

Civil Aviation High Technologies

$$u'_x(45,t) = 0;$$
 $u'_x(-20,t) = (-0,375 \tanh^2(0,25(-t+x)+3,75)-0,25)'_x|_{x=-20}.$

До препятствия квазисолитон движется слева направо, практически не меняя формы и размера. Затем волна начинает экспоненциально затухать [5].

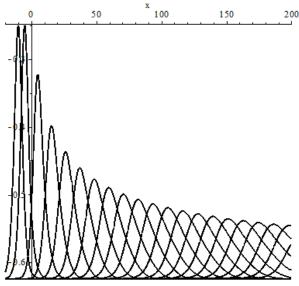


Рис. 3. Решения при t = 5 и от 10 до 200 с шагом 10 **Fig. 3.** Solutions at t = 5 and t = 10 to 200 by step 10

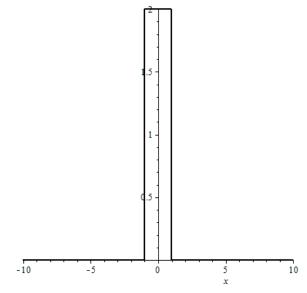


Рис. 4. График коэффициента диссипации **Fig. 4.** Graph of the dissipation coefficient

ЗАВИСИМОСТЬ ВОЛНЫ ОТ ФИНИТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Рассмотрим, как меняется поведение волны после встречи с финитным диссипативным препятствием в зависимости от ширины и высоты препятствия.

Как показано в [5] для уравнения

$$u_{t} = \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|}\right) \cdot u_{xx} + 2uu_{x} + u_{xxx}$$

с диссипативным коэффициентом $\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|}$ (рис. 4) и с начально-граничными условиями

$$u(x,0) = 0.375 \tanh^{2}(0.25(-t+x)+3.75) + 0.25\big|_{t=0};$$

$$u(-20,t) = 0.375 \tanh^{2}(0.25(-t+x)+3.75) + 0.25\big|_{x=-20};$$

$$u'_{x}(200,t) = 0; \quad u'_{x}(-20,t) = \left(0.375 \tanh^{2}(0.25(-t+x)+3.75) + 0.25\right)'_{x}\big|_{x=-20},$$

после прохождения препятствия волна сначала уменьшает амплитуду, а затем происходит небольшое ее увеличение и стабилизация.

Civil Aviation High Technologies

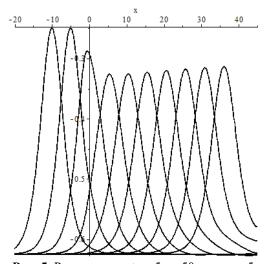


Рис. 5. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 5.** Solutions at t = 5 to 50 by step 5

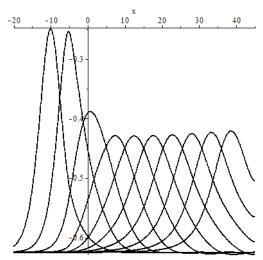


Рис. 6. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

Изменим теперь ширину диссипативного препятствия. Для уравнения

$$u_{t} = \left(\frac{x+5}{|x+5|} - \frac{x-5}{|x-5|}\right) \cdot u_{xx} + 2uu_{x} + u_{xxx}$$

движение волны показано на рис. 6, а для уравнения показано на рис. 7. Прослеживается явная зависимость степени затухания волны от ширины препятствия.

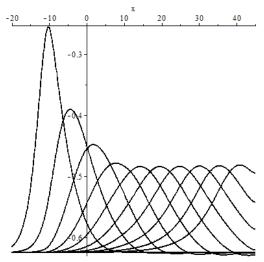


Рис. 7. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 7.** Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

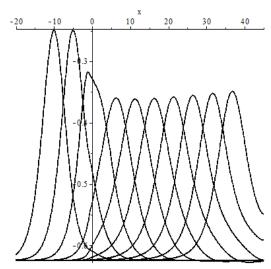


Рис. 8. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

$$u_{t} = \left(\frac{x+10}{|x+10|} - \frac{x-10}{|x-10|}\right) \cdot u_{xx} + 2uu_{x} + u_{xxx}$$

Интересен также случай увеличения высоты препятствия при сохранении ширины. На рис. 8, 9, 10 приведены графики поведения волн соответственно для следующих трех уравнений:

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\begin{split} u_t &= 20 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}, \\ u_t &= 200 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}, \\ u_t &= 2000 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}. \end{split}$$

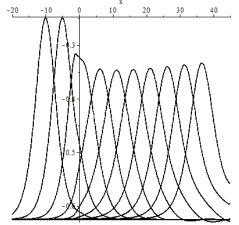


Рис. 9. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 9.** Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

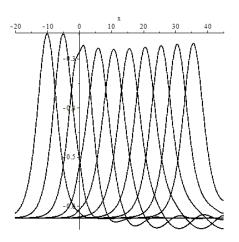


Рис. 10. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 10.** Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

Наблюдается неожиданный эффект увеличения высоты волны при увеличении высоты препятствия, что может являться предметом дальнейшего исследования. Вместе с этим, при увеличении высоты препятствия увеличивается рябь, бегущая впереди волны. В работе [5] была описана другая ситуация, связанная с возникновением ряби. Если же при сохранении высоты препятствия снова увеличим ширину, то ожидаемо наблюдается существенное уменьшение амплитуды волны, что продемонстрировано на рис. 11, 12 соответственно для уравнений

$$u_{t} = 20 \cdot \left(\frac{x+5}{|x+5|} - \frac{x-5}{|x-5|}\right) \cdot u_{xx} + 2uu_{x} + u_{xxx}, \quad u_{t} = 20 \cdot \left(\frac{x+10}{|x+10|} - \frac{x-10}{|x-10|}\right) \cdot u_{xx} + 2uu_{x} + u_{xxx}.$$

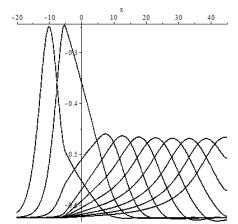


Рис. 11. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 11.** Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

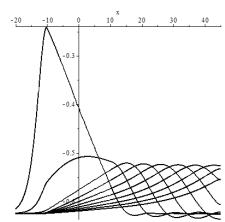


Рис. 12. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5 **Fig. 12.** Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

Civil Aviation High Technologies

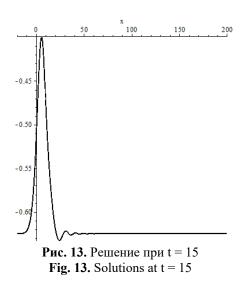
ПЕРЕХОД ИЗ ДИССИПАТИВНОГО СЛОЯ В НЕДИССИПАТИВНЫЙ

Теперь рассмотрим случай перехода волны из диссипативного слоя в недиссипативный. Такую ситуацию можно описать уравнением

$$u_t = 0, 3 \cdot (1 + \tanh(-2x)) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

Начальные и граничные условия такие же, как в предыдущем пункте.

После выхода из диссипативного слоя амплитуда волны начинает увеличиваться и одновременно с этим увеличивается рябь, бегущая перед волной. Данная ситуация хорошо иллюстрируется приведенным примером в два различных момента времени (рис. 13, 14).



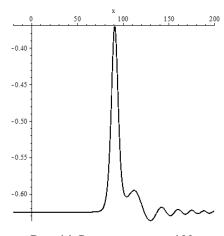


Рис. 14. Решение при t = 100 **Fig. 14.** Solutions at t = 100

Таким образом, в работе продемонстрированы новые интересные свойства движения квазисолитонов в зависимости от вида и размера диссипативных препятствий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.** Нелинейные волны: учебное пособие для вузов. М.: Физматлит, 2000. 272 с.
- **2. Самохин А.В.** Решения уравнения Бюргерса с периодическим возмущением на границе // Научный Вестник МГТУ ГА. 2015. № 220. С. 82–87.
- **3. Dubrovin B., Elaeva M.** On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. Available at: https://arxiv.org/pdf/1301.7216v1.pdf (accessed 30.01.2013).
- **4. Самохин А.В., Дементьев Ю.И.** Галилеево-инвариантные решения уравнения КдВ-Бюргерса и нелинейная суперпозиция ударных волн // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 224. С. 24–33.
- **5.** Самохин А.В., Дементьев Ю.И. Моделирование решений уравнения КдВ-Бюргерса в неоднородной среде // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 02. С. 100–108.
- **6. Bleher P., Its A.** Asymptotics of the partition function of a random matrix model // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2005. Vol. 55. Pp. 1943–2000.
- 7. Brézin E., Marinari E., Parisi G. A non-perturbative ambiguity free solution of a string model. Volume 242, Issue 1, 31 May 1990, Pp. 35–38.

Vol. 21, No. 02, 2018

- **8.** Claeys T., Grava T. Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann-Hilbert approach // Comm. Math. Phys. Volume 286. 2009. Pp. 979–1009.
- **9. Dedecker P., Tulczyjev W.M.** Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Geometry, Topology, and Mathematical Physics // Lecture Notes in Math. Vol. 836. New York: Springer, 1980. Pp. 498–503.
- **10. Dubrovin B.** On universality of critical behavior in Hamiltonian PDEs // Amer. Math. Soc.Transl. Volume 224. Providence, RI, 2008. Pp. 59–109.
- 11. Bakholdin B. Non-dissipative and low-dissipative shocks with regular and stochastic structures in non-linear media with dispersion, in Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / eds. A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S.Mamaev, M.A. Sokolovskiy // IUTAM Bookseries 6. New York: Springer, 2008.
- 12. Bakholdin B., Il'ichev A. Radiation and modulational instability described by the fifth order Korteweg—DeVries equation, in Mathematical Problems in the Theory of Water Waves / eds. F. Dias, J.-M. Ghidaglia, J.-C. Saut // Contemp. Math. Volume 200. AMS. Providence, RI, 1996.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Самохин Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, a.samohin@mstuca.aero.

Дементьев Юрий Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики МГТУ ГА, ju.dementev@mstuca.aero.

MODELLING OF THE KdV-BURGERS EQUATION SOLITARY WAVES IN DISSIPATIVE NONHOMOGENEOUS MEDIA

Alexey V. Samokhin^{1,2}, Yuri I. Dementyev¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia ²Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

The work is a continuation of the research begun in previous works of the authors. At present, the theory of nonlinear waves is experiencing rapid development, and its results find numerous practical applications. One can mention the direction associated with the study of the origin and evolution of shock waves, solitary waves, kinks, periodic and quasiperiodic oscillations (for example, cnoidal waves) and many others. In this series, problems with the motion of solitons in a nonhomogeneous medium remain insufficiently studied; in this paper we consider the simplest model of such a medium: layered-inhomogeneous. The behavior of solutions of the single-wave type for the KdV-Burgers equation at various dissipative medium nonhomogeneities is considered. Various kinds of finite obstacles, as well as the transition from a dissipative medium to a free one are scrutinized. Numerical models of the solution behavior are obtained. The simulation was carried out using the Maple mathematical program through the PDETools package. The tasks considered in the paper are computationally-intensive and require a great deal of computer time. Of particular interest is the case of increasing the height of the obstacle while maintaining its width. When analyzing numerical experiments, the unexpected effect of increasing the wave height with increasing obstacle height is observed, and this may be the subject of further research. Along with this, as the height of the obstacle increases, ripples run ahead of the wave. It should be noted that in the previous work of the authors, another situation related to the appearance of a ripple was described. If, however, when the height of the obstacle remains constant, we again increase the width, then we observe an appreciable decrease in the wave amplitude, as demonstrated in the model charts. Thus, by this work of an experimental nature some new interesting properties of quasi-soliton motion are demonstrated on the basis of numerical simulation; they depend on the type and size of the dissipative obstacles.

Key words: Korteweg-de Vries-Burgers equation, soliton, nonhomogeneous dissipation medium.

REFERENCES

- **1. Ryskin N.M., Trubetskov D.I.** *Nelineiniye volny* [Nonlinear waves]. A text-book for Higher Educational Institutions. M.: Fizmatlit publ., 2000, 272 p. (in Russian)
- **2. Samokhin A.V.** Resheniya uravneniya Burgersa s periodicheskim vozmuscshtniyem na granitse [Solutions to the Burgers equation with periodic perturbation on boundary]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2015, No. 220, pp. 82–87. (in Russian)
- **3. Dubrovin B., Elaeva M.** On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. Available at: https://arxiv.org/pdf/1301.7216v1.pdf (accessed 30.01.2013).
- **4. Dementyev Y.I., Samokhin A.V.** *Galilyeyevo-invariantniye resheniya uravneniya Burgersa i nelineinaya superpostsiya udarnyh voln* [Galilean symmetry invariant solutions to the KDV-Burgers equation and the nonlinear superposition of shock waves]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2016, No. 224, pp. 24–33. (in Russian)
- **5. Dementyev Y.I., Samokhin A.V.** *Modelirovaniye resheniy uravneniya Burgersa v neodnorodnoy srede* [Modelling solutions to the KDV-Burgers equation in the case of nonhomogeneous dissipative media]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2017. vol. 20, no. 2, pp. 100–108. (in Russian)
- **6. Bleher P., Its A.** Asymptotics of the partition function of a random matrix model // Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 2005, vol. 55, pp. 1943–2000.
- 7. Brézin E., Marinari E., Parisi G. A non-perturbative ambiguity free solution of a string model., vol. 242, issue 1, 31 May 1990, pp. 35–38.
- **8.** Claeys T., Grava T. Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann-Hilbert approach. Comm. Math. Phys, vol. 286, 2009, pp. 979–1009.
- **9. Dedecker P., Tulczyjev W.M.** Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Geometry, Topology, and Mathematical Physics. Lecture Notes in Math. vol. 836. New York: Springer, 1980, pp. 498–503.
- **10. Dubrovin B.** On universality of critical behavior in Hamiltonian PDEs. Amer. Math. Soc.Transl., 2008, vol. 224, Providence, RI, pp. 59–109.
- 11. Bakholdin B. Non-dissipative and low-dissipative shocks with regular and stochastic structures in non-linear media with dispersion, in Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / eds. A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S.Mamaev, M.A. Sokolovskiy. IUTAM Bookseries 6. New York: Springer, 2008.
- 12. Bakholdin B., Il'ichev A. Radiation and modulational instability described by the fifth order Korteweg-DeVries equation, in Mathematical Problems in the Theory of Water Waves / eds. F. Dias, J.-M. Ghidaglia, J.-C. Saut. Contemp. Math. Volume 200. AMS. Providence, RI, 1996.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexey V. Samokhin, Doctor of Technical Sciences, Professor of Higher Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, a.samohin@mstuca.aero.

Yury I. Dementyev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Chair of Higher Mathematics, Moscow State Technical University of Civil Aviation, ju.dementev@mstuca.aero.

 Поступила в редакцию
 18.10.2017
 Received
 18.10.2017

 Принята в печать
 14.03.2018
 Accepted for publication
 14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 621.396

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-122-131

АНАЛИЗ СИНТЕЗАТОРА ЧАСТОТ С ДРОБНО-ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДЕЛЕНИЯ ДЕЛИТЕЛЯ

Б.И. ШАХТАРИН¹, Е.Г. КАЧАРМИНА¹, В.В. ВЕЛЬТИЩЕВ¹

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Современные информационные и управляющие системы невозможно представить без подсистем синхронизации. Это базовые элементы, обеспечивающие слежение за частотой и фазой опорных и информационных сигналов, оценку информационных параметров, синтез опорных и тактовых сигналов. Синтезаторы частот (СЧ) нашли широкое применение из-за высокой скорости установки частоты, широкого диапазона сетки частот и минимального фазового шума в области рабочей частоты. Поскольку с массовым появлением специализированных микропроцессоров и с усовершенствованием систем автоматического проектирования реализуемость и повторяемость изделий стала проще, все чаще используются цифровые СЧ. Наибольшее распространение получили СЧ с делителем частоты на цифровых элементах, который служит для преобразования сигнала опорного генератора и управляемого генератора. Для СЧ с использованием делителя с целочисленным коэффициентом деления в цепи обратной связи существует ряд ограничений, таких как нижняя частота СЧ и шаг частоты СЧ. Для решения этой проблемы используют делители с дробнопеременными коэффициентами деления в цепи обратной связи, которые позволяют получать требуемый диапазон и шаг сетки частот СЧ. Проанализированы методы повышения качества спектральных и динамических характеристик цифровых синтезаторов в заданной полосе частотных отстроек. Описаны принципы функционирования синтезаторов частот с делителем с дробно-переменным коэффициентом деления, приведены структурные схемы. Представлены результаты имитационного моделирования в системе Simulink программного пакета MATLAB синтезаторов частот с делителем с дробно-переменным коэффициентом деления, реализованным различными способами, проведен сравнительный анализ спектральных характеристик полученных моделей.

Ключевые слова: синтезатор частот, делитель с дробно-переменным коэффициентом деления, сигма-дельта модулятор, квантование, спектральные характеристики.

ПРИНЦИП РАБОТЫ СЧ С ДДПКД

Делители частоты с фиксированным или переменным коэффициентом деления (ДФКД и ДПКД) служат для преобразования сигнала ОГ и УГ к частоте, на которой работает детектор. ДПКД в цепи обратной связи служит также для переключения частоты СЧ [1, 2].

Для СЧ с импульсно-фазовой автоподстройкой (ИФАП), построенном с использованием ДПКД в цепи обратной связи, существует ряд ограничений, вытекающих из элементарных математических выражений, связывающих частоту ОГ, коэффициенты деления, диапазон и шаг выходных частот СЧ [3].

Например, для ОГ с частотой $f_{REF}=10M\Gamma u$, при коэффициенте деления R=50 частота работы импульсного частотно-фазового детектора (ИЧФД) будет равна $f_{REF}^*=10M\Gamma u/50=200\kappa\Gamma u$. Это дает ограничение на нижнюю частоту СЧ при $N_{\min}=1, f_{\min}=N_{\min}f_{REF}^*=200\kappa\Gamma u$, и на шаг частоты СЧ $\Delta f_{VCO}^*=f_{REF}^*=200\kappa\Gamma u$. Очевидно, что уменьшение шага частоты потребует пропорционального снижения частоты f_{REF}^* . И хотя решение, при котором для перестройки СЧ варьируется не только коэффициент деления в цепи обратной связи, но и делитель ОГ, технически реализуемо, но влечет необходимость динамического изменения параметров фильтра нижних частот (ФНЧ) и ухудшает динамические показатели синтезатора при переключении частот [4, 5]. Поэтому такое решение применяется только для неперестраиваемых СЧ с фиксированной выходной частотой. Кроме того, значение номи-

нала частоты выходного колебания СЧ может точно не выражаться дробным соотношением коэффициентов деления ДФКД $f_{VCO} = N \, / \, R \cdot f_{REF}$ с учетом ограничений на разрядность и быстродействие делителей N и R [6]. Для решения этой проблемы в одноконтурном СЧ с ИФАП используют делители с дробно-переменными коэффициентами деления в цепи обратной связи, которые позволяют получать требуемый диапазон и шаг сетки частот СЧ, хотя и при некотором ухудшении спектральной чистоты выходного колебания СЧ.

Для того, чтобы получать сигналы с частотами, не кратными частоте опорного генератора (точнее, частоте сравнения, т. е. $f_o = f_{o.e.}/R_{\mathcal{A}}$, где $R_{\mathcal{A}}$ — коэффициент деления ДФКД), используют СЧ с ДДПКД (делитель с дробно-переменным коэффициентом деления).

На рис. 1 представлена структурная схема СЧ с ДДПКД, который выделен пунктирным прямоугольником. В его состав входят цифровой накопитель кода фазы с объемом М, счетчик с ограничением q и цифровой делитель частоты [7, 8]. Принцип работы такого делителя основан на формировании дробной части коэффициента деления путем периодического варьирования во времени целочисленного коэффициента деления между значениями N и (N+1) таким образом, что среднее значение результата деления на временном интервале варьирования соответствует заданной дробной части.

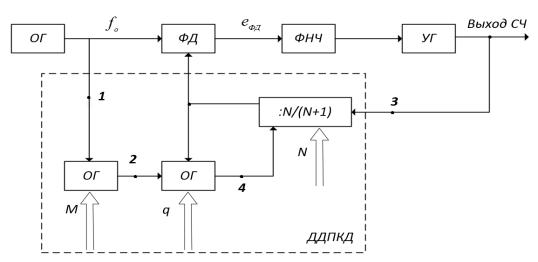


Рис. 1. Структурная схема СЧ с ДДПКД **Fig. 1.** Structural diagram of FS with FVCDD

Узел ДДПКД работает следующим образом: допустим, что в некоторый момент времени в накопителе фазы и в счетчике записаны нули. Каждый импульс с выхода управляемого генератора поступает на делитель частоты. Сигнал с выхода делителя поступает на счетчик. Пока число в счетчике не превосходит значение q, выходной сигнал этого счетчика (точка q) принимает значение q, так что коэффициент деления частоты составляет q, поэтому коэффициент деления принимает q, импульсов выходной сигнал счетчика изменяется на q, поэтому коэффициент деления принимает значение q. Когда НКФ заполняет свою емкость, q, q, село выходной импульс переполнения (точка q) сбрасывает счетчик в исходное состояние и процесс счета начинается вновь.

Таким образом, за M периодов импульсов ОГ проходит q периодов сигнала с частотой $f_{\rm вых}/(N+1)$ и (M-q) периодов сигнала с частотой $f_{\rm выx}/N$. Это логическое условие выражается следующим равенством:

$$\frac{M}{f_o} = q \frac{N+1}{f} + (M-q) \frac{N}{f}.$$

Vol. 21, No. 02, 2018

Выразив выходную частоту СЧ через входную, получим следующее соотношение:

$$f = (N + \frac{q}{M}) \cdot f_o.$$

На рис. 2 представлен график изменения фазы выходного сигнала во времени для СЧ с ДДПКД (сплошная линия) и среднее значение частоты (пунктирная линия). Синтезатор частот формирует колебание с заданной средней частотой f в виде последовательности отрезков вре-

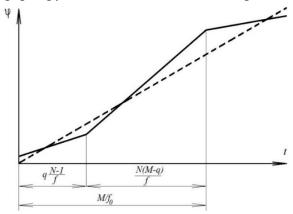


Рис. 2. График изменения фазы выходного сигнала СЧ с ДДПКД

Fig. 2. Diagram of the phase change of the output signal of FS with FVCDD

мени с немного отличающимся интервалом следования: на одном из них выходная частота Nf_o , а на другом $-(N+1)f_o$.

Используя эту технику формирования дробного коэффициента деления, можно более свободно выбирать частоту работы ИЧФД и получать очень маленький шаг сетки частот СЧ. Однако подобная манипуляция с коэффициентами деления вызовет появление в спектре составляющих (помех дробности), которые невозможно полностью убрать ФНЧ, а значит, заметно ухудшится спектральная чистота выходного сигнала. Если не учитывать сглаживание в ФНЧ, то сигнал СЧ станет частотно-модулированным по закону, соответствующему вариации коэффициента деления.

Уменьшение шумовой составляющей, вносимой ДДПКД, достигается использованием в структуре СЧ корректирующих звеньев, которые компенсируют помехи дробности до приемлемых значений, или рандомизацией переключения коэффициентов деления. Под рандомизацией понимается применение в алгоритме манипуляции коэффициентами деления способа, при котором переключение коэффициентов деления будет происходить случайным или псевдослучайным образом с большей частотой, чем в описанном ДДПКД, сохраняя при этом среднее соотношение долей N и N+1 на некотором интервале. В этом случае спектральная плотность мощности помех дробности распределяется в более широкой полосе частот («оверсэмплинг») или даже смещается в область высоких частот («нойзшейпинг»), что позволяет эффективно устранять эти помехи ФНЧ.

Аналоговые и комбинированные методы компенсации требуют применения прецизионных схем компенсации — цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), линий задержек, фазовращателей [9]. Применение сигма-дельта модулятора (СДМ) для управления ДДПКД позволяет обеспечить хорошую технологичность устройства при достаточно высоких потенциальных показателях качества формируемого сигнала.

Синтезатор частот, использующий ДДПКД с СДМ, позволяет использовать все достоинства ДДПКД, обеспечивая при этом приемлемые шумовые характеристики [10].

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЧ С ДДПКД

На основе теоретического материала о принципах работы синтезаторов частот с делителем частоты с дробно-переменным коэффициентом деления, представленного в предыдущем разделе, были составлены модели СЧ с блоком ДДПКД, реализованным различными способами, в среде MATLAB (Simulink).

Моделирование проведем для следующих значений частот и коэффициента деления:

$$f_{o.e.} = 10 M \Gamma u,$$

 $f_{c.y.e.} = 90 M \Gamma u,$
 $K_{y.e.} = 10 M \Gamma u / B,$
 $N = 11,$
 $\frac{q}{M} = 0,6.$

Исходя из заданных значений, в результате моделирования мы должны получить сигнал с частотой

$$f_{\text{\tiny BMX}} = (N + \frac{q}{M}) \cdot f_{\text{\tiny O.2.}} = (11 + 0, 6) \cdot 10 \, M\Gamma u = 116 \, M\Gamma u. \tag{1}$$

Используем полученные значения в модели и проведем моделирование.

На рис. 3 представлена модель СЧ с ДДПКД. ДДПКД состоит двух блоков — «накопитель» и «делитель». Из структуры модели видно, что делитель в схеме реализован не в одном элементе, а состоит из двух абсолютно идентичных каналов, отличающихся лишь параметром счетчиков — соответственно максимальный счет N и (N+1).

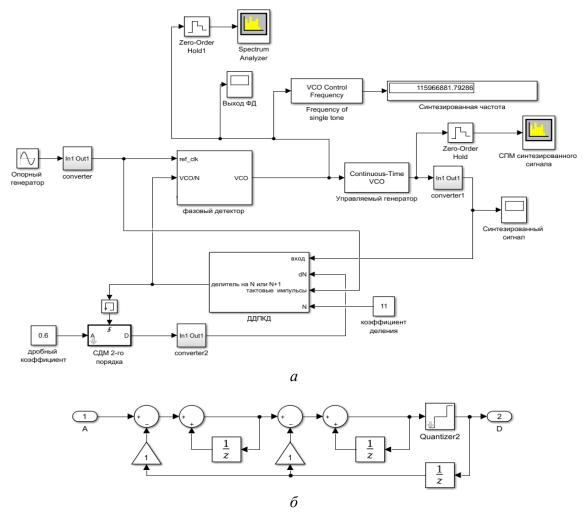


Рис. 3. Имитационная модель (a) СЧ с ДДПКД и (б) СДМ 2-го порядка **Fig. 3.** Simulation model (a) FS with FVCDDD and (b) second-order SDM

В качестве накопителя в блоке ДДПКД используем СДМ 2-го порядка. Принцип работы СДМ заключается в отслеживании величины заданного входного сигнала цифровой следящей системой с обратной связью, работающей по сигналу ошибки квантования входного сигнала [11]. Дискриминатор такой цифровой следящей системы определяет разность между величиной входного дискретного отсчета входного сигнала и его значением после квантования — ошибку квантования.

Цифровая следящая система стремится минимизировать эту ошибку и сформировать на выходе сигнал, среднее значение которого на некотором интервале будет равно значению входного сигнала (таким образом функционирует аналого-цифровой преобразователь с СДМ) [12]. Похожим образом в динамике может быть сформулирована задача слежения за постоянным входным сигналом с дробной частью (дробным коэффициентом деления) в условиях квантования выходного значения до целого (значения делителя N или N+1).

Результат моделирования схемы СЧ с СДМ показан на рис. 4.

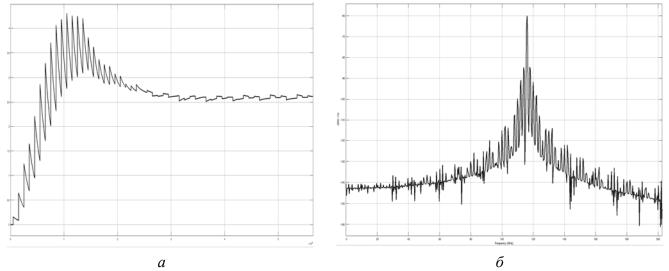
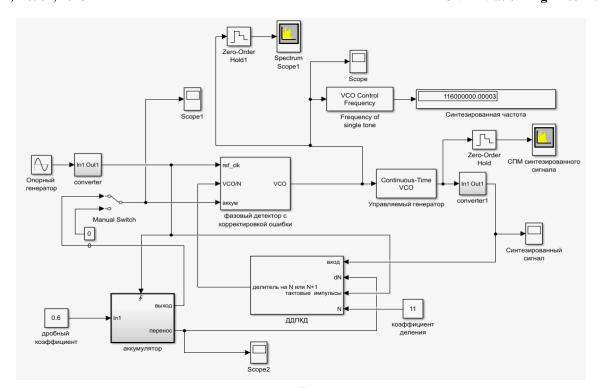


Рис. 4. СЧ с СДМ: a – выход ФНЧ; δ – СПМ синтезированной частоты **Fig. 4.** FS with SDM: (a) output of low-pass filter, (b) PSD of synthesized frequency

Заменим в модели блок СДМ цифровым накопителем с компенсацией дробной части (рис. 5, *a*), его принцип работы аналогичен СДМ 1-го порядка.

В структурной схеме на рис. 5, δ многобитный сигнал «Выход» — содержимое, а «Перенос» — сигнал переполнения накопителя. Такое переполнение можно рассматривать как результат работы квантователя в аналоговом СДМ.

Значение, сохраненное в накопителе, является по существу интегралом разности (ошибки) между частотой на выходе идеального дробного делителя, определяемой кодом на входе, и частотой на выходе реального делителя, определяемой сигналом с выхода переполнения накопителя. При этом интеграл частотной ошибки является мерой фазовой ошибки. Как и в СЧ с ДДПКД, так и в основе данного метода лежит переключение коэффициента деления по длительности периода времени, но, в отличие от простого ДДПКД, в СЧ с СДМ переключение от одного коэффициента деления к другому происходит по псевдослучайному закону, что обеспечивает подавление побочных составляющих в спектре выходного сигнала.



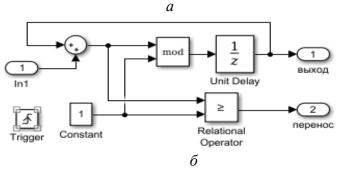


Рис. 5. СЧ с ДДПКД на цифровом накопителе: a — имитационная модель СЧ; δ — имитационная модель накопителя **Fig. 5.** FS with FVCDD on a digital storage device:

(a) imitation model of FS, (b) imitation model of the storage device

Значение на выходе цифрового накопителя поступает на фазовый детектор для компенсации дробной части коэффициента деления (рис. 6).

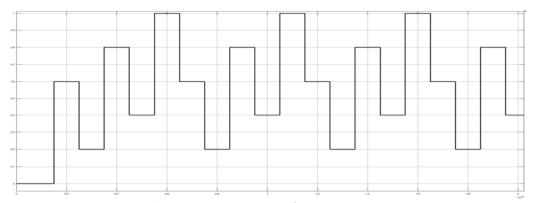


Рис. 6. Сигнал «Выход» цифрового накопителя **Fig. 6.** Signal "Exit" of the digital storage device

По результатам моделирования (рис. 7) видно, что среднее значение управляющего напряжения равно $U_{_{\mathit{VND}}} = 2,6~B.$

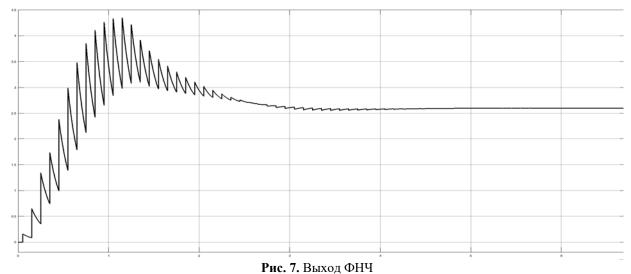


Fig. 7. Low Pass Filter exit

Отсюда следует, что выходная частота УГ

$$f_{BblX} = f_{C.y.2.} + K_{y.2.} \cdot U_{ynp} = 90 + 10 \cdot 2, 6 = 116 M \Gamma u,$$

что полностью совпадает с результатом расчета (1).

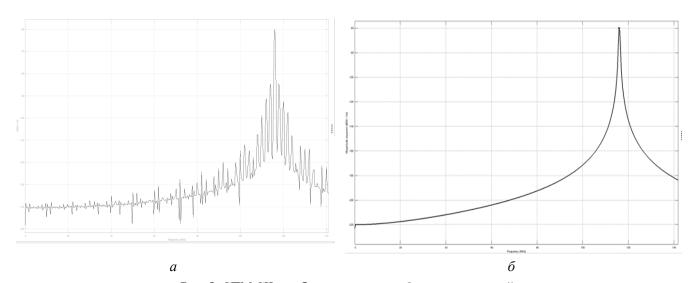


Рис. 8. СПМ СЧ: a – без компенсации; δ – с компенсацией **Fig. 8.** PSD FS: a) without compensation; b) with compensation

Из сравнения результатов моделирования и спектральных характеристик (рис. 4, 7, 8) СЧ с ДДПКД с компенсацией дробной части и без нее следует, что амплитуда колебания выходного сигнала фильтра уменьшилась, точность отстройки частоты увеличилась, но в то же время длительность переходного процесса увеличилась.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К основным результатам, полученным в работе, можно отнести анализ существующих методов повышения качества спектральных и динамических характеристик цифровых синтезаторов в заданной полосе частотных отстроек, а также анализ принципов функционирования синтезаторов частот с делителем с дробно-переменным коэффициентом деления, давший возможность предложить структурные схемы соответствующих устройств. Проведенный анализ позволяет осуществить имитационное моделирование синтезаторов частот с делителем с дробно-переменным коэффициентом деления, реализованное различными способами, и провести сравнительный анализ спектральных характеристик полученных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Шахтарин Б.И. Синтезаторы частот. М.: Горячая линия Телеком, 2007. 128 с.
- **2. Белов Л.А.** Формирование стабильных частот и сигналов: учебное пособие. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 224 с.
- **3. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К.** Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989. 232 с.
 - **4. Kroupa V.** Phase Lock Loops and Frequency Synthesis. 2003. 334 p.
- **5. Drucker E.** Model PLL Dynamics and Phase-Noise Performance // Microwaves and RF Magazine. 2000. Pp. 73–82.
- **6. Marques A., Steyaert M., Sansen W.** Theory of PLL fractional-N frequency synthesizers // Journal of Wireless Networks. Special issue. VLSI in Wireless Networks, 1997.
- **7. Романов С.К., Марков И.А.** Определение помех дробности в синтезаторах частот с системами ФАПЧ, использующих дельта-сигма модуляторы в дробных делителях частоты // Науч.-техн. сб. Теория и техника радиосвязи. Воронеж: Концерн «Созвездие», 2006. Вып. 1. С. 97–102.
- **8. Perrott M.H., Trott M.D.** A modeling approach for sigmadelta fractional-N frequency synthesizers allowing straightforward noise analysis // IEEE Journal of sold-state circuits. Vol. 37, No. 8. 2002.
- **9. Быков А.А., Сидоркина Ю.А., Ковальчук А.А.** Применение сигма-дельта модуляторов в дробных синтезаторах частоты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2011. № 2. С. 77-83.
- **10. Шахтарин Б.И., Быков А.А.** Сигма дельта модулятор // Научный Вестник МГТУ ГА. 2010. № 158. С. 156–161.
- **11. Голуб В.С.** Сигма-дельта модуляторы и АЦП // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2003. № 4. С. 25–32.
- **12. Махлин А**. Дельта-сигма модуляция: назад в будущее // Компоненты и технологии. 2010. № 11. С. 154—158.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Шахтарин Борис Ильич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автономных информационных и управляющих систем Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Shakhtarin@mail.ru.

Качармина Елена Геннадиевна, аспирант кафедры автономных информационных и управляющих систем Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Kacharmina.elena@gmail.com.

Вельтищев Виталий Викторович, кандидат технических наук, доцент Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, wwwwelt@mail.ru.

ANALISYS OF FRACTIONAL-N FREQUENCY SYNTHESIZERS

Boris I. Shakhtarin¹, Elena G. Kacharmina¹, Vitaliy V. Veltishev¹
Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

ABSTRACT

Modern information and control systems cannot be imagined without synchronization subsystems. These are the basic elements that provide tracking of the frequency and phase of reference and information signals, the evaluation of information parameters, and the synthesis of reference and clock signals. Frequency synthesizers (FS) are widely used due to the high speed of frequency setting, a wide range of frequency grids and minimal phase noise in the operating frequency range. Since with the mass appearance of specialized microprocessors and with the improvement of automatic design systems, the feasibility and repeatability of products has become simpler, digital FS are increasingly being used. The most widely used are FS with a frequency divider on digital elements, which serves to convert the signal of a reference oscillator and a controlled generator. For FS using a divisor with an integer division factor in the feedback loop, there are a number of limitations, such as the lower frequency of the FS and the frequency step of the FS. To solve this problem, divisors with fractional-variable division factors in the feedback loop are used, which allow to obtain the required range and the grid frequency step of the FS. The methods of improving the quality of spectral and dynamic characteristics of digital synthesizers in a given band of frequency detuning are analyzed. The principles of the FS operation with a divisor with a fractionalvariable fission coefficient are described, and structural schemes are given. The results of imitation simulation in the Simulink system of the software package MATLAB of frequency synthesizers with a divisor with a fractional-variable fission factor implemented in various ways are presented, and a comparative analysis of the spectral characteristics of the obtained models is carried out.

Key words: frequency synthesizer, fractional-N techniques, sigma-delta modulator, quantization, spectral characteristics.

REFERENCES

- **1. Shakhtarin B.I.** *Sintezatory chastot* [Frequency synthesizers]. Moscow: Hot line Telekom, 2007, 128 p. (in Russian)
- **2. Belov L. A.** Formirovanie stabilnyih chastot i signalov. Uchebnoe posobie dlya studentov vyisshih uchebnyih zavedeniy [Formation of stable frequencies and signals. Textbook for students of higher educational institutions]. Moscow: "Academy" Publ.centre, 2005, 224 p. (in Russian)
- 3. Levin V.A., Malinovskiy V.N., Romanov S. K. Sintezatoryi chastot s sistemoy impulsno-fazovoy avtopodstroyki [Frequency synthesizers with a pulse-phase of auto-tuning system]. Moscow: Radio and Communication, 1989, 232 p. (in Russian)
 - **4. Kroupa V.** Phase Lock Loops and Frequency Synthesis, 2003, 334 p.
- **5. Drucker E.** Model PLL Dynamics and Phase-Noise Performance, Microwaves and RF Magazine, 2000, pp.73–82.
- **6.** Marques A., Steyaert M., Sansen W. (1997) "Theory of PLL fractional-N frequency synthesizers", Journal of Wireless Networks, Special issue: VLSI in Wireless Networks.
- 7. Romanov S.K., Markov I.A. Opredelenie pomekh drobnosti v sintezatorah chastot s sistemami PLL, ispol'zuyushchih del'ta-sigma modulyatory v drobnyh delitelyah chastoty [Determination of interference of fractions in frequency synthesizers with PLL systems using delta-sigma modulators in fractional frequency dividers]. Nauchno-tehnicheskiy sbornik "Teoriya i tehnika radiosvyazi" [Scientific and technical collection "Theory and communication engineering"]. Voronezh: PLC «Concern «Sozvezdie», 2006, issue1, pp. 97–102. (in Russian)
- **8. Perrott M.H., Trott M.D.** A modeling approach for sigmadelta fractional-N frequency synthesizers allowing straightforward noise analysis. IEEE Journal of sold-state circuits, 2002, vol. 37, no. 8.

- 9. Bykov A.A., Sidorkina Yu.A., Kovalchuk A.A. Primenenie sigma-delta modulyatorov v drobnyih sintezatorah chastotyi [The use of sigma-delta modulators in fractional frequency synthesizers] // Vestnik MGTU im. Baumana Seriya "Priborostroyeniye" [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Instrument making"], 2011, no. 2, pp. 77-83 (in Russian)
- 10. Shakhtarin B.I., Byikov A.A. Sigma-delta modulyator [Sigma-delta modulator]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2010, no. 158, pp. 156–161. (in Russian)
- **11. Golub V. S.** *Sigma-delta modulyatory i ACP* [Sigma-delta modulators and ADC]. Technology and design in electronic equipment, 2003, no. 4, pp. 25-32 (in Russian)
- **12. Mahlin A.** *Del'ta-sigma modulyaciya: nazad v budushchee* [Delta-sigma modulation: back to the future]. Components and technologies, 2010, no. 11, pp. 154–158 (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

- Boris I. Shakhtarin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Autonomous Information and Control Systems Chair, Bauman Moscow State Technical University, Shakhtarin@mail.ru.
- **Elena G. Kacharmina**, Post-Graduate Student of the Autonomous Information and Control Systems Chair, Bauman Moscow State Technical University, Kacharmina.elena@gmail.com.
- Vitaliy V. Veltishev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, wwwwelt@mail.ru.

Поступила в редакцию	11.09.2017	Received	11.09.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Vol. 21, No. 02, 2018

АВИАЦИОННАЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

УДК 519.254

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-132-142

ПРИМЕНЕНИЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА ПОСТРОЕНИЯ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ НА СТОЙКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Н.Ю. КОМРАКОВ 1 , С.М. МУЖИЧЕК 2 , А.А. СКРЫННИКОВ 2

¹ ЦНИИ ВВКО Минобороны России, г. Тверь, Россия ² Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, г. Москва, Россия

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 16-08-00464а, 18-08-00060а

При решении задач прогнозирования стойкости элементов авиационных конструкций при столкновении с птицами, крупным градом, посторонними предметами необходимо знать зависимость вероятности пробития преграды от характеристик ударника и скорости удара. Результаты опытов имеют вид дихотомической переменной, имеющей лишь два возможных значения (преграда пробита или нет), поэтому искомая зависимость может быть представлена в виде логистической регрессии, задаваемой интегральной функцией логистического распределения. Для оценки параметров логистической регрессии при малом количестве опытов целесообразно использовать байесовский подход. Одной из составляющих байесовской оценки параметров является расчёт функции правдоподобия. Полученные выражения функции правдоподобия и её логарифма использовались для оценки параметров логистической регрессии методом максимального правдоподобия, который реализован с использованием метода Ньютона. Приведена расчётная итерационная схема метода максимального правдоподобия. По результатам опытных данных получены оценки, которые используются для сравнения с результатами, полученными с применением байесовского подхода. Рассмотрен частный случай – байесовская оценка параметра сдвига логистической кривой при заданном значении параметра масштаба, а также общий случай – оценка параметров сдвига и масштаба. В качестве априорного распределения для параметра сдвига использовано нормальное распределение, а для параметра масштаба – классическое (двухпараметрическое) гамма-распределение. Точечная оценка параметров логистической регрессии осуществлялась по модальному значению апостериорного распределения. Использование модального, а не среднего значения, позволило значительно сократить объём расчётов за счёт того, что в этом случае нет необходимости вычислять интегральную вероятность в знаменателе формулы Байеса.

Ключевые слова: бинарная регрессия, логистическая регрессия, функция правдоподобия, точечная оценка параметров, байесовский подход, стойкость элементов авиационных конструкций.

ВВЕДЕНИЕ

При проведении испытаний на стойкость элементов авиационных конструкций к внешним неблагоприятным воздействиям часто в качестве результатов опытов фиксируются альтернативные исходы – бинарные переменные: 1 – «успех», 0 – «неудача». Например, при действии ударника по дюралевой преграде фиксируется факт пробития; при действии ударника по топливному баку фиксируется факт возгорания и т. д. Задачей таких испытаний является определение вероятности «успешного» исхода в зависимости от условий опыта.

Например, при оценке стойкости элемента конструкции к действию ударника необходимо определить зависимость вероятности пробития преграды от скорости ударника при заданных значениях всех остальных параметров, характеризующих ударник и преграду. В этом случае независимая переменная x — скорость ударника; зависимая переменная y принимает зна-

чение 1, если ударник пробил преграду, и 0 в противном случае. По результатам опытов путём статистической обработки полученных данных необходимо определить значение скорости, при которой с вероятностью 0,5 ударник пробивает преграду, значения скоростей, при которых пробитие преграды становится практически невозможным и практически достоверным событиями, а также в целом — найти зависимость, по которой для произвольного значения скорости ударника можно найти вероятность пробития преграды. Эта зависимость должна изменяться в пределах от 0 до 1 и быть неубывающей функцией, поэтому в качестве такой зависимости может быть использована функция распределения F(x) некоторой непрерывной случайной величины X, так как функция распределения обладает всеми этими свойствами. На практике чаще всего используют логит- и пробит-функции (соответственно функции распределения логистического и нормального распределения), а также кусочно-линейную зависимость (функцию распределения равномерно распределённой случайной величины) [7]. Преимущество логит-функции (логистической регрессии) заключается в том, что она вычисляется проще по сравнению с пробит-функцией, а по сравнению с кусочно-линейной — лучше отражает физику процесса [9, 10].

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Рассмотрим в качестве функции $F(x_i) = P\{y_i = 1\}$ логистическую функцию. Логит-преобразование представляет собой логарифм отношения вероятности того, что случайное событие произойдёт, к вероятности того, что это событие не произойдёт (логарифм отношения шансов: $\ln(P\{y_i = 1\} \mid P\{y_i = 0\})$). Для линейного логит-преобразования

$$\ln \frac{F(x_i)}{1 - F(x_i)} = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

откуда

$$F(x_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}; \quad 1 - F(x_i) = \frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}.$$
 (1)

Выражение $F(x_i)$ можно записать в виде

$$F(x_i) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_i)}}. (2)$$

Использование логистического распределения (2) позволяет выразить его параметры — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение — через коэффициенты β_0 и β_1 . Сопоставляя выражение (2) и стандартную форму записи логистического распределения [1]

$$F(x_i) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi(x - \xi)}{\sigma\sqrt{3}}}},\tag{3}$$

где ξ и σ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно, получим

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3} \beta_1}.\tag{4}$$

Так как плотность логистического распределения симметрична относительно математического ожидания, то, решая (1) при F(x) = 0.5, найдём

$$\xi = -\frac{\beta_0}{\beta_1}.\tag{5}$$

И наоборот:

$$\beta_0 = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{3} \ \sigma};\tag{6}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3} \ \sigma}.\tag{7}$$

Стандартная форма записи логистической кривой удобна тем, что значение ξ соответствует скорости, при которой в 50 % случаев наблюдается положительный исход и в 50 % случаев – отрицательный исход; при скоростях $\xi - 3\sigma$ и менее практически всегда наблюдается отрицательный исход, а при скоростях $\xi + 3\sigma$ и более практически всегда наблюдается положительный исход.

Оценка неизвестных параметров β_0 и β_1 по данным выборки может быть проведена с использованием метода максимального правдоподобия, предполагая, что наблюдения независимы [2].

С учётом (1) функция правдоподобия будет иметь вид

$$\begin{split} L(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n; \beta_0, \beta_1) &= \prod_{i=1}^n F(x_i)^{y_i} [1 - F(x_i)]^{1 - y_i} = \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}} \right]^{y_i} \left[\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}} \right]^{1 - y_i}, \end{split} \tag{8}$$

а логарифм функции правдоподобия –

$$\ln L(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n;\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^n y_i(\beta_0 + \beta_1 x_i) - \ln \left[1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i} \right].$$

Продифференцируем логарифм функции правдоподобия по переменным $\,\beta_{_{\! 0}}\,$ и $\,\beta_{_{\! 1}}\colon$

$$\begin{split} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i (1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}) - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i (y_i (1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}) - e^{\beta_0 + \beta_1 x_i})}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}} \end{split}$$

Civil Aviation High Technologies

и приравняем производные нулю:

$$\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i}(1 + e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}}) - e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}}}{1 + e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}}} = 0; \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}(y_{i}(1 + e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}}) - e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}})}{1 + e^{\beta_{0} + \beta_{1}x_{i}}} = 0.
\end{cases}$$
(9)

Полученная система нелинейных уравнений может быть решена относительно переменных β_0 и β_1 методом Ньютона. Обозначим

$$f_1(\beta_0, \beta_1) = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0};$$
 $f_2(\beta_0, \beta_1) = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1}.$

В соответствии с методом Ньютона [3]

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix}^{(k)} - \, \boldsymbol{J}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{\beta}_0,\,\boldsymbol{\beta}_1) \\ f_2(\boldsymbol{\beta}_0,\,\boldsymbol{\beta}_1) \end{pmatrix}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где J — матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_0} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta_0} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} \end{bmatrix};$$

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_0} & -\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial \beta_0} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} \end{bmatrix};$$

$$|J| = \frac{\partial f_1}{\partial \beta_0} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} - \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial f_2}{\partial \beta_0}.$$

Элементы матрицы Якоби рассчитываются следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta_0^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^n \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i})^2} & -\sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i})^2} \\ -\sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i})^2} & -\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i})^2} \end{pmatrix}.$$

Решение в поэлементной форме имеет вид:

Vol. 21, No. 02, 2018

$$\begin{split} \boldsymbol{\beta}_0^{(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_0^{(k)} - \left[\frac{f_1}{\mid \boldsymbol{J} \mid} \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} - \frac{f_2}{\mid \boldsymbol{J} \mid} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \right]^{(k)}; \\ \boldsymbol{\beta}_1^{(k+1)} &= \boldsymbol{\beta}_1^{(k)} - \left[\frac{f_2}{\mid \boldsymbol{J} \mid} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} - \frac{f_1}{\mid \boldsymbol{J} \mid} \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\beta}_0} \right]^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{split}$$

В качестве примера рассмотрим результаты десяти опытов по пробитию преграды ударником (см. табл. 1).

Таблица 1 Table 1

i	$x_{_{i}}$	$y_{_i}$
1	988,9	1
2	1026,9	1
3	1024,5	1
4	1034,0	1
5	961,5	1
6	1022,9	1
7	1024,8	1
8	967,7	0
9	1067,2	1
10	1006,6	0

Начальное приближение можно выбрать достаточно грубо: $\xi=1000;~\sigma=100;$ по формулам (6), (7) найдём значения параметров: $\beta_0^{(0)}=-18;~\beta_1^{(0)}=0,018.$ Решая систему (9) методом Ньютона, уже через 4 шага находим значения оценок неизвестных параметров: $\beta_0^*=-37,0324;$ $\beta_1^*=0,0383.$ Теперь по формулам (4), (5) можно найти значения оценок параметров стандартной формы записи логистической кривой: $\xi^*=966,707;~\sigma^*=47,348.$ График полученной по результатам опытов зависимости (1) приведён на рис. 1.

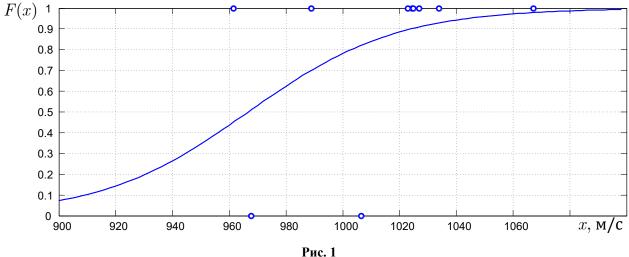


Fig. 1

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

В условиях относительно малых выборок заметным преимуществом по сравнению с классическими методами (метод максимального правдоподобия, метод моментов и др.) обладает байесовский подход [4, 5]. Байесовская оценка базируется на априорной информации об оцениваемых параметрах и на данных экспериментов. Априорная информация задаётся в виде распределения вероятностей неизвестного параметра как степень уверенности статистика в том, что этот параметр примет то или иное значение, ещё до начала сбора данных. Новая информация, поступающая с данными результатов экспериментов, позволяет пересмотреть это распределение, переходя от априорного к апостериорному распределению [6].

При байесовском подходе к оценке параметров логистической регрессии принимается, что параметры β_0 и β_1 являются случайными величинами и для них задаётся априорное распределение — распределение, полученное на основе данных предыстории или на основании суждений [5].

Рассмотрим сначала частный случай, когда параметр σ логистического распределения известен; тогда по формуле (7) можно найти значение параметра β_1 , т. е. в рассматриваемом случае β_1 – величина известная.

Множество возможных значений параметра ξ — множество действительных чисел. Примем априорное распределение параметра ξ нормальным с числовыми характеристиками m_{ξ} и σ_{ε} . Тогда из (5) получим

$$\beta_0 = -\beta_1 \xi \,, \tag{10}$$

следовательно,

$$M[\beta_{\scriptscriptstyle 0}] = -\beta_{\scriptscriptstyle 1} m_{_\xi}; \qquad \sigma[\beta_{\scriptscriptstyle 0}] = \beta_{\scriptscriptstyle 1} \sigma_{_\xi}. \label{eq:mass_mass_mass}$$

Так как априорное распределение случайной величины ξ — нормальное, то и β_0 как линейная функция случайного аргумента также будет иметь нормальное распределение:

$$f(\beta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_1 \sigma_{\varepsilon}} \exp\left\{ -\frac{(\beta_0 + \beta_1 m_{\varepsilon})^2}{2\beta_1^2 \sigma_{\varepsilon}^2} \right\}. \tag{11}$$

Обозначим: $p(y_1,...,y_n \mid x_1,...,x_n;\beta_0)$ — вероятность наблюдения значений $y_1,...,y_n$ при конкретном значении β_0 и при условии, что опыты проводились в точках $x_1,...,x_n$; это не что иное, как функция правдоподобия (8). Тогда теорему Байеса для рассматриваемого случая можно сформулировать следующим образом: если B_0 — множество возможных значений параметра β_0 с априорной плотностью распределения (11) на множестве B_0 и если $p(y_1,...,y_n \mid x_1,...,x_n;\beta_0)$ обозначает правдоподобие, то апостериорная плотность вероятностей $f(\beta_0 \mid x_1,...,x_n,y_1,...,y_n)$ задаётся выражением

$$f(\beta_0 \mid x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = \frac{p(y_1, ..., y_n \mid x_1, ..., x_n; \beta_0) f(\beta_0)}{p(y_1, ..., y_n \mid x_1, ..., x_n)},$$
(12)

Vol. 21, No. 02, 2018

где
$$p(y_1,...,y_n\mid x_1,...,x_n)=\int\limits_{\mathbf{B}_0}p(y_1,...,y_n\mid x_1,...,x_n;\boldsymbol{\beta}_0)f(\boldsymbol{\beta}_0)d\boldsymbol{\beta}_0$$
 .

Подставив (8), (11) в (12), получим

$$f(\beta_{0} \mid x_{1},...,x_{n}, y_{1},...,y_{n}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}}{1+e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}} \right]^{y_{i}} \left[\frac{1}{1+e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}} \right]^{1-y_{i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_{1}\sigma_{\xi}} \exp\left\{ -\frac{(\beta_{0}+\beta_{1}m_{\xi})^{2}}{2\beta_{1}^{2}\sigma_{\xi}^{2}} \right\}}{\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}}{1+e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}} \right]^{y_{i}} \left[\frac{1}{1+e^{\beta_{0}+\beta_{1}x_{i}}} \right]^{1-y_{i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \beta_{1}\sigma_{\xi}} \exp\left\{ -\frac{(\beta_{0}+\beta_{1}m_{\xi})^{2}}{2\beta_{1}^{2}\sigma_{\xi}^{2}} \right\} d\beta_{0}}.$$

$$(13)$$

В качестве точечной оценки β_0^* неизвестного параметра β_0 примем модальное значение случайной величины β_0 ; для этого необходимо найти такое значение аргумента β_0 , при котором функция $f(\beta_0 \mid x_1,...,x_n,\ y_1,...,y_n)$ (13) будет иметь максимальное значение. Тогда достаточно построить зависимость числителя формулы (13) от β_0 , а знаменатель можно не рассчитывать, так как он играет роль нормирующего множителя.

Оценка β_0^* неизвестного параметра β_0 по данным табл. 1 при значениях параметров априорного распределения $m_\xi=1000;~\sigma_\xi=100$ даёт значение $\beta_0^*=-35,448,$ что соответствует значению оценки $\xi^*=977,18.$

Перейдём теперь к общему случаю — байесовской оценке двух неизвестных параметров β_0 и β_1 . Так как для получения точечных оценок нет необходимости вычислять знаменатель формулы Байеса, задача значительно упрощается.

В этом случае нужно задавать совместную плотность распределения $f(\beta_0,\beta_1)$. Если параметры ξ и σ логистического распределения (3) независимы, то параметры β_0 и β_1 — уже зависимые (см. (10)), и, задаваясь априорным распределением параметров ξ и σ , нужно решать самостоятельную задачу определения совместного закона распределения $f(\beta_0,\beta_1)$. Поэтому задачу оценки параметров логистического распределения целесообразно решать в независимых переменных ξ и σ .

Функция правдоподобия $p(y_1,...,y_n \mid x_1,...,x_n;\xi,\sigma)$ будет иметь вид

$$p(y_{1},...,y_{n} \mid x_{1},...,x_{n};\xi,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{1 + e^{-\frac{\pi(x_{i} - \xi)}{\sigma\sqrt{3}}}} \right]^{y_{i}} \left[\frac{e^{-\frac{\pi(x_{i} - \xi)}{\sigma\sqrt{3}}}}{1 + e^{-\frac{\pi(x_{i} - \xi)}{\sigma\sqrt{3}}}} \right]^{1 - y_{i}},$$

$$(14)$$

а совместная плотность $f(\xi,\sigma)=f(\xi)f(\sigma)$ в силу их независимости.

Примем распределение величины ξ нормальным с параметрами m_{ξ} , σ_{ξ} . Распределение величины σ должно быть одним из распределений с возможными значениями на положитель-

Civil Aviation High Technologies

ной полуоси; примем классическое (двухпараметрическое) гамма-распределение [7, 8] с плотностью

$$f(\sigma) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \sigma^{\alpha-1} \exp\{-\lambda \sigma\},$$

где λ – параметр масштаба ($\lambda > 0$);

 α – параметр формы ($\alpha > 0$).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины σ , имеющей гаммараспределение, вычисляются по формулам $m_{\sigma}=\alpha \ / \ \lambda$; $D_{\sigma}=\alpha \ / \ \lambda^2$.

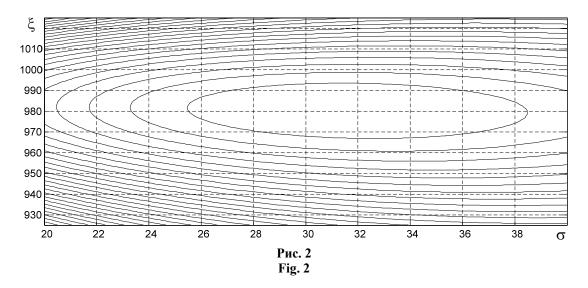
Тогда

$$f(\xi,\sigma) = \frac{\lambda^{\alpha} \sigma^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\xi} \Gamma(\alpha)} \exp\left\{-\frac{(\xi - m_{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2} - \lambda\sigma\right\}.$$
 (15)

В этом случае числитель формулы Байеса будет равен произведению функций $p(y_1,...,y_n\mid x_1,...,x_n;\xi,\sigma)$ и $f(\xi,\sigma)$, вычисляемых соответственно по формулам (14) и (15). Необходимо найти такие значения ξ^* и σ^* , при которых функция $p(y_1,...,y_n\mid x_1,...,x_n;\xi,\sigma)f(\xi,\sigma)$ принимает максимальное значение.

Ввиду того, что численные значения рассматриваемой функции на всей области практически возможных значений параметров ξ и σ могут быть очень малыми, то целесообразно строить график логарифма функции.

Оценки ξ^* и σ^* неизвестных параметров ξ и σ по данным табл. 1 при значениях параметров априорного распределения $m_\xi=1000;~\sigma_\xi=100,~\alpha=2,50;~\lambda=0,05$ даёт значения $\xi^*=980,6$ и $\sigma^*=31,44$. Линии равного уровня в окрестностях точки максимума приведены на рис. 2.



Приведённые на рис. 2 линии равного уровня подтверждают независимость переменных ξ и σ и в апостериорной функции распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование байесовского подхода даёт возможность учёта знаний, полученных в подобных испытаниях на стойкость элементов авиационных конструкций. Степень нашей уверенности в значениях скорости, при которой в 50 % случаев происходит пробитие преграды, скорости, ниже которой пробитие никогда не происходит, и скорости, выше которой пробитие достоверно, численно выражается в виде априорной вероятности.

Рассчитанные апостериорные функции распределения позволяют провести не только точечную, но и интервальную оценку неизвестных параметров логистической регрессии, дать рекомендации об условиях проведения опытов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1.** Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н. Одномерные непрерывные распределения: в 2-х ч. Ч. 2. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 600 с.
- **2. Буре В.М., Парилина Е.М.** Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Лань, 2013. 416 с.
- **3. Квасов Б.И.** Численные методы анализа и линейной алгебры. Использование Matlab и Simulink. СПб.: Лань, 2016. 328 с.
- **4. Айвазян С.А.** Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная эконометрика. 2008. №1 (9). С. 93–130.
- **5.** Справочник по прикладной статистике. В 2-х т. Т. 2 / под ред. Э. Ллойда, У. Лидермана. М.: Финансы и статистика, 1990. 526 с.
- **6.** Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1005 с.
- **7. Вадзинский Р.Н.** Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
- **8. Хастингс Н., Пикок Дж.** Справочник по статистическим распределениям. М.: Статистика. 95 с.
- **9.** О методике автоматизированного проведения наземных испытаний малокалиберных боеприпасов / С.М. Мужичек, А.А. Скрынников, С.А. Абрамов, В.В. Ефанов // Вопросы оборонной техники. Серия 16. 2017. Вып. 111–112. С. 48–53.
- **10. Мужичек С.М., Скрынников А.А., Абрамов С.А.** Автоматизированная технология наземных испытаний боеприпасов // Юбилейная всероссийская научно-техническая конференция «Авиационные системы в XXI веке». Москва, 26–27 мая 2017 г.: сборник докладов. М.: ГосНИИАС, 2017. С. 100–109.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Комраков Николай Юрьевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник ЦНИИ ВВКО Минобороны России, komr.valentina@yandex.ru.

Мужичек Сергей Михайлович, доктор технических наук, профессор, учёный секретарь ФГУП ГосНИИАС, msm19@yandex.ru.

Скрынников Андрей Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, начальник сектора ФГУП ГосНИИАС, a1260@mail.ru.

Civil Aviation High Technologies

APPLICATION OF BAYESIAN APPROACH OF LOGISTIC REGRESSION FORMATION WHILE PROCESSING THE TESTS RESULTS ON THE DURABILITY OF AIRCRAFTCONSTRUCTIONS ELEMENTS

Nikolay Yu. Komrakov¹, Sergey M. Muzhichek², Andrey A. Skrynnikov²

The Central Scientific Research Institute of Air Defense Forces, Tver, Russia

State Research Institute Of Aviation Systems, Moscow, Russia

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR) projects 16-08-00464a, 18-08-00060a

ABSTRACT

When solving the problems of predicting the durability of aircraft structures elements in case of a bird strike, in a collision with large hail, foreign objects, it is necessary to know the dependence of the probability of the barrier penetration on the characteristics of the impactor and the impact speed. The results of the experiments have the form of a dichotomous variable having only two possible values (the barrier is punched or not), so the required dependence can be represented in the form of a logistic regression given by the integral function of the logistic distribution. To evaluate the parameters of logistic regression with a small number of experiments, it is advisable to use the Bayesian approach. One of the components of the Bayesian parameter estimation is the calculation of the likelihood function. The resulting expressions for the likelihood function and its logarithm were used to estimate the logistic regression parameters using the maximum likelihood method, which was realized by Newton method. The calculated iterative scheme of the maximum likelihood method is given. Based on the results of experimental data, estimates are obtained that are used to compare with the results obtained by the Bayesian approach. A special case is considered – the Bayesian estimation of the shift parameter of the logistic curve for a given value of the scale parameter, and also a general case - the estimation of the shift and scale parameters. A normal distribution is used as a priori distribution for the shift parameter, and a classical (two-parameter) gamma distribution is used for the scale parameter. Point estimation of logistic regression parameters was carried out by the modal value of a posteriori distribution. Using the modal rather than the mean value, made it possible to significantly reduce the amount of calculations due to the fact that in this case there is no need to calculate the integral probability in the denominator of the Bayesian formula.

Key words: binary regression, logistic regression, likelihood function, point estimation of parameters, Bayesian approach, durability of aircraft structures elements.

REFERENCES

- **1. Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N.** *Odnomerniye nepreryvniye raspredeleniya* [Continuous univariate distributions]. In 2 vol. Vol. 2, M.: BINOM, *Laboratoria znaniy* [Lab of knowledge], 2010, 600 p. (in Russian)
- **2. Bure V.M., Parilina E.M.** *Teorija verojatnostej i matematicheskaja statistika* [Theory of probabilities and mathematical statistics]. SPb.: Lan', 2013, 416 p. (in Russian)
- **3. Kvasov B.I.** Chislennye metody analiza i linejnoj algebry. Ispol'zovanie Matlab i Simulink [Numeral methods of an analysis and linear algebra. Use of Matlab and Simulink]. SPb.: Lan', 2016. 328 p. (in Russian)
- **4. Ajvazjan S.A.** *Bajesovskij podhod v ekonometricheskom analize* [Bayesian approach in the econometrical analysis]. *Prikladnaja ekonometrika* [Applied econometrics], 2008, No 1 (9), pp. 93–130. (in Russian)
- **5.** Spravochnik po prikladnoy statistike [Handbook of Applied Statistics]. In 2 vol., Volume II. Statistics, Ed. by E.Lloid, Y.Liderman. M.: Finance and Statistics. 1990, 526 p. (in Russian)
- **6. Ajvazjan S.A., Mhitarjan V.S.** *Prikladnaja statistika i osnovy jekonometriki* [Applied statistics and fundamentals of econometrics]. M.: JuNITI, 1998, 1005 p. (in Russian)
- 7. Vadzinskij R.N. Spravochnik po verojatnostnym raspredelenijam [Reference book on probable distributions]. SPb.: Nauka, 2001, 295 p. (in Russian)

Vol. 21, No. 02, 2018

- **8. Hastings N.A.J., Peacock J.B.** *Spravochnik po statesticheskim raspredileniyam* [Handbook on Statistical Distributions]. M.: Statistics, 95p. (in Russian)
- 9. Muzhichek S.M., Skrynnikov A.A., Abramov S.A., Efanov V.V. *O metodike avtomatizirovannogo provedenija nazemnyh ispytanij malokalibernyh boepripasov* [On the method of automated ground testing of small-caliber ammunition]. *Voprosy oboronnoj tehniki Seria 16* [Milittary Enginery Issue 16: Counter-terrorism technical devices], 2017, pp. 48–53. (in Russian)
- 10. Muzhichek S.M., Skrynnikov A.A., Abramov S.A. Avtomatizirovannaja tehnologija nazemnyh ispytanij boepripasov [Automated technology of ground weapons trials]. Jubilejnaja vserossijskaja nauchno-tehnicheskaja konferencija «Aviacionnye sistemy v XXI veke» [Anniversary all-Russian scientific and technical Conference "Aviation systems in XXI century"]. M.: May 26-27th 2017 Sbornik dokladov [Collection of reports]. M.: FGUP "GosNIIAS" State Research Institute of Aviation Systems, pp.100–109. (in Russian)

INFOTMATION ABOUT THE AUTORS

Nikolay Yu. Komrakov, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Senior Researcher of Central Scientific Research Institute of Air Defense Forces, komr.valentina@yandex.ru.

Sergey M. Muzhichek, Doctor of Technical Sciences, Professor, Scientific Secretary, State Research Institute of Aviation Systems, msm19@yandex.ru.

Andrey A. Skrynnikov, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Head of Sector, State Research Institute of Aviation Systems, a1260@mail.ru.

Поступила в редакцию	25.10. 2017	Received	25.10. 2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

ТРАНСПОРТ

УДК 629.735

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-143-152

КОМПЛЕКСНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОЦЕССА ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

А.Р. АЛЕКСАНЯН 1 , И.А. ФАЙНБУРГ 2 , А.Д. ЕВДОКИМОВА 2

¹AO «Гражданские самолеты Сухого», г. Москва, Россия ²Московский государственный технический университет гражданской авиации г. Москва, Россия

В условиях современного мирового рынка процесс технической эксплуатации для поддержания требуемого уровня исправности парка воздушных судов в авиакомпаниях должен быть экономически выгодным в отношении трудовых, временных и материальных затрат. Решение данной задачи может быть достигнуто путем планирования и управления деятельностью авиапредприятий с целью повышения эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов гражданской авиации. Планирование и осуществление мероприятий, связанных с деятельностью авиапредприятий по улучшению показателей безотказности авиационной техники, безопасности и регулярности полетов, интенсивности использования воздушных судов и экономичности их процесса технической эксплуатации, требует организации совместной работы и взаимодействия разработчика, изготовителя и эксплуатанта воздушных судов. В данной статье обоснована необходимость в разработке технологии планирования и осуществления мероприятий, связанных с деятельностью авиапредприятий, позволяющей поэтапно по направлениям деятельности разработчика, изготовителя и эксплуатанта воздушных судов установить взаимосвязь и влияние на уровень исправности парка, тем самым повышая эффективность процесса технической эксплуатации путем всех возможных управляющих воздействий. Разработана комплексная технология повышения эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов, включающая мероприятия по направлениям «Надёжность воздушного судна», «Технология», «Персонал», «Оборудование», «Материалы», с целью повышения уровня исправности парка ВС. Комплексная технология представлена в виде маршрутной технологии с сокращенным описанием комплекса мероприятий по направлениям в маршрутной карте, с указанием входов и выходов на каждом этапе. Показаны преимущества применения комплексной технологии на примере улучшения одного из целевых показателей эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов.

Ключевые слова: эффективность процесса технической эксплуатации воздушных судов, исправность парка воздушных судов, комплексная технология, маршрутная технология, маршрутная карта повышения эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов.

ВВЕДЕНИЕ

Решение важнейшей проблемы науки и техники обеспечения эффективности эксплуатации воздушных судов (ВС) гражданской авиации (ГА) на основе интенсификации их использования при опережающем росте конечных результатов по сравнению с ростом затрат требует постоянных усилий специалистов авиапредприятий по выявлению и рациональному использованию резервов производства [1–3].

Важное место в решении этой задачи принадлежит подразделениям, занятым технической эксплуатацией ВС. Конечными результатами их работы является полное и своевременное обеспечение потребностей авиапредприятий в исправных ВС, повышение безопасности и регулярности полетов при минимальных затратах времени, труда и средств на техническое обслуживание и ремонт (ТОиР) ВС. Снижение этих затрат является важнейшей задачей науки и производства, поскольку они составляют заметную часть эксплуатационных расходов [4].

Процесс технической эксплуатации (ПТЭ) BC — последовательная во времени смена состояний эксплуатации в соответствии с принятой стратегией. К состояниям эксплуатации относятся: использование по назначению, различные виды ТОиР, транспортирование, хранение, ожидание поступления в каждое из этих состояний и др.

Эффективность ПТЭ ВС — наиболее общее, определяющее свойство любой целенаправленной деятельности, которое раскрывается через категорию цели, объективно выражается степенью достижения цели с учетом затрат ресурсов и времени.

Показатель эффективности ПТЭ BC – количественная характеристика одного или нескольких свойств эффективности ПТЭ BC.

 $Управление \ \Pi T \ni BC - выработка и осуществление целенаправленных управляющих воздействий на процессы (объект) <math>\Pi \ni JA$, ориентированных на сохранение соответствия JA действующим требованиям.

Объектом управления по эффективности является ПТЭ парка однотипных ВС соответствующего уровня: отрасли, региона, предприятия. Условия управления эффективностью ПТЭ ВС реализуются через установленные входные управляющих воздействий и выходных параметров, а также назначение методов управления эффективностью ПТЭ ВС (рис. 1).

Входными управляющими воздействиями при управлении эффективностью ПТЭ ВС являются внутренние резервы времени, труда и средств, используемые для совершенствования производства с целью повышения его эффективности.

Выходными параметрами являются показатели безопасности и регулярности полетов, безотказности авиационной техники, интенсивности использования, экономичности процесса их технической эксплуатации.

Взаимосвязь входных управляющих воздействий и выходных параметров устанавливается моделью ПТЭ ВС и аналитическими зависимостями показателей эффективностиот сокращения числа отказов, простоев самолетов, трудовых и материальных затрат на ТОиР.

Целевой подход к управлению эффективностью ПТЭ ВС позволяет расчленить генеральную цель системы технической эксплуатации ВС на ряд подцелей путем построения многоуровневой структуры целей. При управлении эффективностью на каждом уровне используется свой локальный критерий, не противоречащий глобальному (общему) критерию и соответствующий целям задач, решаемых на верхнем уровне. Существенным в целевом подходе является то, что при формировании целей управления на низших уровнях уже учитывается генеральная цель в виде подцели своего уровня.

Управление эффективностью ПТЭ ВС предусматривает эффективное и планомерное использование всех технических, экономических, организационных и социальных возможностей для достижения целей системы технической эксплуатации ВС [5, 6].

Главной целью системы технической эксплуатации ВС является полное и своевременное удовлетворение потребностей в исправных самолетах, обеспечение их безотказности и интенсивности использования по назначению при минимальных затратах времени, труда и средств на ТОиР.

Для достижения главной цели системы технической эксплуатации самолетов необходимо обеспечить осуществление совокупности взаимосвязанных основных целей, определяющих области и целевую направленность деятельности предприятий и их подразделений по повышению эффективности ПТЭ ВС.

Степень достижения главной цели управления ПТЭ ВС характеризуется системой показателей эффективности, включающей показатели:

- безотказности авиационной техники и безопасности полетов ВС;
- регулярности отправления ВС в рейсы;
- эффективности использования ВС по времени;
- экономичности ПТЭ ВС [7].

Civil Aviation High Technologies

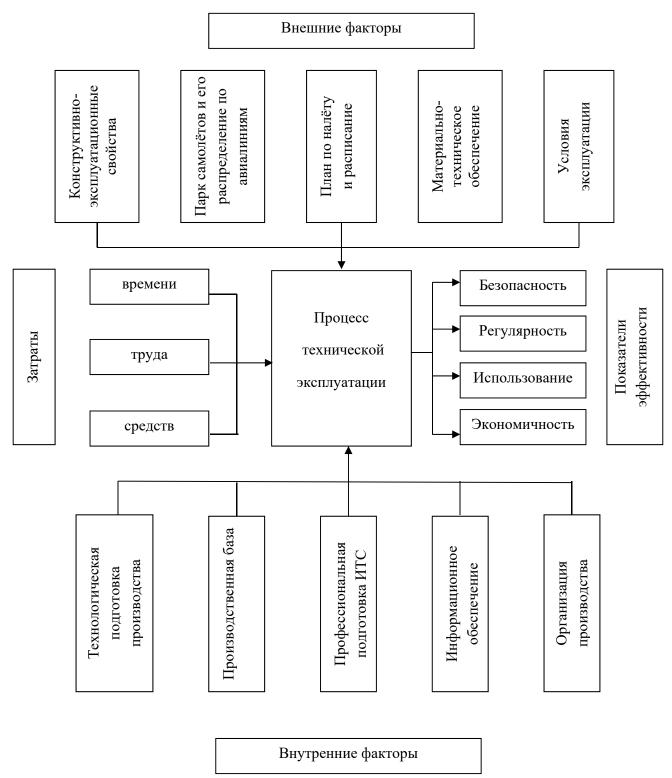


Рис. 1. Управляемый по эффективности ПТЭ ВС **Fig. 1.** Managed according to aircraft technical operation process efficiency

В процессе ПТЭ ВС ГА выполняется разнообразный комплекс мероприятий по поддержанию летной годности, связанных с их ТОиР, подготовкой к полетам. Комплекс мероприятий ТОиР ВС условно подразделяется на две группы: плановые профилактические работы, связанные с предупреждением отказов и повреждений, основной целью которых является поддержание работоспособного состояния; работы по обнаружению и устранению

внезапных отказов и повреждений, направленные на восстановление работоспособного состояния АТ [8].

Между данными группами работ на практике могут существовать различные соотношения в зависимости от принятых критериев оптимальности и стратегий проведения профилактики [1]. Но в условиях современного мирового рынка ПТЭ ВС помимо обеспечения заданного уровня безопасность и регулярности полетов должен быть экономическим выгодным в отношении затрат времени, труда и средств с целью поддержания парка ВС в исправном состоянии. Решение данного вопроса может быть достигнуто путем управления деятельностью авиапредприятий по повышению эффективности ПТЭ ВС.

Эффективность ПТЭ ВС является результатом работы авиапредприятия по поддержанию требуемого уровня безопасности полетов, регулярности полетов, интенсивности использования парка ВС, его исправности и экономичности эксплуатации [9].

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В процессе эксплуатации возникают отказы авиационной техники (AT), приводящие к задержкам или отменам рейсов, заменам BC, авиационным событиям (инцидентам) и простоям BC по причине неисправности. Всё это и многое другое ведет к увеличению времени пребывания парка в неисправном состоянии.

Анализ данной информации и распределение ее по системам BC позволяют определить не только наиболее уязвимые системы, но и компоненты BC, часто вызывающие ситуации Aircraft on ground (AOG).

АОG-ситуация – это ситуация, когда по техническим причинам BC не может эксплуатироваться и при этом не находится на плановом ТОиР. Встречаются такие ситуации, как АОG-дефект, АОG поставка компонентов, АОG ВС. Эти ситуации ведут к опозданиям, сбоям в графике и, как следствие, убыткам авиакомпаний, а сверхплановые простои BC, как правило, связаны с большими расходами. Для восстановления BC зачастую необходима замена определённого компонента или детали. Этот компонент должен быть доставлен как можно быстрее, и поэтому в логистике такая ситуация тоже рассматривается как АОG.

На основе проведенного анализа массива эксплуатационных сведений, взаимосвязей по-казателей эксплуатационной технологичности и с учетом аналитических практик эксплуатантов в качестве Целевого показателя эффективности ПТЭ принят показатель безотказности K_{1000} , представляющий собой количество отказов АТ на 1000 часов налета.

По результатам анализа статистической информации, предоставленной одной из российских авиакомпаний, эксплуатирующих самолет RRJ-95, обоснована и выбрана система оценки приоритетов ранжирования и формирования порядка проведения мероприятий по уменьшению показателя K_{1000} и систематически возникающих AOG ситуаций по компонентам.

Поскольку мы имеем дело с новым BC, находящимся в эксплуатации всего 6 лет, и, учитывая то, что уровень исправности парка напрямую влияет на эффективность ПТЭ, особенно важно разработать комплексную технологию повышения эффективности ПТЭ.

Комплексная технология повышения эффективности ПТЭ представляет собой совокупность технологий, направленных на повышение уровня исправности парка ВС с учетом влияющих факторов.

Данная комплексная технология включает в себя маршрутную технологию повышения эффективности ПТЭ, которая предусматривает выполнение комплекса мероприятий с сокращенным их описанием в маршрутной карте и указанием входов и выходов на каждом этапе.

Каждый этап, прописанный в маршрутной карте (рис. 2), представляет собой один из основных факторов, влияющих на исправность парка ВС. Воздействовать на каждый из этих фак-

торов можно за счет определенных входных управляющих воздействий, характерных для каждого фактора. Выходными параметрами, являющимися результатом реализации управляющих воздействий, будут показатели безотказности АТ, безопасности полетов, регулярности вылетов, интенсивности использования, экономичности ПТЭ, т. е. показатели эффективности ПТЭ, по которым и определяется степень достижения главной цели.

Суть комплексной технологии повышения эффективности ПТЭ ВС состоит в организации и учете совместной деятельности разработчика, изготовителя и эксплуатанта ВС, направленной на повышение уровня исправности парка. Следует отметить, что ряд факторов, таких как «Надёжность ВС», «Технология» и «Материалы», находятся в совместной ответственности разработчика, изготовителя и эксплуатанта ВС, а ряд факторов, таких как «Персонал» и «Оборудование», находятся в зоне ответственности только эксплуатанта, осуществляющего ТОиР ВС.

Маршрутная карта предусматривает воздействие на уровень исправности парка ВС не только за счет конструктивных доработок и качества сборки, влияющих на надежность ВС, но и за счет: рационального планирования работ, качественной обработки поступающих запросов в Центр поддержки заказчиков (ЦПЗ), исправления ошибок в технической документации, наличия достаточного количества квалифицированного инженерно-технического персонала (ИТП), своевременного удовлетворения потребности и необходимого количества средств наземного обслуживания (СНО) и оборудования, нормирования времени нахождения ВС в ангаре и расширения номенклатуры подпитывающего склада и его наполненность достаточным количеством партийных номеров изделий во избежание простоя ВС при ожидании запасных частей. Данные факторы находятся во взаимодействии друг с другом, изменение одного из факторов может повлечь изменения других, и не всегда в положительную сторону, поэтому важно комплексно рассматривать их влияние на эффективность ПТЭ ВС.

Данная технология позволит не только повысить исправность парка, но и учитывать экономическую составляющую ПТЭ ВС.

Эффективность ПТЭ ВС – это сложное комплексное свойство, характеризующее работу авиапредприятия по обслуживанию самолетов. Оно разделяется на ряд отдельных свойств, называемых «критериями эффективности» [4, 10]. Каждому критерию соответствуют определенные показатели эффективности ПТЭ ВС.

Под показателями эффективности ПТЭ ВС [7] понимается количественная характеристика свойств, определяющих его способность обеспечить выполнение стоящих перед авиационным предприятием задач. Взаимосвязь критериев и показателей эффективности имеет следующий вид.

- Безопасность полетов:
- количество отказов на 1000 часов налета K_{1000} .
- Регулярность вылетов:
- коэффициент регулярности вылетов P_{100TП}.
- Использование самолетов:
- коэффициент использования самолетов по назначению K_и;
- коэффициент использования самолетов в рейсах Кир;
- коэффициент возможного использования самолетов в рейсах Квир.
- Исправность парка самолетов:
- удельные суммарные простои на ТОиР К_П;
- коэффициент исправности Киспр.
- Экономичность ТОиР:
- удельная суммарная трудоёмкость ТОиР К_т.

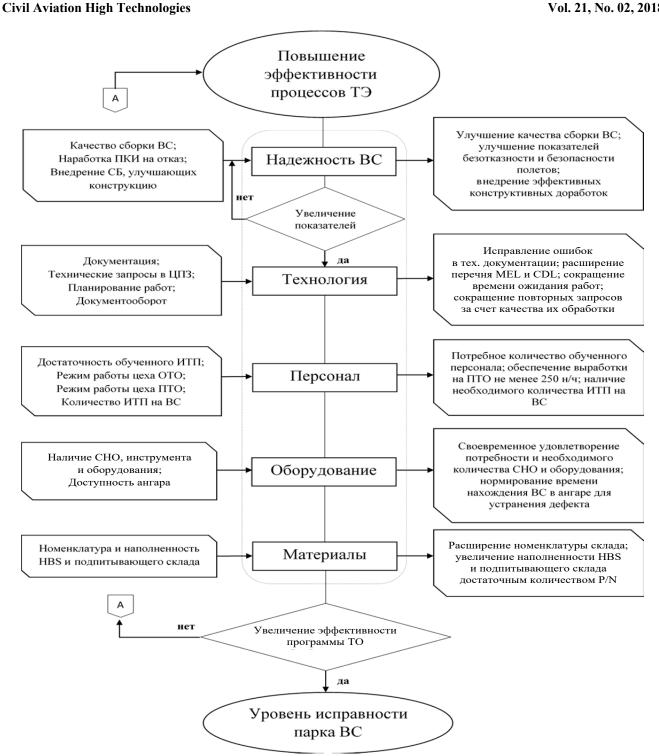


Рис. 2. Маршрутная карта повышения эффективности ПТЭ ВС Fig. 2. Road sheet of improvement of the process of aircraft technical operation efficiency

В общем виде влияние данных критериев на эффективность ПТЭ представим как зависимость

$$K_{\Theta\Phi,\Pi T\Theta} = f(K_{1000}; P_{100T\Pi}; K_{HC\Pi}; K_{HC\Pi P}; K_{\Theta KOHOM,TOHP}). \tag{1}$$

В качестве целевого выбран критерий эффективности ПТЭ – исправность парка Киспр, зависимость которого в соответствии с маршрутной картой имеет вид

Civil Aviation High Technologies

$$K_{\text{ИСПР}} = f(K_{1000}; \Pi_{\text{Технолог}}; \Pi_{\text{Персонал}}; \Pi_{\text{Оборуд}}; \Pi_{\text{Матер}}).$$
(2)

Целевым показателем исправности парка выбран показатель K_{1000} , для которого анализ статистических данных, накопленных при эксплуатации парка самолетов RRJ-95 в авиапредприятии позволил выявить следующую зависимость $K_{1000}(K_{\text{ИСПР}})$.

Как видно из графика (рис. 3), зависимость носит линейный характер.

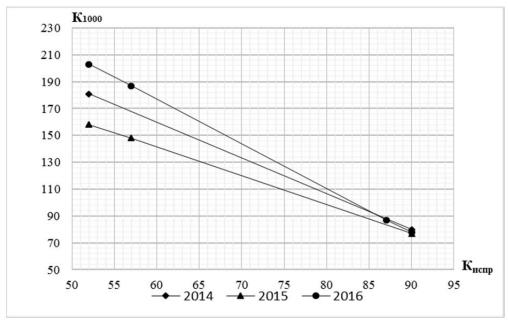


Рис. 3. График зависимости коэффициента K_{1000} от коэффициента $K_{\text{испр}}$ **Fig. 3.** The graph of dependence of coefficient K_{1000} to $K_{\text{испр}}$

Улучшение каждого из показателей, входящих в зависимость (2), ведет к улучшению показателя K_{1000} , что в свою очередь приводит к повышению исправности парка.

В результате применения разработанной комплексной технологии по увеличению уровня исправности парка ко всем системам ВС диапазон показателя K_{1000} достигнет 110-126 при повышении уровня исправности парка до 75 %, что является минимальным целевым показателем [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье обоснована необходимость в разработке комплексной технологии повышения эффективности процесса технической эксплуатации путём управляющих воздействий с целью повышения уровня исправности парка ВС.

Разработана маршрутная карта комплексной технологии с сокращенным описанием комплекса мероприятий по направлениям взаимодействия и указанием входов и выходов на каждом этапе.

Показаны преимущества применения комплексной технологии на примере улучшения одного из целевых показателей эффективности процесса технической эксплуатации воздушных судов – K_{1000} .

Данная технология позволит не только повысить исправность парка, но и учитывать экономическую составляющую процесса технической эксплуатации воздушных судов.

Для организации совместной работы и взаимодействия разработчика, изготовителя и эксплуатанта BC по повышению эффективности ПТЭ BC, в том числе уровня исправности пар-

ка ВС, целесообразно использовать предложенную комплексную технологию повышения эффективности ПТЭ ВС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Наставление по технической эксплуатации и ремонту авиационной техники гражданской авиации. НТЭРАТ ГА-93. Приказ ДВТ 20.06.94 № ДВ. М.: ДВТ, 1994. 318 с.
- 2. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. Т. 3. Эффективность технических систем / под ред. В.С. Авдуевского (предисл.) и др. М.: Машиностроение, 1988. 328 с.
- **3. Ицкович А.А., Файнбург И.А.** Управление процессами технической эксплуатации летательных аппаратов. Ч. 1. Системный анализ процессов технической эксплуатации летательных аппаратов: учеб. Пособие. М.: МГТУ ГА, 2012. 84 с.
- **4.** Смирнов Н.Н., Ицкович А.А. Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию. М.: Транспорт, 1987. 272 с.
- **5.** Далецкий С.В. Формирование эксплуатационно-технических характеристик воздушных судов гражданской авиации. М.: Воздушный транспорт, 2005. 417 с.
- **6.** Далецкий С.В., Деркач О.Я., Петров А.Н. Эффективность технической эксплуатации самолетов гражданской авиации. М.: Воздушный транспорт, 2002. 211 с.
- **7. Ицкович А.А., Файнбург И.А.** Показатели эффективности процессов поддержания летной годности воздушных судов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 178. С. 21–26.
- **8. Алексанян А.Р.** Маршрутная технология поэтапного формирования процедур поддержания летной годности воздушных судов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 178 (4). С. 78–84.
- **9. Ицкович А.А.** Повышение эффективности технической эксплуатации самолетов. М.: ЦНТИ ГА, 1982. 46 с.
- **10. Макаровский И.М.** Основы технической эксплуатации и диагностики авиационной техники: учеб. пособие. Самара: СГАУ, 2004. 115 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алексанян Армен Размикович, кандидат технических наук, главный специалист Инженерно-аналитического департамента АО «Гражданские самолёты Сухого», Armen-Aleksanyan@mail.ru.

Файнбург Инна Александровна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технической эксплуатации летательных аппаратов и авиадвигателей, innafayn@mail.ru.

Евдокимова Анастасия Денисовна, бакалавр МГТУ ГА по специальности «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и авиадвигателей», студент первого курса магистратуры МГТУ ГА, anastasie.evdokimova@gmail.com.

COMPLEX TECHNOLOGY OF IMPROVEMENT THE PROCESS OF AIRCRAFT MAINTENANCE EFFICIENCY

Armen R. Aleksanyan¹, Inna A. Fainburg², Anastasiia D. Evdokimova²

Sukhoi Civil Aircraft Company, Moscow, Russia

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

ABSTRACT

In the conditions of contemporary world market, the maintenance process to keep the required level of aircraft serviceability in airlines should be economically efficient in relation to labour, time and material expenses. The

Civil Aviation High Technologies

solution of the problem can be achieved by planning and managing the activity of airlines with the aim to improve the efficiency of civil aircraft maintenance process. Planning and implementation of activities for process improvement of aircraft maintenance efficiency in particular such factors as aircraft (A/C) reliability and safety, flight regularity and A/C timewise operation efficiency, A/C intensities and economy require collaboration and interaction of developer, manufacturer and operator. This work proves the need to develop the planning and performance technology of actions related to the airlines activity allowing step by step according to developer, manufacturer and operator activities to establish the cooperation and influence on aircraft serviceability, thereby increasing the maintenance process by all possible managing actions. The complex technology to improve the efficiency of aircraft maintenance process including activities on "A/C Reliability", "Technology", "Personnel", "Equipment", "Materials" has been developed with the aim to increase the A/C fleet serviceability level. The complex technology is represented as a route technology with brief description of destinations in the route chart with input/output indications at each stage. The advantages of complex technology application are shown in the example of improving one of the efficiency measures in aircraft maintenance process.

Key words: process of aircraft maintenance efficiency, fleet serviceability, complex technology, routing technology, route chart for increasing the efficiency of aircraft maintenance process.

REFERENCES

- 1. Nastavlenie po tehnicheskoy ekspluatatsii i remontu aviatsionnoy tehniki grazhdanskoy aviatsii. NTERAT GA [Regulations on Technical Operation and Repair of Aircraft Equipment in Civil Aviation]. Order DAT of 20.06.94 № DV- M.: DAT, 1994, 318 p. (in Russian)
- **2.** Nadezhnost I effektivnost v tehnike [Reliability and effectiveness in technology]. Reference in 10 volumes, vol.3. Efficiency of engineering systems. Ed. by V.S. Avduevsky and others. M.: Engineering, 1988, 328p. (in Russian)
- **3. Itskovich A.A., Fainburg I.A.** *Upravlenie protsessami tehnicheskoy ekspluatatsii letatelnih apparatov. Chast 1. Sistemniy analiz protsessov tehnicheskoy ekspluatatsii letatelnih apparatov* [Management of aircraft technical operation processes. Part I. The system analysis of aircraft technical operation processes]. Moscow: MSTUCA, 2012, 84 p. (in Russian)
- **4. Smirnov N.N., Itskovich A.A.** Obsluzhivanie I remont aviatsionnoy tehniki po sostgoyaniyu [Maintenance and repair of aircraft based on the condition]. Moscow: Transport, 1987, 272 p. (in Russian)
- **5. Daletsky S.V.** Formirovanie ekspluatatsionno-technicheskih harakteristik vozdushnyh sudov grazhdanskoy aviatsii [Forming of technical and operational characteristics of civil aviation aircraft]. M.: Air transport, 2005, 417p. (in Russian)
- 6. Daletsky S.V, Derkach O.Y., Petrov A.N. Effektivnost tehnicheskoy ekspluatatsii samoletov grazhdanskoy aviatsii [Effectiveness of civil aircraft technical operation]. M.: Air Transport, 2002, 211 p.
- 7. Itskovich A.A., Fainburg I.A. Pokazateli effektivnosti processov podderzhaniya letnoy godnosti vozdushnyh sudov [Indicators of the efficiency of process of maintenance of the aircraft airworthiness]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, no. 178, pp. 21–26. (in Russian)
- **8.** Aleksanyan A.R. Marshrutnaya tehnologiya poetapnogo formirovaniya protsedur podderzhaniya letnou godnosti vozdushnih sudov [Routing technology of stage-by-stage formation of procedures of continuing airworthiness of aircraft]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, no. 178 (4), pp. 78–84. (in Russian)
- **9. Itskovich A.A.** *Povyshenie effektivnosti tehnicheskoy ekspluatatsii samoletov* [Improving efficiency of aircraft technical operation]. Moscow, CSTI CA, 1982, 46p.
- **10.Makarovsky I.A.** Osnovi tehnicheskoy ekspluatatsii I diagnostiki aviatsionnoy tehniki [The theoretical bases of technical operation and diagnostics of aircraft]. Tutorial. Samara: SSAU, 2004, 115p. (in Russian)

Civil Aviation High Technologies

Vol. 21, No. 02, 2018

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Armen R. Aleksanyan, Candidate of Technical Sciences, Chief Specialist of Engineering Analytics Department of JSC «Sukhoi Civil Aircraft», Armen-Aleksanyan@mail.ru.

Inna A. Fainburg, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Aircraft and Aircraft Engines Maintenance Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, innafayn@mail.ru.

Anastasiia D. Evdokimova, Bachelor in Aircraft and Aircraft Engines Maintenance, Master Degree Student, Moscow State Technical University of Civil Aviation, anastasie.evdokimova@gmail.com.

Поступила в редакцию	15.09.2017	Received	15.09.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 621.396

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-153-161

РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ КОНТРАСТ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ДВУХ ОБЪЕКТОВ

$A.И. KO3ЛOB^{1}, B.Ю. MAСЛOB^{2}$

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия

²Московский технологический университет, г. Москва, Россия

В данной статье рассматривается задача нахождения плотности потоков мощности сигналов, отраженных от двух объектов с различными симметричными матрицами рассеяния, при облучении их полностью поляризованной волной. Рассматривается случай, когда собственные значения матрицы различны и приведён вид унитарной диагонализации матрицы для этого случая. Приведено соотношение, определяющее диагональные элементы множителя. Произведено сравнение между собой плотности потоков мощности сигналов, отраженных от двух объектов с различными матрицами рассеяния, при облучении их полностью поляризованной волной. Математически определена плотность потока мощности электромагнитной волны, отраженной этим объектом. На основе определения матрицы рассеяния произведён переход к падающим волнам. Приведён параметр, характеризующий величину степени поляризационной анизотропности флуктуирующего объекта. Дано соотношение для радиолокационного контраста. Сделан вывод, что если вектор падающей электромагнитной волны будет отличаться только скалярным множителем от собственного вектора матрицы, то величина радиолокационного контраста достигнет своего максимального значения. При пропорциональности вектора падающей волны собственному вектору величина радиолокационного контраста достигает своего минимального значения. Рассмотрена задача, когда матрицы рассеяния двух объектов одновременно приводятся к диагональному виду посредством преобразования конгруэнтности. Определены условия, при которых матрицы Грейвса двух рассеивающих объектов приводятся к диагональному виду с помощью конгруэнтного преобразования. Получены необходимое и достаточное условие существования поляризационного базиса, в котором матрицы рассеяния двух объектов будут одновременно иметь диагональный вид.

Ключевые слова: синтезатор частот, делитель с дробно-переменным коэффициентом деления, сигма-дельта модулятор.

ВВЕДЕНИЕ

Все нарастающее использование в радиолокации методов и принципов радиополяриметрии с неизбежностью ставит вопрос о физических пределах ее возможностей для решения как классических, так и специальных задач радиолокации. Одной из центральных в этом плане задач является задача о радиолокационном контрасте двух целей. Именно в этой задаче определяются по существу предельные возможности, которые может обеспечить радиополяриметрия в решении задач обнаружения и распознавания радиолокационных целей. Впервые в такой постановке задача была достаточно в общем виде решена в [1]. Предлагаемое ниже решение расширяет возможности этих результатов и представляется в удобном виде для проведения соответствующих оценок.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача состоит в нахождении плотности потоков мощности сигналов, отраженных от двух объектов с различными симметричными матрицами рассеяния **S**, при облучении их полностью поляризованной волной [2, 16, 18]. Рассмотрим основные свойства симметричной матрицы рассеяния [2].

Civil Aviation High Technologies

Vol. 21, No. 02, 2018

 ${f B}$ этом случае для матрицы ${f S}$ задана унитарная диагонализация эрмитовой матрицы [1].

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{S}}\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{Q}^*. \tag{1}$$

При этом в общем случае не следует, что матрица S может быть представлена в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},\tag{2}$$

где $\overline{\mathbf{S}}$ — матрица, составленная из комплексно-сопряженных элементов матрицы $\mathbf{S};\ \mathbf{Q}^*$ — матрица, сопряженная к матрице $\mathbf{Q};\ \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица \mathbf{Q} .

В этом случае, если собственные значения матрицы $\overline{S}S$ различны и унитарная диагонализация матрицы $\overline{S}S$ имеет вид

$$\overline{SS} = Q\Lambda^2 Q^*, \tag{3}$$

где $\Lambda = {\rm diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ — неотрицательная диагональная матрица, то существует такая диагональная матрица ${\bf D} = {\rm diag}\Big(e^{i\vartheta_1/2},e^{i\vartheta_2/2}\Big)$, где $0 \le \vartheta \le 2\pi$, что справедливо разложение

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

 \mathbf{c} матрицей $\mathbf{U} = \mathbf{Q}\mathbf{D}$.

Диагональные элементы множителя \mathbf{D} определяются соотношением $\mathbf{S}\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{D}^2$.

Введем положительный параметр $\kappa = \lambda_2/\lambda_1 \ge 1$. Числа λ_1 и λ_2 определяются как неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы $\mathbf{G} = \mathbf{S}^*\mathbf{S}$. Определяя угол ф из первого квадранта формулой $\operatorname{ctg}(\phi/2) = \kappa$, будем иметь

$$\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1} = \cos \phi, \tag{5}$$

И

$$\sin^2 \phi = 1 - \left(\frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right)^2 = \frac{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2}.$$
 (6)

Определитель $\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2$ и след $\operatorname{Tr}(\mathbf{S}^*\mathbf{S}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ эрмитовой матрицы инвариантны относительно преобразования подобия, поэтому будет справедливо равенство

$$\operatorname{Tr}^{2}(\mathbf{S}^{*}\mathbf{S})\sin^{2}(\phi) = 4\det(\mathbf{S}^{*}\mathbf{S}), \tag{7}$$

где

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{S}^*\mathbf{S}) = |s_{11}|^2 + |s_{22}|^2 + 2|s_{12}|^2,$$

$$\det(\mathbf{S}^*\mathbf{S}) = |s_{11}|^2 |s_{22}|^2 - |s_{12}|^4 - \lambda_1 \lambda_2 \operatorname{Re}(s_{12}).$$
(8)

Civil Aviation High Technologies

Модуль определителя $|\det(\mathbf{S})| = \lambda_1 \lambda_2$ является инвариантом матрицы рассеяния, следовательно,

$$Tr(\mathbf{S}^*\mathbf{S})\sin(\phi) = 2|\det(\mathbf{S})|, \tag{9}$$

где $\det(\mathbf{S}) = s_{11}s_{22} - s_{12}^2$.

РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ КОНТРАСТ

Сравним между собой плотности потоков мощности сигналов, отраженных от двух объектов с различными матрицами рассеяния, при облучении их полностью поляризованной волной [2, 3]. Плотность потока мощности электромагнитной волны, отраженной этим объектом, будет определяться величиной

$$\Pi_{o} = \mathbf{E}_{o}^{*} \mathbf{E}_{o}. \tag{10}$$

Используя определение матрицы рассеяния S ($E_o = SE_\pi$), перейдем в (5) к падающим волнам, тогда

$$\Pi_{o} = (\mathbf{S}\mathbf{E}_{\pi})^{*} \mathbf{S}\mathbf{E}_{\pi} = \mathbf{E}_{\pi}^{*} \mathbf{S}^{*} \mathbf{S}\mathbf{E}_{\pi} = \mathbf{E}_{\pi}^{*} \mathbf{G}\mathbf{E}_{\pi}, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{G} = \mathbf{S}^* \mathbf{S} \,. \tag{12}$$

Столбцы матрицы $\overline{\mathbf{Q}}$ являются ортонормированными собственными векторами \mathbf{u} и \mathbf{v} матрицы ${f G}$, отвечающими соответственно собственным значениям λ_1^2 и λ_2^2 :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ -\sin \gamma e^{i\varphi} \end{pmatrix},\tag{13}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sin \gamma e^{-i\varphi} \\ \cos \gamma \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для собственных векторов эрмитовых матриц (с точностью до произвольного множителя) справедливы соотношения

$$\lambda_1^2 = \mathbf{u}^* \mathbf{G} \mathbf{u} , \ \lambda_2^2 = \mathbf{v}^* \mathbf{G} \mathbf{v},$$

$$\mathbf{u}^* \mathbf{u} = 1 \ \mathbf{u} \ \mathbf{v}^* \mathbf{v} = 1.$$
(15)

$$\mathbf{u}^*\mathbf{u} = 1 \ \mathbf{u} \ \mathbf{v}^*\mathbf{v} = 1. \tag{16}$$

Введем систему векторов

$$\mathbf{x} = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) / \sqrt{2} \quad \text{if } \mathbf{y} = (\mathbf{v} - \mathbf{u}) / \sqrt{2} .$$
 (17)

Система векторов (17) будет ортонормированна. Для матрицы ${\bf G}$ можно записать уравнение

$$\left|\mathbf{x}^*\mathbf{G}\mathbf{y}\right|^2 = q^2(\mathbf{x}^*\mathbf{G}\mathbf{x})(\mathbf{y}^*\mathbf{G}\mathbf{y}),\tag{18}$$

где

$$q = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 + \lambda_1^2} \,. \tag{19}$$

Параметр q характеризует величину степени поляризационной анизотропности флуктуирующего объекта.

Эрмитова матрица **G** называется матрицей Грейвса. Если воспользоваться соотношением (11), то искомое отношение (радиолокационный контраст) будет иметь вид

$$p = \frac{\mathbf{E}_{\Pi}^* \mathbf{G}_1 \mathbf{E}_{\Pi}}{\mathbf{E}_{\Pi}^* \mathbf{G}_2 \mathbf{E}_{\Pi}},\tag{20}$$

где G_1 и G_2 — матрицы Грейвса соответственно первого и второго объектов. Выражение (20) можно представить через матрицы рассеяния этих объектов

$$p = \frac{\mathbf{E}_{2o}^{*}(\mathbf{S}_{2}^{-1})^{*}\mathbf{G}_{1}\mathbf{S}_{2}^{-1}\mathbf{E}_{2o}}{\mathbf{E}_{2o}^{*}\mathbf{E}_{2o}} = \frac{\mathbf{E}_{2o}^{*}(\mathbf{S}_{2}^{-1})^{*}\mathbf{S}_{1}^{*}\mathbf{S}_{1}\mathbf{S}_{2}^{-1}\mathbf{E}_{2o}}{\mathbf{E}_{2o}^{*}\mathbf{E}_{2o}},$$
(21)

где $\mathbf{E}_{_{\Pi}} = \mathbf{S}_{2}^{^{-1}} \mathbf{E}_{2o}$.

Числитель правой части уравнения (21) представляет собой квадратичную форму. Его величина изменяется между минимальным и максимальным собственными значениями эрмитовой матрицы $(\mathbf{S}_2^{-1})^*\mathbf{S}_1^*\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2^{-1}$. Запишем выражение (21) в виде

$$p = \frac{\mathbf{E}_{2o}^{*}(\mathbf{S}_{1}\mathbf{S}_{2}^{-1})^{*}\mathbf{S}_{1}\mathbf{S}_{2}^{-1}\mathbf{E}_{2o}}{\mathbf{E}_{2o}^{*}\mathbf{E}_{2o}} = \frac{\mathbf{E}_{2o}^{*}\mathbf{W}\mathbf{E}_{2o}}{\mathbf{E}_{2o}^{*}\mathbf{E}_{2o}},$$
(22)

где $\mathbf{W} = (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2^{-1})^* \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2^{-1}$.

Таким образом, задача нахождения отношения (21) сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы W [7, 8]. Собственные значения матрицы W являются корнями характеристического многочлена

$$p_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{w}_{11} + \mathbf{w}_{22} \pm \sqrt{\left(\mathbf{w}_{11} - \mathbf{w}_{22} \right)^2 + 4 \left| \mathbf{w}_{12} \right|^2} \right). \tag{23}$$

Пусть $p_1 \le p_2$. Из выражения (23) следует, что равенство собственных значений $p_1 = p_2$ возможно лишь при условии $\mathbf{w}_{11} = \mathbf{w}_{22}$ и $\left| \mathbf{w}_{12} \right| = 0$. Собственным значениям матрицы \mathbf{W} соответствуют собственные векторы \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 , которые должны удовлетворять соотношениям

$$p_1 = \frac{\mathbf{z}_1^* \mathbf{W} \mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_1^* \mathbf{z}_1}, \ p_2 = \frac{\mathbf{z}_2^* \mathbf{W} \mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_2^* \mathbf{z}_2}.$$
 (24)

Civil Aviation High Technologies

Следовательно, если вектор падающей электромагнитной волны будет отличаться только скалярным множителем от собственного вектора \mathbf{z}_2 матрицы \mathbf{W} , то величина радиолокационного контраста достигнет своего максимального значения равного p_2 . При пропорциональности вектора падающей волны собственному вектору \mathbf{z}_1 величина радиолокационного контраста достигает своего минимального значения равного p_1 [4, 5].

При переходе к новому поляризационному базису матрица Грейвса подвергается преобразованию подобия с помощью той же унитарной матрицы, что и матрица рассеяния

$$\mathbf{G} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{c}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}},\tag{25}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{S}_{c}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.\tag{26}$$

Следовательно, если какая-то унитарная матрица ${\bf Q}$ приводит матрицу ${\bf S}$ к диагональному виду, то эта же матрица ${\bf Q}$ диагонализирует и матрицу ${\bf G}$.

Рассмотрим теперь задачу, когда матрицы рассеяния S_1 и S_2 двух объектов с помощью матрицы Q одновременно приводятся к диагональному виду посредством преобразования конгруэнтности (26). Тогда обе матрицы рассеяния S_1 и S_2 можно представить в диагональном виде

$$\mathbf{S}_{1} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_{1} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{S}_{2} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}_{2} \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

где $\Lambda_i = \operatorname{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}).$

Таким образом, матрица

$$\mathbf{S}_{1}\overline{\mathbf{S}}_{2} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{Q}}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{2}\mathbf{Q}^{*} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}_{1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}_{2}\mathbf{Q}^{*}$$
(28)

унитарно диагонализуема и, следовательно, нормальна [7]. Поэтому необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы ${\bf Q}$ такой, что обе матрицы рассеяния объектов ${\bf QS_1Q^T}$ и ${\bf QS_2Q^T}$ диагональные, является нормальность матрицы ${\bf S_1\bar S_2}$, т. е. выполнение равенства

$$\mathbf{S}_{1}\overline{\mathbf{S}}_{2}\mathbf{S}_{2}\overline{\mathbf{S}}_{1} = \mathbf{S}_{2}\overline{\mathbf{S}}_{1}\mathbf{S}_{1}\overline{\mathbf{S}}_{2}. \tag{29}$$

Соотношение (29) одновременно определяет условия, при которых матрицы Грейвса двух рассеивающих объектов приводятся к диагональному виду с помощью конгруэнтного преобразования (25).

Действительно, пусть обе матрицы Грейвса представлены в диагональном виде

$$\mathbf{G}_{1} = \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{M}_{1} \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \quad \mathbf{H} \quad \mathbf{G}_{2} = \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{M}_{2} \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}, \tag{30}$$

тогда

$$\mathbf{G}_{1}\mathbf{G}_{2} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{1}\mathbf{M}_{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}.$$
(31)

Используя соотношения (30), выражение (31) можно представить в виде

$$\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{1}\mathbf{M}_{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{2}\mathbf{M}_{1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{2}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{M}_{1}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{G}_{2}\mathbf{G}_{1}.$$
(32)

Civil Aviation High Technologies

Vol. 21, No. 02, 2018

Сравнивая соотношения (30) и (32), можно сделать вывод, что условием существования унитарной матрицы \mathbf{Q} , осуществляющей одновременную диагонализацию матриц \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 , является эрмитовость матрицы $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$ [6, 17]. Что эквивалентно равенству

$$\mathbf{G}_{1}\mathbf{G}_{2}=\mathbf{G}_{2}\mathbf{G}_{1}.\tag{33}$$

Равенство (33) в свою очередь эквивалентно равенству (29).

Следовательно, необходимым и достаточным условием существования поляризационного базиса, в котором матрицы рассеяния двух объектов будут одновременно иметь диагональный вид, является выполнение условия (29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено строгое решение задачи об изменении радиолокационного контраста двух целей с произвольными матрицами рассеяния в зависимости от вида поляризации, облучающей эти цели электромагнитной волны. Установлена строгая аналитическая связь между максимальным и минимальным значениями радиолокационного контраста и видом поляризации, на котором это реализуется. Полученные результаты представляют существенный интерес для ряда узловых задач радиолокации [10–14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Козлов А.И.** Радиолокационный контраст двух объектов // Изв. вузов. Сер. «Радиоэлектроника». 1979. Т. 22, № 7. С. 24–28.
- **2. Козлов А.И., Логвин А.И., Сарычев В.А.** Поляризация радиоволн. Кн. 2. Радиолокационная поляриметрия. М.: Радиотехника, 2007. 644 с.
- **3. Маслов В.Ю.** Радиополяриметрический контраст при отражении от двух рассеивателей // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 179. С. 132—134.
- **4. Маслов В.Ю.** Разрешение по дальности двух точечных объектов с использованием ортогонально поляризованных электромагнитных волн // Научный Вестник МГТУ ГА. 2006. № 107. С. 55–59.
- **5. Маслов В.Ю.** Пеленгование протяженных объектов с использованием ортогонально поляризованных электромагнитных волн // Научный Вестник МГТУ ГА. 2006. № 107. С. 68–72.
- **6. Маслов В.Ю.** Дифференциальная радиополяриметрия при отражении электромагнитных волн от двух объектов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2005. № 93. С. 116–119.
- **7. Козлов А.И., Маслов В.Ю.** Дифференциальные свойства матрицы рассеяния // Научный Вестник МГТУ ГА. 2004. № 79. С. 43-46.
 - **8. Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
 - 9. Справочник по радиолокации. В 2-х кн. / под ред. М. Сколник. М.: Техносфера, 2014. 384 с.
- **10. Верба В.С.** Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. М.: Радиотехника, 2015. 304 с.
- 11. Канащенков А.И., Меркулов В.И., Самарин О.Ф. Облик перспективных бортовых радиолокационных систем. Возможности и ограничения. М.: ИПРЖР, 2002. 88 с.
- **12. Лавров А.А.** Радиолокационный скоростной портрет цели. Основы теории. М.: Радиотехника, 2013. 164 с.
- **13.** Дудник П.И., Ильчук А.Р., Татарский Б.Г. Многофункциональные радиолокационные системы. М.: Дрофа, 2007. 242 с.
- **14. Кондратенков Г.С., Фролов А.Ю.** Радиовидение. Радиолокационные системы дистанционного зондирования Земли. М.: Радиотехника, 2005. 368 с.

Civil Aviation High Technologies

- **15.** Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: справочник / под ред. Я.Д. Ширман. М.: Радиотехника, 2007. 515 с.
- **16. Биард Р.У., МакЛэйн Т.У.** Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М.: Техносфера, 2015. 158 с.
- **17. Островитянов Р.В., Басалов Ф.А.** Статистическая теория радиолокации протяженных целей. М.: Радио и связь, 1982. 232 с.
- **18.** Обнаружение, распознавание и определение параметров образов объектов / под ред. А.В. Коренного. М.: Радиотехника, 2012. 112 с.
- **19. Звежинский С.С., Иванов В.А.** Классификации и информационно-измерительные модели средств обнаружения // Специальная техника. 2007. № 6. С. 32–37.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Козлов Анатолий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта Московского государственного технического университета гражданской авиации, vilandes@yandex.ru.

Маслов Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор, профессор Московского технологического университета, vilandes@yandex.ru.

RADAR LOCATION CONTRAST IN THE REFLECTION OF ELECTROMAGNETIC WAVE FROM TWO OBJECTS

Anatoliy I. Kozlov¹, Viktor Yu. Maslov²

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia ²Moscow Technological University, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper considers the problem of finding the power flux density of signals reflected from two objects with different symmetric scattering matrices when they are irradiated with a completely polarized wave. The authors consider the case when the eigenvalues of the matrix are different given the form of the unitary diagonalization of the matrix for this case. The relation defining the diagonal elements of the factor is given. A comparison is made between the power flux density of the signals reflected from two objects with different scattering matrices when they are irradiated with a completely polarized wave. The power flux density of the electromagnetic wave reflected by this object is determined mathematically. Based on the definition of the scattering matrix, a transition to incident waves is performed. A parameter characterizing the degree of polarization anisotropy of the fluctuating object is given. The ratio for radar contrast is given. It is concluded that if the vector of the incident electromagnetic wave differs only in the scalar multiplier from the eigenvector of the matrix, the radar contrast will reach its maximum value. When the vector of the incident wave is proportional to the eigenvector, the value of the radar contrast reaches its minimum value. A problem is considered when the scattering matrices of two objects are simultaneously reduced to a diagonal form by means of a congruence transformation. Conditions are determined under which the Graves matrix of two scattering objects is reduced to diagonal form by means of a congruent transformation. A necessary and sufficient condition for the existence of a polarization basis is obtained in which the scattering matrices of two objects will simultaneously have a diagonal form.

Key words: a frequency synthesizer, a divisor with a fractional-variable division coefficient, a sigma-delta modulator.

REFERENCE

1. Kozlov A.I. *Radiolokatsionnij contrast dvuch objectov* [The radar contrast between two objects]. *Izvesija vuzov. Ser. "Radioelectronica"*, 1979, vol. 22, no. 7, pp. 24–28. (in Russian)

- **2. Kozlov A.I., Logvin A.I., Sarychev V.A.** *Polyarizaciya radiovoln. Kn. 2. Radiolokacion-naya polyarimetriya* [Polarization of radio waves. Book 2. Radar polarimetry]. M.: Radio engineering, 2007, 644 p. (in Russian)
- **3. Maslov V.Yu.** Radiopolyarimetricheskij kontrast pri otrazhenii ot dvux rasseivatelej [Radiopolarimetric contrast in reflection from two scatterers]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, no. 179, pp. 132–134. (in Russian)
- **4. Maslov V.Yu.** Razreshenie po dalnosti dvux tochechnyx obektov s ispolzovaniem ortogonalno polyarizovannyx elektromagnitnyx voln [Resolution on the range of two point objects using orthogonally polarized electromagnetic waves]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2006, no. 107, pp. 55–59. (in Russian)
- **5. Maslov V.Yu.** Pelengovanie protyazhennyx obektov s ispolzovaniem ortogonalno polyarizovannyx elektromagnitnyx voln [Direction finding of extended objects using orthogonally polarized electromagnetic waves]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2006, No. 107, pp. 68–72. (in Russian)
- **6. Maslov V.Yu.** Differencialnaya radiopolyarimetriya pri otrazhenii elektromagnitnyx voln ot dvux obektov [Differential radiopolarimetry in the reflection of electromagnetic waves from two objects]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2005, no. 93, pp. 116–119. (in Russian)
- 7. Kozlov A.I., Maslov V.Yu. Differencialnye svojstva matricy rasseyaniya [Differential erential properties of the scattering matrix]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2004, no. 79, pp. 43–46. (in Russian)
- **8. Horn R., Johnson C.** *Matrichnyj analiz* [Matrix analysis]. M.: Mir, 1989, 655 p. (in Russian)
- **9. Skolnik M.** *Spravochnic po radiolorfcii* [Handbook of radar]. M.: Technosphere, 2014, 384 p. (in Russian)
- **10. Verba V.S.** *Aviacionnije kompleksi radiolokacionnogo dozora i navedenija* [Aircraft radar patrol and guidance]. M., 2015, 304 p. (in Russian)
- 11. Kanashenkov A.I., Merkulov V.I., Samarin O.F. Oblik perspectivnich bortovich radar [Look promising airborne radar systems. Possibilities and limitations]. M.: IPRCzR, 2002, 88 p. (in Russian)
- **12.** Lavrov A.A. Radiolokacionnij skorostnoj portret celi. Osnovi teorii [Radar speed portrait purpose. Fundamentals of the theory]. M.: Radiotechnika, 2013, 164 p. (in Russian)
- **13. Dudnic P.I., Ilchuk P.I., Tatarskij B.G.** *Mnogofunkcional'nye radiolokacionnye sistemy* [Multifunction radar system]. M.: Drofa, 2007, 242 p. (in Russian)
- **14. Kondratenkov G.S., Frolov A.Ju.** *Radiolokacionnie sistemi distancionnogo zondirovanija Zemli* [Radiovidenie. Radar systems remote sensing]. M.: Radiotechnika, 2005, 368 p. (in Russian)
- **15. Shirman J.D.** Radioelektronnie sistemi. Osnovi postroenija i teorija. Spravochnic [Electronic systems. Bases of construction and theory. Reference]. M.: Radiotechnika, 2007, 515 p. (in Russian)
- **16. Biard R.U., Mak Lein T.U.** *Malie bespilotnie letatelnie apparati* [Small unmanned aircraft: theory and practice]. M.: Technosphere, 2015, 158 p. (in Russian)
- 17. Ostrovitjanov R.V., Basalov F.A. Statisticheskaja teorija radiolokacii pronjaczennich celej [Statistical theory of extended radar purposes]. M.: Radio i svjaz, 1982, 232 p. (in Russian)
- **18. Korennoj A.V.** *Obnaruszenie, raspoznavanie I opredelenie obrazov objectov* [Detection, recognition and identification of parameters of images of objects]. M.: Radiotechnica, 2012, 112 p. (in Russian)
- 19. Zvezhinskij S.S., Ivanov V.A. *Klassifikacija i informscionno-izmeritelnie modeli sredstv obnaruszenija* [Classification and information-measuring models of detection]. M.: Specialnaja technical, 2007, no. 6, pp. 32–37. (in Russian)

Civil Aviation High Technologies

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoliy I. Kozlov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Technical Maintenance of Radio Electronic Equipment for Air Transport Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, vilandes@yandex.ru.

Viktor Yu. Maslov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Moscow Technological University, vilandes@yandex.ru.

Поступила в редакцию	12.09.2017	Received	12.09.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

Vol. 21, No. 02, 2018

УДК 621.396.98.004.1

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-162-170

ДВЕ ФЕРРОМАГНИТНЫЕ СФЕРЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А. КРАСНИТСКИЙ¹

 1 Рижский институт аэронавигации, г. Рига, Латвия

В электростатике проблема двух сферических проводников изучена довольно подробно с использованием бисферических координат и имеет многочисленные приложения. В этой работе рассматривается краевая задача о двух ферромагнитных сферах, вложенных в однородную и бесконечную среду, в которой в отсутствие сфер существует однородное магнитное поле. Решение уравнения Лапласа в бисферической системе координат позволяет найти распределение потенциала и поля во всем пространстве, включая область между сферами. Использованы граничные условия, состоящие в непрерывности потенциала и нормальной составляющей плотности потока индукции на поверхностях сфер. Предполагается, что сферы одинаковы, а магнитная проницаемость их материала $\mu >> \mu_0$. Задачу о падении плоской электромагнитной волны на систему двух сфер, обладающую электрически малыми размерами, можно рассматривать как квазистационарную. Скалярные потенциалы, получаемые в результате решения уравнения Лапласа, представляются рядами, содержащими полиномы Лежандра. Введено понятие эффективной проницаемости системы двух сфер. Она равна выигрышу в величине потока вектора магнитной индукции через определенное сечение системы, возникающему за счет ее магнитных свойств. Получены необходимые соотношения для эффективной проницаемости, отнесенной к центральному сечению системы. Результаты могут быть использованы, в частности, при анализе влияния зазора в ферритовом сердечнике на свойства магнитной антенны.

Ключевые слова: бисферические координаты, решение уравнения Лапласа, магнитное поле между сферами.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о влиянии тела определенной формы с электрически малыми размерами ($l/\lambda << 1$), на воздействующее на него внешнее статическое поле может быть решена аналитическими методами, если только система координат, в которой переменные в уравнении Лапласа могут быть разделены, адаптирована к форме тела [1], т. е. координатные поверхности этой системы должны совпадать с поверхностью тела. В остальных случаях следует обратиться к численным вычислениям, при этом результаты точных аналитических решений могут быть использованы в качестве эталонов.

В электростатике проблема двух сферических проводников изучена довольно подробно с использованием бисферических координат и имеет многочисленные приложения. Исследования по анализу электрических полей в присутствии ансамблей сфер связаны, в частности, с теоретической проверкой закона Кулона [2], определением сил на частицах и усилением поля в коллоидных суспензиях, изучением поведения капель воды и аэрозольных частиц в электрическом поле [3–4], вычислением полей в материальных структурах со встроенными массивами тел малых электрических размеров [5] и с реакцией наноструктур на электромагнитные поля [6]. Существует много примеров [7] практического использования этих результатов, в том числе в медицине (осаждение ингаляционных аэрозолей на поверхность легких), пищевой промышленности (разработка электростатических порошковых покрытий пищевых продуктов), газоочистке и т. д. Соответствующие решения оказываются также полезными при интерпретации результатов геофизической разведки [8], поскольку они обеспечивают средства для определения некоторых параметров измеренной аномалии.

В большей части литературных источников частицы и тела малых электрических размеров моделируются в виде металлических сфер, расположенных во внешнем электрическом по-

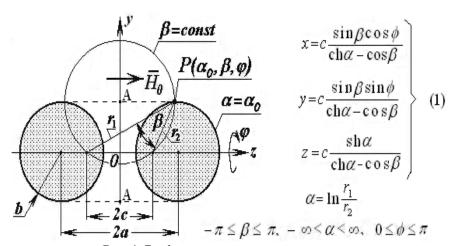
ле. В то же время, насколько известно [5], точное аналитическое решение для магнитного поля в присутствии двух магнитных сфер в литературе отсутствует. Оно бы было полезно при использовании представления о магнитных зарядах в электродинамике и теории антенн.

В этой работе рассматривается краевая задача о двух ферромагнитных сферах, вложенных в однородную и бесконечную среду, в которой в отсутствие сфер существует однородное магнитное поле. Решение уравнения Лапласа в бисферической системе координат позволяет найти распределение потенциала и поля во всем пространстве, включая область между сферами. Рассмотрен случай, когда сферы одинаковы, а $\mu >> \mu_0$. Решение имеет вид разложения по полиномам Лежандра. Вводится понятие об эффективной проницаемости системы сфер.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О БИСФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим две идентичные сферы радиуса b, изготовленные из ферромагнитного материала с проницаемостью μ_{l} . Проницаемость окружающей среды равна μ_{e} . Центры сфер расположены на оси z симметрично относительно начала координат O в точках z=+a и z=-a (рис. 1). Длина касательной, проведенной из точки O к любой из сфер, равна $c=(a^2-b^2)^{1/2}$.

Бисферические координаты точки наблюдения определяются равенствами (1), приведенными на рис. 1.



Puc. 1. Бисферическая система координат **Fig. 1.** The bispherical coordinate system

Нетрудно найти, что

$$x^{2} + y^{2} + (z - ccth\alpha)^{2} = c^{2}/sh^{2}\alpha,$$
 (2)

и, следовательно, поверхность α = const описывает сферу. Для левой сферы $\alpha = -\alpha_0$; для правой $\alpha = +\alpha_0$.

Размеры системы сфер связаны с бисферическими координатами соотношениями

$$a = c \operatorname{cth} \alpha_0, b = c / \operatorname{sh} \alpha_0. \tag{3}$$

Значениям $\alpha = \pm \infty$ соответствуют точки x = y = 0, $z = \pm c$. Из (3) также следует, что когда $\alpha_0 > 0$, то a - b < c < a + b, и они лежат внутри левой и правой сфер соответственно.

Уравнение Лапласа в бисферических координатах имеет вид [1]

$$\nabla^{2}V = \frac{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^{3}}{c^{2}\sin\beta} \left[\sin\beta \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} \frac{\partial V}{\partial\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} \frac{\partial V}{\partial\beta} \right) + \frac{1}{\sin\beta} \frac{\partial^{2}V}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)} \frac{\partial^{2}V}{\partial^{2}\phi} \right] = 0, \quad (4)$$

а его наиболее общее решение можно представить как потенциал

$$V = (\cosh\alpha - \cos\beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(A_n e^{(n+1/2)\alpha} + B_n e^{-(n+1/2)\alpha} \right) \left[C_{nm} P_n^m(\cos\beta) + D_{nm} Q_n^m(\cos\beta) \right] \left(F_{nm} \sin m\varphi + G_{nm} \cos m\varphi \right).$$
 (5)

Здесь $P_n^m(\cos \beta)$ и $Q_n^m(\cos \beta)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Решение должно быть регулярно в плоскости xz при $\alpha = \pi/2$, что выполняется, если $D_{nm} = 0$.

Пусть внешнее поле H_0 ориентировано вдоль оси z (рис. 1). Тогда магнитный скалярный потенциал V будет обладать цилиндрической симметрией относительно оси z, зависимость от ϕ исчезнет, и в (5) сохранится только член с m=0, откуда

$$V = (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{(n+1/2)\alpha} + B_n e^{-(n+1/2)\alpha} \right) P_n(\cos \beta).$$
 (6)

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В общем случае радиусы сфер могут отличаться друг от друга. Обозначим через α_1 и α_2 координаты поверхностей правой и левой сфер, а через V_1 , V_2 и V_3 – потенциалы внутри них и во внешней среде соответственно.

Потенциал, обусловленный внешним полем, в отсутствие сфер равен $V_0 = -H_0 z$, если вектор H_0 направлен в сторону возрастания z. Потенциал V_0 антисимметричен относительно плоскости xy (нечетен по z, т. е. при z < 0 имеем переход от α к $-\alpha$). Потенциалы V_3 и V_1 , V_2 тоже обладают этим свойством:

$$V_3(-\alpha, \beta) = -V_3(\alpha, \beta), V_1(-\alpha, \beta) = -V_2(\alpha, \beta).$$
 (7)

Для нахождения потенциала V_3 во внешней области воспользуемся условием симметрии (7) и тем обстоятельством, что $V_3 \to V_0$ при $z \to \infty$, откуда

$$V_{3}(\alpha, \beta) = -H_{0} \{ z + c(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n} e^{-(n+1/2)\alpha} + B_{n} e^{+(n+1/2)\alpha}] P_{n}(\cos \beta) \},$$

$$\alpha_{2} \le \alpha \le \alpha_{1},$$
(8)

где вместо z можно подставить его значение из (1). Используя (7) с учетом, что V_1 и V_2 должны быть конечны в точках $x=y=0, z=\pm c$, где координата $\alpha\to\pm\infty$, получим

$$V_1(\alpha, \beta) = -H_0[z + c(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(n+1/2)\alpha} P_n(\cos \beta)], \quad \alpha \ge \alpha_1,$$
 (9a)

Civil Aviation High Technologies

$$V_{2}(\alpha, \beta) = -H_{0}[z + c(\cosh \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} D_{n} e^{(n+1/2)\alpha} P_{n}(\cos \beta)], \quad \alpha \le \alpha_{2}.$$
 (9b)

Найденные потенциалы должны удовлетворять двум граничным условиям.

Первое состоит в непрерывности потенциала на поверхностях сфер, т. е. при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ должны выполняться равенства $V_1(\alpha_1, \beta) = V_3(\alpha_1, \beta)$ и $V_2(\alpha_2, \beta) = V_3(\alpha_2, \beta)$, откуда

$$C_n = A_n + B_n e^{(2n+1)\alpha_1} : D_n = B_n + A_n e^{-(2n+1)\alpha_2}.$$
 (10)

Если сферы идентичны, т. е. $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_0$ (рис. 1), то, поскольку $C_n = -B_n(1-e^{(2n+1)\alpha_0});$ $D_n = B_n(1-e^{(2n+1)\alpha_0}),$ получим, что

$$C_n = -D_n; A_n = -B_n.$$
 (11)

Тогда для точек на поверхностях сфер с учетом (7) можно записать

$$V_1(\alpha_0, \beta) = -H_0[z + 2c(\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \operatorname{sh}(n + 1/2) \alpha_0 P_n(\cos \beta)], \tag{12}$$

$$V_2(\alpha_0, \beta) = -V_1(-\alpha_0, \beta) = H_0[z - 2c(\cosh \alpha_0 - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh(n + 1/2)\alpha_0 P_n(\cos \beta)].$$
 (13)

Второе условие требует непрерывности нормальной составляющей магнитной индукции или же плотности магнитного потока на поверхностях сфер, откуда

$$\mu_i H_{n1}(\alpha_0, \beta) = \mu_e H_{n3}(\alpha_0, \beta)$$
 или $\mu \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_0} = \frac{\partial V_3}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_0}, \ \mu = \mu_i / \mu_e.$ (14)

Используя свойство двойственной перестановочности уравнений Максвелла и распространив результаты вычислений [9] на случай одинаковых сфер ($A_n = B_n$) при $\mu >> 1$, получим трехчленное рекурсионное соотношение

$$B_{n+1}f_{n+1}(\alpha_0, n+1, \mu) + B_nf_n(\alpha_0, n, \mu) + B_{n-1}f_{n-1}(\alpha_0, n-1, \mu) = g(\alpha_0, n, \mu)$$
(15)

для коэффициентов B_n , где $f_n(\alpha_0, n, \mu)$ и $g_n(\alpha_0, n, \mu)$ – известные функции, определяемые параметрами и расположением сфер. В нашем случае ($A_n = B_n, \mu >> 1$) довольно трудоемкие вычисления приводят к следующим выражениям для этих функций

$$f_{n+1}(\alpha_{0}, n+1, \mu) = 2\mu(n+1) \operatorname{sh}[\alpha_{0}(n+3/2)],$$

$$f_{n}(\alpha_{0}, n, \mu) = -4n \{ \mu \{ \operatorname{sh}[\alpha_{0}(n+1/2)] \operatorname{ch}\alpha_{0} + \frac{e^{+\alpha_{0}(n-1/2)}}{4n} [1 - e^{-2\alpha_{0}(n-1)}] \} + + \operatorname{ch}[\alpha_{0}(n+1/2)] \operatorname{ch}\alpha_{0} + \frac{1}{2n} \operatorname{ch}[\alpha_{0}(n+3/2)] \},$$

$$f_{n-1}(\alpha_{0}, n-1, \mu) = 2n \mu \operatorname{sh}[\alpha_{0}(n-1/2)],$$

$$g_{n}(\alpha_{0}, n, \mu) = 2\sqrt{2}\mu[-ne^{-\alpha_{0}(n-1/2)} + (n+1)e^{-\alpha_{0}(n+3/2)}],$$

$$n = 0, 2, 3...$$
(16)

Система (16) неоднородных линейных уравнений неявным образом связывает коэффициенты B_n при трех последовательных значениях n. Известно, что линейные разностные уравнения 2-го порядка имеют аналитические решения, только если их коэффициенты — полиномы или по меньшей мере рациональные функции дискретной переменной n. Уравнение (15) — это линейное разностное уравнение 2-го порядка, коэффициенты которого содержат экспоненциальные функции от n, и, следовательно, его аналитическое решение невозможно. Для его достижения реализуют разные способы, в частности, основанные на теории возмущений [9, 10], а также метод укороченных рекурсионных уравнений [11, 12], метод функций Грина [13], использование асимптотик функций Лежандра [14], метод обратного разложения [15] и др.

Процесс вычислений весьма трудоемок и часто требует дополнительных расчетов. Его результаты, т. е. значения $B_{\rm n}$ в явном виде, приводятся не всегда даже для системы идеально проводящих сфер. Исключениями, в частности, служат работы [6, 15]. Согласно первой из них для одинаковых сфер имеем

$$B_n = 2^{1/2} c H_0(2n+1) \{1 + \exp[2(n+1/2)\alpha_0]\} / \{1 - \exp[4(n+1/2)\alpha_0]\}.$$
 (17)

Здесь $H_0 = const$ — напряженность внешнего поля. Из свойства двойственной перестановочности уравнений Максвелла, в частности, следует, что в одной и той же системе сфер должны наблюдаться одинаковые (с точностью до масштаба) распределения электрического и магнитного потенциалов, если последовательно рассматривать проводящие сферы с $\sigma \to \infty$, диэлектрические сферы с $\epsilon_i/\epsilon_e \to \infty$ и сферы из магнитного материала с $\mu = \mu_i/\mu_e \to \infty$.

Следует отметить, что с ростом n значения B_n убывают очень быстро (рис. 2).

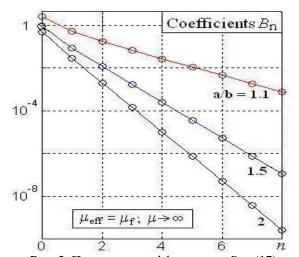


Рис. 2. Поведение коэффициентов B_n в (17) **Fig. 2.** B_n coefficient behavior in (17)

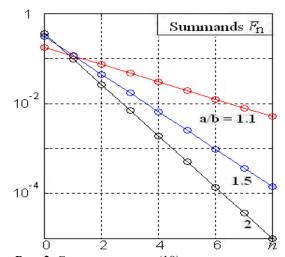


Рис. 3. Сходимость ряда (18) для потенциала **Fig. 3.** Convergence of the (18) series for the potential

Будем считать, что (17) применимо и для анализа системы сфер при $\mu >> 1$. Рассмотрим распределение потенциала вдоль оси z на рис. 1, используя (8), где в случае одинаковых сфер нужно положить $A_n = -B_n$. Тогда

$$V_3(\alpha, \beta) = -H_0 \{ z + 2c(\cosh \alpha - \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sinh[(n+1/2)\alpha] P_n(\cos \beta) \}, \quad -\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_0.$$
 (18)

На рис. 3 показано, как ведут себя слагаемые ряда (18) в точке (0, 0, a + b), лежащей на пересечении поверхности сферы с осью z, где $\beta = 0$, для трех значений α_0 .

Civil Aviation High Technologies

ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ СФЕР

Под эффективной проницаемостью будем понимать отношение $\mu_{\rm eff} = \Phi/\Phi_0$, где

$$\Phi = \int_{S} \overline{B}_{1} d\overline{S}, \quad \Phi_{0} = \int_{S} \overline{B}_{0} d\overline{S}$$
 (19)

- потоки векторов индукции, найденные в присутствии сфер и без них соответственно. Эта величина характеризует степень концентрации потока вектора магнитной индукции через определенное сечение S системы.

Для ее нахождения нужно вычислить значения векторов индукции $\bar{B}_{\!\!\!1} = \mu_{\!\!\!\!1} \bar{H}_{\!\!\!1}, \; \bar{B}_{\!\!\!0} = \mu_{\!\!\!\!e} \bar{H}_{\!\!0}$ в присутствии сфер и без них соответственно в центральном поперечном сечении S (на рис. 1 это круг диаметром AA = 2b, лежащий в плоскости xy, где $\alpha = 0$).

Величина H_1 равна α -компоненте напряженности поля в сечении S. Ее легко определить через потенциал V_1 . Применив соотношение (19) из [15] к случаю одинаковых сфер, после соответствующих подстановок найдем

$$H_{1\alpha} = -\frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} = -\sqrt{2}H_0 (1 - \cos \beta)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{\exp[(2n+1)\alpha_0] + 1}{\exp[(2n+1)\alpha_0] - 1} P_n(\cos \beta), \tag{20}$$

где h_{α} – коэффициент Ламэ [1]. В (19) элемент площади в сечении S, т. е. на поверхности $\alpha = 0$, можно представить как $\mathrm{d}S = c^2 \mathrm{sin}\beta \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\phi/(1-\cos\beta)^2$. Интегрирование по ϕ в (19) сводится к умножению на 2π . Тогда поток индукции в присутствии сфер

$$\Phi = 2\sqrt{2}\pi\mu\mu_0 c^2 H_0 \sum_{n=0}^{\infty} T_n(n, \alpha_0, \beta_0), \tag{21}$$

где $\mu = \mu_i/\mu_0$ — относительная проницаемость материала сфер, $\beta_0 = 2 \operatorname{arctg}(c/b)$ — значения угла β в точках внешней границы сечения S, в том числе и в точках AA (рис. 1).

Здесь

$$T_{n}(n,\alpha_{0},\beta_{0}) = -(2n+1)\frac{\exp[(2n+1)\alpha_{0}]+1}{\exp[(2n+1)\alpha_{0}]-1}\int_{\beta_{0}}^{\pi}\frac{\sin\beta P_{n}(\cos\beta)d\beta}{(1-\cos\beta)^{1/2}} = D_{n}(n,\alpha_{0})\int_{-1}^{X_{0}}\frac{P_{n}(X)dX}{(1-X)^{1/2}},$$
 (22)

где $D_n(n,\alpha_0) = (2n+1)\{\exp[(2n+1)\alpha_0]+1\}/\{\exp[(2n+1)\alpha_0]-1\}, X = \cos\beta, X_0 = \arccos\beta_0$.

Поток в отсутствие сфер пропорционален площади круга с радиусом b, т. е. $\Phi_0 = \pi b^2 \mu_0 H_0$. Таким образом, эффективная проницаемость системы из двух одинаковых сфер описывается бесконечным рядом

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = 4\mu \frac{c^2}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} T_n(n, \beta_0).$$
 (23)

Скорость сходимости рядов в выражениях, приведенных выше, вообще говоря, зависит от геометрических параметров системы сфер. Поэтому в некоторых случаях, в частности при малых величинах зазоров между сферами, когда $c/b \rightarrow 1$, следует провести дополнительное ис-

следование по определению разумного числа членов в соответствующих рядах, необходимого для достижения желаемой точности вычислений.

Эффективная проницаемость может служить удобным показателем степени искажений поля при внесении в него отдельного тела или системы тел. Она позволяет оценить выигрыш в величине потока магнитной индукции через центральное сечение системы, реализуемый при заданных геометрии и свойствах материала тела (тел). С другой стороны, по ней можно судить о степени использования этих свойств.

Выше значение μ_{eff} получено для случая $\mu >> 1$. Поэтому можно предположить, что величину (23) допустимо рассматривать как некую оценку проницаемости формы

$$\mu_f = \lim_{u \to \infty} \mu_{eff} \tag{24}$$

системы двух идентичных сфер, т. е. предельно достижимого значения эффективной проницаемости при заданной геометрии системы. Располагая зависимостью $\mu_{eff}(\mu)$ для заданных размеров системы, легко найти такое значение проницаемости материала, дальнейшее увеличение которой уже не будет приводить к росту величины μ_{eff} .

С физической точки зрения предельный переход $\mu \to \infty$ эквивалентен превращению материала сфер в идеальный магнетик, на поверхности которого тангенциальные составляющие H_{ϕ} и H_{β} , становятся равными нулю. Таким образом, структура поля во внешней области будет определяться единственной составляющей $H_{\alpha} = -\text{grad}V_{1,2}$, нормальной к поверхностям сфер. Помня о принципе двойственной перестановочности уравнений Максвелла, иллюстрации структур полей в системе двух сфер для некоторых частных случаев можно найти в [9].

НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрим приемную ферритовую антенну, в простейшем случае содержащую цилиндрический сердечник из материала с высокой μ и малыми потерями и размещенную на нем соленоидальную обмотку [16]. При настройке цепи антенны в резонанс на вход приемника поступает напряжение $U_A = e_A Q_A$, где Q_A – добротность антенного контура, e_A – ЭДС, наводимая в антенне падающей электромагнитной волной. Известно, что $Q_A = W_A/P_A$, т. е. представляет собой отношение энергии, запасенной в системе, к энергии, теряемой в ней, за один период колебаний.

Экспериментально установлено, что при наличии зазора в сердечнике добротность увеличивается. Качественное объяснение этого факта заключается в возрастании реактивной энергии, запасаемой в системе, при сохранении практически неизменными потерь. Математическое же обоснование в известной литературе отсутствует. Соотношения, полученные выше, позволяют провести количественные расчеты и промоделировать влияние зазора на характеристики антенны.

2. С увеличением радиуса окружности AA (рис. 1) ее площадь S быстро растет, а напряженность H_z , усредненная по этой площади, уменьшается. Поэтому можно предположить, что магнитный поток через эту окружность при некотором значении ее радиуса достигает максимума.

Подробные исследования указанных вопросов выходят за рамки данной работы.

выводы

Задачу о падении плоской электромагнитной волны на систему двух сфер, обладающую электрически малыми размерами, можно рассматривать как квазистационарную. Скалярные потенциалы, получаемые в результате решения уравнения Лапласа, представляются рядами, содержащими полиномы Лежандра. Оценки показывают, что при $\mu >> 1$ сходимость этих рядов зависит от

Civil Aviation High Technologies

геометрических размеров системы. При практических расчетах это может привести к необходимости дополнительных исследований с целью определения нужного числа слагаемых в этих рядах.

Введено понятие эффективной проницаемости системы двух сфер. Она равна выигрышу в величине потока вектора магнитной индукции через определенное сечение системы, возникающему за счет ее магнитных свойств. Получены необходимые соотношения для эффективной проницаемости, отнесенной к центральному сечению системы. Результаты могут быть использованы, в частности, при анализе влияния зазора в ферритовом сердечнике на свойства магнитной антенны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1. Морс Ф.М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИИЛ, 1960. 886 с.
- **2. Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А.** К оценке погрешности опыта Кулона // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2007. № 1. С. 88–95.
- **3. Hall W.D., Beard K.V.** Electrostatic force between a conducting sphere and a dielectric sphere // Birkhäuser. Basel: Verlag, 1975. Vol. 113. Pp. 515–524.
- **4. Grover S.N.** The electrostatic force between a conducting sphere and a charged dielectric sphere in arbitrarily oriented external electric field // Birkhäuser. Basel: Verlag, 1976. Vol. 114. Pp. 521–539.
- **5.** Ciric I.R., Kotuwage Kumara S.C.M. Benchmark solutions for magnetic fields in the presence of two superconducting spheres // Materials Sci. Forum. Switzerland: Trans Tech Publications, 2012. Vol. 721. Pp. 21–26.
- **6.** Electrostatics and its effect on spatial distribution of tunnel current in metal Nanocrystal flash memories / A. Nainani, A. Roy, P.K. Singh etc. // ICMTD-2007. Pp. 251–254.
- 7. Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials / A. Khachatourian, Ho-Kei Chan, A.J. Stace, E. Bichoutskaia // J. Chem. Phys. 2014. Vol. 140, No. 7. 074107–1–074107–10.
- **8.** Aldridge D.F., Oldenburdg W. Direct current electric potential field associated with two spherical conductors in a whole-space // Geophysical Prospectingro. 1989. Vol. 37, No. 3. Pp. 311–330.
- **9. Stoy R.D.** Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for two spheres in a uniform external field: Parallel orientation // J. Appl. Phys. 1989. Vol. 65. Pp. 2611–2615.
- 10. Goyette A., Navon A. Two dielectric spheres in an electric field // Phys. Rev. B. 1976. Vol. 13, No. 10. Pp. 4320–4327.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Краснитский Юрий Александрович, доктор технических наук, профессор Рижского института аэронавигации, krasn@tsi.lv.

TWO FERROMAGNETIC SPHERES IN HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

Yuriy A. Krasnitsky¹

¹Riga Aeronautical Institute, Riga, Latvia

ABSTRACT

The problem of two spherical conductors is studied quite in detail with bispherical coordinates usage and has numerous appendices in an electrostatics. The boundary-value problem about two ferromagnetic spheres enclosed on homogeneous and infinite environment in which the lack of spheres exists like homogeneous magnetic field is considered. The solution of

Laplace's equation in the bispherical system of coordinates allows us to find the potential and field distribution in all spaces, including area between spheres. The boundary conditions in potential continuity and in ordinary density constituent of spheres surfaces induction flux are used. It is supposed that spheres are identical, and magnetic permeability of their material is expressed in $\mu \gg \mu_0$. The problem about falling of electromagnetic plane wave on the system of two spheres, which possesses electrically small sizes, can be considered as quasistationary. The scalar potentials received as a result of Laplace's equation solution are represented by the series containing Legendre polynomials. The concept of two spheres system effective permeability is introduced. It is equal to the advantage in magnitude of magnetic induction flux vector through a certain system's section arising due to its magnetic properties. Necessary ratios for the effective permeability referred to the central system's section are obtained. Particularly, the results can be used during the analysis of ferroxcube core clearance, which influences on the magnetic antenna properties.

Key words: bispherical coordinates, the solution of Laplace's equation, magnetic field between spheres.

REFERENCES

- 1. Morse F. M., Feshbach G. *Metody teoreticheskoy fiziki* [Methods of theoretical physics]. Vol. 2. M.: IIL, 1960, 886 p. (in Russian)
- **2.** Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. *K otsenke pogreshnosti opyta Kulona* [To estimate the error of the experience of the pendant]. *Vestnik MGTU im. Baumana. Seriya "Estestvenniye nauki"* [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural Sciences"], 2007, no. 1, pp. 88–95. (in Russian)
- **3. Hall W.D., Beard K.V.** Electrostatic force between a conducting sphere and a dielectric sphere. Birkhäuser. Basel: Verlag, 1975, vol. 113, pp. 515–524.
- **4. Grover S.N.** The electrostatic force between a conducting sphere and a charged dielectric sphere in arbitrarily oriented external electric field. Birkhäuser. Basel: Verlag, 1976, vol. 114, pp. 521–539.
- **5.** Ciric I.R., Kotuwage Kumara S.C.M. Benchmark solutions for magnetic fields in the presence of two superconducting spheres. Materials Sci. Forum, Switzerland: Trans Tech Publications, 2012, vol. 721, pp. 21–26.
- **6.** Nainani A., Roy A., Singh P.K., Mukhopadhyay G., Vasi J. Electrostatics and its effect on spatial distribution of tunnel current in mental Nanocrystal flash memories. ICMTD-2007, pp. 251–254.
- 7. Khachatourian A., Chan Ho-Kei, Stace A.J., Bichoutskaia E. Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials. J. Chem. Phys, 2014, vol. 140, no. 7, 074107–1–074107–10.
- **8.** Aldridge D.F., Oldenburdg W. Direct current electric potential field associated with two spherical conductors in a whole-space. Geophysical Prospecting, 1989, vol. 37, no. 3, pp. 311–330.
- **9. Stoy R.D.** Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for two spheres in a uniform external field: Parallel orientation. J. Appl. Phys., 1989, vol. 65, pp. 2611–2615.
- 10. Goyette A., Navon A. Two dielectric spheres in an electric field. Phys. Rev. B., 1976, vol. 13, no. 10, pp. 4320–4327.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yury A. Krasnitsky, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Riga Aeronautical Institute, krasn@tsi.lv.

Поступила в редакцию	09.09.2017	Received	09.09.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018

Civil Aviation High Technologies

УДК 621.396

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-171-180

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ И УСЛОВИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КЭСН ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО МИКРОВОЛНОВОМУ ИЗЛУЧЕНИЮ ПОКРОВОВ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

В.И. ТРОИЦКИЙ1

¹Московский государственный университет геодезии и картографии, г. Москва, Россия

Приведены результаты численных экспериментов на математической модели корреляционно-экстремальной системы навигации (КЭСН) летательного аппарата (ЛА), использующей микроволновое излучение земных покровов. Целью проведенных численных экспериментов был анализ влияния основных параметров КЭСН (характеристики радиометра и антенны, способы обзора пространства, параметры текущего изображения и эталонного изображения), методов обработки изображения (алгоритмы корреляции изображений), условий работы аппаратуры (скорость и высота полета ЛА, эволюции носителя) на эффективность работы КЭСН. Эксперименты проводились с полями подстилающей поверхности трех типов: с искусственно синтезированной картой, содержащей ряд объектов, отличающихся радиотепловым контрастом; с однородным случайным полем, с фрагментами цифровой карты объектового состава реального участка земной поверхности. В результате численных экспериментов исследовалось влияние на точностные характеристики КЭСН навигационных параметров (углы крена, тангажа, рыскания), высоты и скорости полета, шумов радиометра, ширины диаграммы направленности, ширины сектора обзора, размасштабирования и углового рассогласования текущего и эталонного изображений. По результатам моделирования проведено сравнение различных способов сканирования поверхности. При проведении экспериментов осуществлялась вариация одного из параметров относительно базовых вариантов параметров и оценивались значения и дисперсии ошибок КЭСН. Рассматривались все три основные метода сканирования лучом (продольное с использованием многолучевого радиометра, коническое и поперечное). Операция поиска максимума была составлена из двух процедур: поиска области глобального максимума корреляционной матрицы путем перебора всех значений матрицы и уточнения местоположения точки истинного максимума путем квадратичной интерполяции функции. Рассмотрены реализации ошибок при различных траекториях движения воздушного судна, а также при различных дисперсиях углов. Обработка реализации показала, что увеличение дисперсии углов приводит к одновременному росту как модуля ошибки, так и дисперсии модуля ошибки. Анализ полученных зависимостей показывает достаточно устойчивую тенденцию снижения ошибок КЭСН при уменьшении навигационных углов. Эта зависимость продемонстрирована графически. Для того, чтобы оценить только влияние флуктуационного шума радиометра на величину ошибок КЭСН, была проведена серия экспериментов, при которых все остальные случайные флуктуации в канале исключались.

Ключевые слова: навигация, моделирование, микроволновое излучение, информативность излучения земных покровов.

ВВЕДЕНИЕ

С использованием разработанной модели радиотепловой КЭСН [1] был выполнен большой объем численных экспериментов.

При проведении экспериментов по математическому моделированию не ставилась цель осуществить детальное исследование всех факторов и эксплуатационных ситуаций, хотя эксперименты позволили выделить ряд параметров, которые в наибольшей степени сказываются на эффективности КЭСН, определить допустимые диапазоны измерения, а также определить те параметры, влияние которых незначительно.

Civil Aviation High Technologies

Vol. 21, No. 02, 2018

МОДЕЛЬ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Эксперименты проводились с полями подстилающей поверхности трех типов [1, 2]:

- 1) с искусственно синтезированной картой (ИСК), содержащей ряд объектов, отличающихся радиотепловым контрастом;
- 2) с однородным случайным полем (ОСП), имеющим автокорреляционную функцию вида $R_{\lambda}(\xi,\eta)=\sigma_{\lambda}^2\exp\left[-\left(\alpha_x^{-1}\left|\xi\right|+\alpha y^{-1}\left|\eta\right|\right)\right]$, где σ_{λ} заданное среднеквадратичное значение пульсаций радиояркостного поля; α_x , α_y интервалы корреляции поля соответственно по горизонтали и вертикали;
- 3) с фрагментами цифровой карты объектового состава (ЦКОС) реального участка земной поверхности.

Результатом экспериментов являлось определение ошибок КЭСН по горизонтали ε_x и по вертикали ε_y , а также модуля ошибки $|\xi|$.

В связи с тем, что одно конкретное значение ошибок является случайной величиной и не может характеризовать среднюю точность КЭСН, в каждом эксперименте проводилась серия опытов, отличающихся друг от друга траекторией движения ЛА. Усреднение по всем опытам позволило вычислить средние значения ошибок, их среднеквадратичный разброс, а также средний модуль и среднеквадратичное значение модуля ошибок.

Выбор различных случайных траекторий движения ЛА осуществлялся двумя способами [4]:

- заданием параметров случайных эволюций движения ЛА, определяющих изменения углов тангажа, крена и рыскания. При этом углы крена, тангажа и рыскания являются случайными процессами с АКФ типа $\sigma_{\beta}^2 \exp\left(-\alpha_p/t\right) \cos \omega_{\beta} t$;
- различными начальными координатами ЛА. При этом углы тангажа, крена и рыскания были фиксированы.

При проведении экспериментов осуществлялась вариация одного из параметров относительно базовых вариантов параметров и оценивались значения и дисперсии ошибок КЭСН. Рассматривались все три основных метода сканирования лучом (продольное с использованием многолучевого радиометра, коническое и поперечное).

В статье рассмотрены вариации следующих параметров: навигационных (углы крена, тангажа и рыскания и высоты полета); скорости полета; шумов радиометра; ширины диаграммы направленности; ширины сектора обзора; размасштабирования текущего изображения (ТИ) и эталонного изображения (ЭИ); степени углового рассогласования ТИ и ЭИ.

По результатам моделирования было осуществлено сравнение рассмотренных методов сканирования [3].

В связи с тем, что в рассмотренных моделях присутствует большое число варьируемых факторов, такая многомерность модели затрудняет возможности получения обозримых результатов и сопоставления значимости факторов, влияющих на величину ошибки КЭСН. В ходе исследований была отработана методика проведения многофакторного эксперимента (анализ совместного влияния углов тангажа, крена и рыскания, высоты полета и ширины диаграммы направленности на точность КЭСН, анализ совместного влияния параметров атмосферы).

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ОШИБОК КЭСН

При использовании взаимно корреляционной функции в качестве меры сходства между текущим и эталонным изображениями операция оценки ошибок КЭСН сводится к поиску по-

Civil Aviation High Technologies

ложения максимума корреляционной матрицы $\rho(i\Delta\epsilon_1,k\Delta\epsilon_2)$, $i,k=\overline{1,N}$, где $\Delta\epsilon_1,\Delta\epsilon_2$ — соответственно сдвиги по горизонтали и вертикали текущего изображения относительно эталона; N — размер матрицы.

Операция поиска максимума была составлена из двух процедур [5]:

- 1) поиска области глобального максимума корреляционной матрицы $\rho(i\Delta\varepsilon_1, k\Delta\varepsilon_2)$, $i, k = \overline{1, N}$ путем перебора всех значений матрицы;
- 2) уточнения местоположения точки истинного максимума путем квадратичной интерполяции функции $\rho(i\Delta\epsilon_1, k\Delta\epsilon_2)$ [1].

Отметим, что применение интерполяционной процедуры дает возможность не только более точно оценить ошибки системы, но и получить ошибки в виде непрерывных величин, что достаточно важно при исследовании характеристик КЭСН.

Уточненная ошибка КЭСН $\tilde{\epsilon}_j$, полученная с помощью квадратичной аппроксимации в

соответствии с [1], имеет вид
$$\widetilde{\epsilon}_j = 0.5\Delta\epsilon_j \frac{\rho(\epsilon_{j,3}) - \rho(\epsilon_{j,1})}{2\rho(\epsilon_{j,2}) - \rho(\epsilon_{j,1}) - \rho(\epsilon_{j,3})}.$$

Величина $\tilde{\epsilon}_j$ ошибки КЭСН по горизонтали (j=1) и по вертикали (j=2). Полная ошибка $\tilde{\delta}_j$ КЭСН равна $\tilde{\delta}_j = n_j \Delta \epsilon_j + \tilde{\epsilon}_j$, где n_j – число узлов сдвига глобального максимума относительно центра корреляционной матрицы $\rho(i\Delta \epsilon_1, k\Delta \epsilon_2)$.

Именно эта формула и использовалась в экспериментах по моделированию КЭСН. Помимо величин $\widetilde{\epsilon}_j$ и $\widetilde{\delta}_j$ вычислялся также модуль $\left|\delta\right| = \sqrt{\widetilde{\delta}_1^2 + \widetilde{\delta}_2^2}$.

Поскольку одна конкретная ошибка не может характеризовать всей точности КЭСН, то для объективной оценки в каждом эксперименте проводилась серия опытов при различных траекториях движения платформы. При статистической обработке реализации ошибок, полученных в серии опытов, находились средние величины $\tilde{\varepsilon}_j$ и $\tilde{\delta}_j$, а также их среднеквадратичные значения.

Рассмотрим подробнее результаты выполненных экспериментов. Будем рассматривать модель многолучевого радиометра, а затем отметим особенности получаемых результатов для случаев конического и поперечного сканирования. Будем также указывать, какие модели подстилающей поверхности использовались в конкретном эксперименте [6].

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УСЛОВИЙ РАБОТЫ АППАРАТУРЫ

Влияние эволюции летательного аппарата

Случайные изменения углов тангажа, крена и рыскания приводят к тому, что координаты текущего изображения, зависящие от этих углов, также будут некоторыми случайными функциями времени. В свою очередь, флуктуации координат приводят к появлению дополнительных ошибок привязки КЭСН. Эксперименты проводились с ИСК, и здесь важно отметить, что результат каждого опыта в эксперименте с ИСК носит частный характер и зависит от того, в какой фрагмент карты попадает пятно антенны. Поэтому даже статистики, построенные по ансамблю реализации (т. е. при различных траекториях движения платформы), не будут иметь общего характера. Это означает, в частности, что при сканировании иных объектов местности могут быть получены другие количественные характеристики объектов. Рассмотрены реализации ошибок $\varepsilon_x, \varepsilon_y, |\varepsilon|$ при различных траекториях движения ЛА, а также при различных дисперсиях углов (рис. 1).

Обработка реализации показала, что увеличение дисперсии углов приводит к одновременному росту как модуля ошибки, так и дисперсии модуля ошибки. Этот факт, с одной сторо-

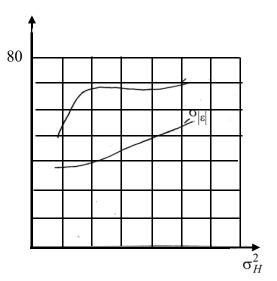


Рис. 1. Зависимость среднего и среднеквадратичного значений отклонения модуля ошибки от дисперсии ошибки определения тангажа и угла рыскания Fig. 1. Dependence of average and mean square values of a deviation of the error module on the error dispersion of pitch determination and an angle of yaw

ны, не является чем-то неожиданным, а с другой — свидетельствует о том, что при разработке реальных КЭСН при значительных эволюциях ЛА следует применять либо гиростабилизированные платформы, либо поиск максимума осуществлять не только путем взаимных сдвигов \vec{C} текущего и эталонного изображения, но и путем более общего преобразования $A\vec{x} + \vec{C}$, где $A = \alpha B_1 B_2 B_3$; α — скаляр изменения масштаба; B_1, B_2, B_3 — матрицы, учитывающие повороты вокруг осей платформы на углы тангажа, крена и рыскания [7].

Более детальное исследование влияния навигационных углов на точность КЭСН было осуществлено в рамках многофакторного эксперимента с ОСП, который будет описан ниже.

Влияние эволюций ЛА на ошибки привязки ЛА было рассмотрено на примере модели КЭСН с ЦКОС. Скорость полета 400 км/ч, высота 1500 м. Ширина диаграммы направленности принята равной 3°.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости ошибок КЭСН вдоль (ε_x) и поперек (ε_z) траектории

полета, а также результирующей ошибки $|\varepsilon|$ от углов крена (γ) и рыскания (ψ) . Анализ полученных зависимостей показывает достаточно устойчивую тенденцию снижения ошибок КЭСН при уменьшении навигационных углов. Особенно четко эта зависимость прослеживается на графике $|\varepsilon| = f(\psi)$.

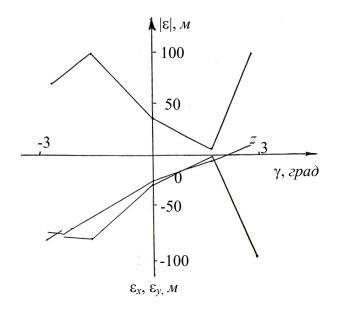
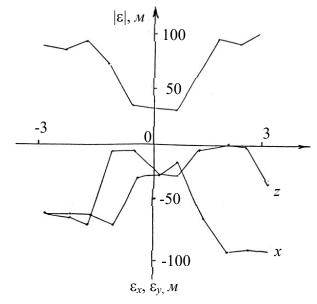


Рис. 2. Зависимость КЭСН от угла крена **Fig. 2.** Dependence of KESN on the angle of roll



Puc. 3. Зависимость КЭСН от угла рыскания **Fig. 3.** Dependence of KESN on the angle of yaw

Здесь уменьшение ψ приводит к меньшему угловому рассогласованию между ориентациями ТИ и ЭИ. Несколько сложнее обстоит дело с влиянием угла крена. Увеличение его в районе малых положительных значений влечет за собой некоторую компенсацию начальной ошибки (при $\psi = 0$), вызванной искажающим влиянием измерительного тракта радиометра. При дальнейшем увеличении γ ошибка заметно растет.

Оценка влияния угла курса полета ЛА

Эксперименты, выполненные с ОСП, показывают, что полет под тем или иным углом приводит к повороту ТИ относительно эталона, что в свою очередь вызывает увеличение ошибок привязки изображений. Даже небольшие угловые рассогласования (~2°) вызывают заметное увеличение модуля ошибки (рис. 4), а при углах > 6° модуль ошибки увеличивается в 4–5 раз. Это свидетельствует о том, что алгоритм поиска максимума, помимо традиционных операций, связанных с плоско-параллельными сдвигами изображений по вертикали и горизонтали при вычислении взаимно корреляционной функции, должен также включать и операции взаимных поворотов этих изображений [8]. В связи с этим нами разработаны и используются при моделировании операции поворота относительно заданной точки ТИ и ЭИ. Следует, правда, заметить, что полученные выводы основаны на анализе ОСП. При использовании ЦКОС влияние рассогласования ТИ и ЭИ не так заметно.

Оценка влияния размасштабирования ТИ и ЭИ

Если высота полета ЛА определена неточно и имеется систематическая ошибка в измерении высоты, то масштабы ТИ и ЭИ оказываются различными. Объясняется этот эффект тем, что из-за фильтрации пространственных частот пятном антенны сигнал T_A на ее выходе «размывается» (рис. 5) и в пространстве и во времени (за счет сканирования).

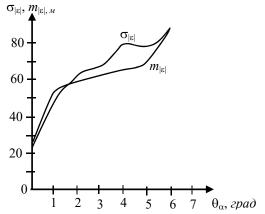
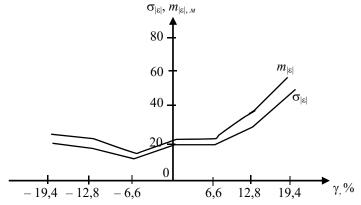


Рис. 4. Зависимость статистических параметров от угла курса ЛА

Fig. 4. Dependence of statistical parameters on an aircraft course angle



Puc. 5. Зависимость статистических параметров от коэффициента рас-масштабирования Fig. 5. Dependence of statistical parameters on the unscale coefficient

Поэтому, когда размер (длительность) эталонного сигнала меньше длительности «размытого» сигнала, происходит уменьшение величины функции взаимной корреляции и снижение отношения сигнал/шум, что и вызывает увеличение статистических параметров ошибки. Наоборот, увеличение размера эталона позволяет согласовать его параметры с размером «размытого» текущего сигнала. Возрастает результат накопления, интегрирования при вычислении функции взаимной корреляции, что несколько увеличивает отношение сигнал/шум и снижает

ошибки. Поэтому в реальных КЭС, целесообразно иметь эталон большего масштаба, чем масштаб текущего изображения [9].

Анализ влияния скорости полета ЛА

Увеличение скорости полета приводит к пропорциональному уменьшению длительности сигнала на выходе радиометра, а также к тому, что ухудшаются условия для накопления сигнала на фильтре НЧ. До тех пор, пока

$$\Delta y / V_c > \tau \tag{1}$$

где Δy — размер объекта по вертикали; V_c — скорость полета; τ — постоянная времени фильтра НЧ, фильтр пропускает сигнал практически без искажений. Но если условие (1) не выполняется, то происходит снижение уровня и крутизны сигнала на выходе НЧ, что вызывает появление дополнительных ошибок КЭСН.

В проведенных опытах (многолучевая система, ИСК) при $\tau=0$ нарушение вия (1) происходит при скоростях около 1000 $\kappa \textit{м}/\textit{ч}$ и выше. При меньших скоростях наблюдается лишь небольшой рост среднего модуля и среднеквадратичного разброса модуля ошибок.

При использовании в качестве модели подстилающей поверхности ОСП результаты качественно аналогичны тем, что получены в экспериментах с ИСК.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ КЭСН

Оценка шума радиометра

Для того, чтобы оценить только влияние флуктуационного шума радиометра на величину ошибок КЭСН, была проведена серия экспериментов, при которых все остальные случайные флуктуации в канале исключались. В частности, были исключены случайные изменения углов крена, тангажа, рыскания, и поэтому во всех опытах траектория движения ЛА была одинаковой.

Результаты экспериментов показали, что влияние шума на дисперсию ошибок оказалось незначительным. И это при том, что моделировался радиометр с весьма низкой чувствительностью $\approx 2^{\circ} \ K/c$, а среднеквадратическое значение модуля ошибок составило ничтожно малую величину $\approx 0.3 \ M$.

Объяснение этому факту следующее. Спектральная плотность шума радиометра на входе ФНЧ равна $S(\omega_{\tau}) = \sigma^2 / \Delta f = \sigma^2 \Delta t$, где σ — дисперсия шума на входе ФНЧ, а Δt — интервал дискретизации, используемый при вычислении свертки смеси сигнала и шума с весовой функцией фильтра НЧ.

Дисперсия σ_1^2 шума на выходе ФНЧ будет равна $\sigma_1^2 = S(\omega \tau)/2\tau = \sigma^2 \Delta t/2\tau$, где τ — постоянная времени фильтра.

В экспериментах использовались следующие параметры:

$$\Delta t = 0.03 \; c; \;\; \tau = 0.1 \; c; \;\; \sigma^2 = 400 \; K. \;\;$$
Откуда $\;\sigma_1^2 = 60 \; K \; . \;\;$

Дисперсия ошибок привязки по соответствующей координате определяется следующим выражением $\sigma_{\downarrow}j^{\uparrow}2 \approx -(\sigma_{\downarrow}1^{\uparrow}2)/(2\sigma_{\downarrow}2^{\uparrow}2N^{\uparrow}2\rho^{\uparrow}"(\epsilon_{\downarrow}(j,\alpha)))$, j=1,2,..., где σ_{2}^{2} – дисперсия радиотеплового поля подстилающей поверхности; N^{2} – число точек осреднения при вычислении взаимно корреляционной функции между эталоном и текущим изображением; $\rho^{\uparrow}"(\epsilon_{\downarrow}(j,\alpha))$ – нормированная сигнальная составляющая взаимно корреляционной функций в точке $\epsilon_{j,\alpha}$ глобального максимума. Хотя аналитическое вычисление σ_{j}^{2} и затруднено из-за сложности опре-

деления ρ^{\uparrow} " ($\epsilon_{\downarrow}(j,\alpha)$), здесь важно другое. Отношение сигнал/шум зависит от числа N^2 . При $N\times N=1000\,$ и $\sigma_2^2=10\,$ (поле с малым контрастом) это отношение оказывается весьма большим: $h^2=2\sigma_2^2N^2/\sigma_1^2=30$.

Поэтому и дисперсия ошибок, вызванная исключительным шумом радиометра, даже при полях с относительно малым радиотепловым контрастом является относительно малой.

Анализ влияния ширины диаграммы направленности

Уменьшение габаритов антенны и размера раскрыва антенны приводит к увеличению ширины диаграммы направленности $F(\psi, \phi)$, что, в свою очередь, приводит к увеличению диаметра пятна антенны на поверхности Земли.

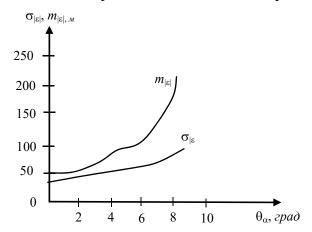


Рис. 6. Зависимости среднего модуля ошибок и среднеквадратического отклонения модуля ошибки от ширины диаграммы

Fig. 6. Dependences of the average error module and the standard deviation of the error module on the diagram width

На рис. 6 показаны зависимости среднего модуля ошибок $m_{|\epsilon|}$ и среднеквадратичного отклонения $\sigma_{|\epsilon|}$ модуля ошибки от ширины θ диаграммы (многолучевая система, ИСК). Оба параметра монотонно растут с увеличением θ , хотя и $m_{|\epsilon|}$ увеличивается быстрее, чем $\sigma_{|\epsilon|}$.

Одновременный рост параметров объясняется тем, что антенна представляет собой пространственный фильтр низких частот, который сглаживает полезный сигнал тем сильнее, чем больше θ . Из-за такого сглаживания уменьшается энергия полезного сигнала на выходе радиометра, что уменьшает остроту взаимно корреляционной функции и увеличивает ошибки системы [11].

При моделировании КЭСН с использованием ОСП результаты оказываются качественно аналогичными тем, что были получены в экспериментах с ИСК [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье приведены результаты разработки методики оценки ошибок КЭСН, включающей поиск области глобального максимума с точностью дискрета, путем квадратичной интерполяции корреляционной матрицы.

При этом анализ зависимости ошибок КЭСН от параметров, характеризующих условия работы КЭСН (эволюция ЛА, отклонения в курсе полета, степень размасштабирования ТИ и ЭИ, скорость полета и т. д.), выявил ряд особенностей в характере этих зависимостей, приводящих к ограничениям на условия работы КЭСН, а именно:

- в то время как для угла рыскания наблюдается устойчивая тенденция снижения ошибок КЭСН при уменьшении отклонений по этому углу, увеличение угла крена в области его малых положительных значений влечет за собой некоторую компенсацию начальной ошибки, вызванной искажающим влиянием измерительного тракта радиометра, при дальнейшем увеличении угла крена ошибка заметно растет;
- увеличение дисперсии параметров, характеризующих эволюции носителя, как и увеличение отклонений в курсе ЛА, приводит к одновременному росту как модуля, так и диспер-

сии ошибок КЭСН; при значительных эволюциях ЛА следует применять либо гиростабилизированные платформы, либо использовать при нахождении экстремума более общие преобразования, включающие повороты ТИ относительно ЭИ;

- наличие зависимости статистических параметров ошибки не только от величины коэффициента размасштабирования изображений, но и его знака показывает, что в реальных КЭСН целесообразно иметь эталон несколько большего масштаба, чем масштаб ТИ;
 - увеличение скорости ЛА способствует появлению дополнительных ошибок КЭСН.

Исследование методами моделирования влияния параметров КЭСН (шумы аппаратуры, ширина сектора обзора, ширина диаграммы направленности) на их точностные характеристики показало:

- влияние флуктуационных шумов радиометра на дисперсию ошибок привязки относительно мало даже в случае полей с относительно небольшим радиотепловым контрастом;
- модель и дисперсия ошибок привязки монотонно растут с увеличением ширины диаграммы направленности;

Анализ особенностей различных типов сканирования показывает:

- большое значение результирующей средней ошибки (по модулю) при коническом сканировании;
- влияние геометрических искажений на среднее значение результирующей ошибки несколько меньше при продольном сканировании (многолучевой радиометр).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- **1.** Моделирование радиотепловой КЭСН с многолучевым радиометром / В.В. Ауров, А.А. Гуревич, Л.П. Деренченко, В.И. Троицкий // Вопросы радиоэлектроники. Сер. «ОВРЭ». 1992. Вып. 5.
- **2. Троицкий В.И.** Разработка методов математического моделирования радиотепловых КЭСН летательных аппаратов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. Т. 19, № 5. С. 97–103.
- **3. Троицкий В.И.** Оценка временной навигационной устойчивости радиотепловых полей земной поверхности в задачах корреляционно-экстремальной навигации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 2. С. 72–75.
- **4. Троицкий В.И.** Критерии информативности эталонных радиотепловых полей, используемых в КЭСН // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 3. С. 61–64.
- **5. Богородский В.В., Канарейкин Д.Б., Козлов А.И.** Поляризация рассеянного и собственного радиоизлучения земных покровов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 280 с.
- **6. Богородский В.В., Козлов А.И.** Микроволновая радиометрия земных покровов. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 260 с.
- 7. Поляриметрические алгоритмы обнаружения радиолокационных объектов на фоне активных шумовых помех / А.И. Козлов, Э.В. Амнинов, Ю.И. Вареница, В.Л. Румянцев // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. № 12–1. С. 179–187.
- 8. Поляризационно-допплеровская функция отклика составного радиолокационного объекта в задаче обнаружения / А.И. Козлов, В.Н. Татаринов, С.В. Татаринов, Н.Н. Кривин // Научный Вестник МГТУ ГА. 2013. № 193. С. 26–28.
- **9. Козлов А.И., Маслов В.Ю.** Численный метод решения трехмерной обратной задачи рассеяния электромагнитных волн на препятствии // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 179. С. 135–139.
- **10.** Быков А.А., Сидоркина Ю.А., Ковальчук А.А. Применение сигма-дельта модуляторов в дробных синтезаторах частоты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2011. № 2.
- **11. Шахтарин Б.И., Быков А.А.** Сигма дельта модулятор // Научный Вестник МГТУ ГА. 2010. № 158. С. 156–161.

Civil Aviation High Technologies

12. Акиншин Н.С., Румянцев В.Л., Акиншин О.Н. Экспериментальная оценка информативности поляризационно-модулированных сигналов // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2017. Т. 22, № 5. С. 478–486.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Троицкий Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики Московского государственного университета геодезии и картографии, v.troja@yandex.ru.

ANALISIS OF THE INFLUENCE OF THE MAIN PARAMETERS AND CONDITION OF WORK OF AIRCRAFT CESN ON THE EFFICENCY OF THEIR USE METHODS OF MATHEMATICAL MODELING

Vladimir I. Troitsky¹

¹Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia

ABSTRACT

The article describes the results of the numerical experiments on the mathematical model of the correlation-extreme navigation system (CESN) of the aircraft (LA) using microwave radiation of the earth's cover. The aim of the numerical experiments was the analysis of the influence of the main parameters (characteristics of the radiometer and antenna, a means of reviewing the space, parameters of the current image and the reference image, methods for image processing (algorithms for image correlation), conditions of the equipment operation (the speed and altitude of aircraft, the evolution of media) on the efficiency of CESN. The experiments were carried out with the fields of the underlying surface of three types-with an artificially synthesized map (CLAIM) containing several objects of different thermal contrast; with a homogeneous random field (OSP), with fragments of a digital map object structure (TSKOS) of real surface area of the earth. As a result of numerical experiments the author studied the influence on exactness characteristics of CESN navigation parameters (bank angles, pitch, yaw), flight altitude and speed, the noise of the radiometer, the pattern width, the width of the review sector, mis-scaling and angular misalignment of the current and reference images. Comparison of different methods of surface scanning was made based on the simulation results. During the experiments, the variation of one of the parameters with respect to the base variants of the parameters was carried out and the values and variances of errors of the CESN were estimated. All three main methods of beam scanning (longitudinal with a multi-beam radiometer, conical and transverse) were considered. The operation of the maximum search was made up of two procedures: searching for the global maximum area of the correlation matrix by enumerating all matrix entries and refining the location of the true maximum point by quadratic interpolation of the function. The implementation of errors is considered for various trajectories of the aircraft's motion, as well as for various angular variances. The implementation processing showed that an increase in the angular dispersion leads to a simultaneous increase in both the error modulus and the variance of the error modulus. The analysis of the obtained dependences shows a fairly stable tendency to reduce errors of CESN with a decrease in navigation angles. This dependence is demonstrated graphically. In order to estimate only the influence of the fluctuation noise of the radiometer on the magnitude of the CESN errors, a series of experiments was performed in which all other random fluctuations in the channel were eliminated.

Key words: navigation, simulation, microwave radiation, informativeness of the earth's cover radiation.

REFERENCES

- **1. Aurov V.V., Gurevich A.A., Derenchenko L.P., Troitsky V.I.** *Modelirovanie radioteplovoj KESN s mnogoluchevym radiometrom* [Modeling of the radiothermal CESN with a multibeam radiometer]. *Voprosy radioelektroniki Ser. OVRE* [Questions of radioelectronics. Series of OVRE], 1992, vol. 5. (in Russian)
- 2. Troitsky V.I. Razrabotka metodov matematicheskogo modelirovaniya radioteplovyx KESN letatelnyx apparatov [Development of methods for mathematical modeling of radiothermal CESN air-

- craft]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2016, vol. 19, No. 5, pp. 97–103. (in Russian)
- **3.** Troitsky V.I. Ocenka vremennoj navigacionnoj ustojchivosti radioteplovyx polej zemnoj poverxnosti v zadachax korrelyacionno-ekstremalnoj navigacii [Evaluation of the temporal navigation stability of the radio thermal fields of the earth's surface in problems of correlation-extreme navigation]. Izvestiya vuzov "Geodeziya i kartografiya" [Izvestia vuzov. Geodesy and aerophotography], 2013, No. 2, pp.72–75. (in Russian)
- **4. Troitsky V.I.** Kriterii informativnosti etalonnyx radioteplovyx polej, ispolzuemyx v KESN [Criteria for informative reference radiothermal fields used in CESN]. Izvestiya vuzov "Geodeziya i kartografiya" [Izvestia vuzov. Geodesy and aerophotography], 2013, No. 3, pp. 61–64. (in Russian)
- **5. Bogorodsky V.V., Kanareikin D.B., Kozlov A.I.** Polyarizaciya rasseyannogo i sobstvennogo radioizlucheniya zemnyx pokrov [Polarization of scattered and intrinsic radio emission of terrestrial coverings]. L.: Gidrometeoizdat, 1981, 280 p. (in Russian)
- **6. Bogorodsky V.V., Kozlov A.I.** *Mikrovolnovaya radiometriya zemnyx pokrovov* [Microwave radiometry of terrestrial coverings]. L.: Gidrometeoizdat, 1985, 260 p. (in Russian)
- 7. Kozlov A.I., Amninov E.V., Varenica Yu.I., Rumyantsev V.L. Polyarimetricheskiye algoritmy obnaruzheniya radiolokatsionnykh ob"yektov na fone aktivnykh shumovykh pomekh [Polarimetric algorithms for detecting radar objects against the background of active noise interference]. Isvestiya Tulskogo Gosudarstvennogo Universiteta [Izvestia of the Tula State University. Engineering Sciences], 2016, No. 12–1, pp. 179–187. (in Russian)
- **8. Kozlov A.I., Tatarinov V.N., Tatarinov S.V., Krivin N.N.** *Polyarizatsionno-dopplerovskaya funktsiya otklika sostavnogo radiolokatsionnogo ob"yekta v zadache obnaruzheniya* [Polarization-Doppler response function of a composite radar object in the detection problem]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2013, No. 193, pp. 26–28. (in Russian)
- 9. Kozlov A.I., Maslov V.Yu. Chislennyy metod resheniya trokhmernoy obratnoy zadachi rasseyaniya elektromagnitnykh voln na prepyatstvii [A numerical method for solving the three-dimensional inverse scattering problem of electromagnetic waves on an obstacle]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2012, No. 179, pp. 135–139. (in Russian)
- 10. Byikov A.A., Sidorkina Yu.A., Kovalchuk A.A. Primenenie sigma-delta modulyatorov v drobnyih sintezatorah chastotyi [The use of sigma-delta modulators in fractional frequency synthesizers]. Vestnik MGTU im. Baumana Seriya "Estestvenniye nauki" [Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series "Instrument construction"], 2011, No. 2. (in Russian)
- 11. Shakhtarin B.I., Byikov A.A. Sigma-delta modulyator [Sigma-delta modulator]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2010, No. 158, pp. 156–161. (in Russian)
- 12. Akinshin N.S., Rumyantsev V.L., Akinshin O.N. Eksperimentalnaya ocenka informativnosti polyarizacionno-modulirovannyx signalov [Experimental evaluation of the information content of polarization parameters]. Izvestiya vysshyh uchebnyh zavedeniy. Elektronika [Proceedings of Universities, Electronics], 2017, vol. 22, No. 5, pp. 478–486. (in Russian)

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Vladimir I. Troitsky, Professor, Doctor of Technical Sciences, Head of the Chair of Physics, Moscow State University of Geodesy and Cartography, v.troja@yandex.ru.

 Поступила в редакцию
 17.10.2017
 Received
 17.10.2017

 Принята в печать
 14.03.2018
 Accepted for publication
 14.03.2018

ББК 05 Н 34 Св. план 2018

Научный Вестник МГТУ ГА Том 21, № 02, 2018 Civil Aviation High TECHNOLOGIES Vol. 21, No. 02, 2018

Свидетельство о регистрации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-47989 от 27 декабря 2011 г.

	Подписано в печать 24.04.18 г.	
Печать цифровая	Формат 60×90/8	22,75 усл. печ. л.
Заказ № 307 / 61		Тираж 100 экз.

Московский государственный технический университет ГА 125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20 Изготовлено в ИД Академии имени Н.Е. Жуковского 125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., дом 6А

Тел.: (495) 973-45-68

E-mail: mail@phzhukovskogo.ru

Подписной индекс в каталоге Роспечати 84254 © Московский государственный технический университет ГА, 2018