

Том 29, № 01, 2026

ISSN 2079-0619

e-ISSN 2542-0119

Научный Вестник МГТУ ГА



Civil Aviation High TECHNOLOGIES

Vol. 29, No. 01, 2026

Издается с 1998 г.

Москва
2026

Научный Вестник МГТУ ГА решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ включен в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Главная редакция

- Главный редактор:** *Елисеев Б.П.*, заслуженный юрист РФ, проф., д. ю. н., ректор МГТУ ГА, Москва, Россия.
- Зам. главного редактора:** *Воробьев В.В.*, проф., д. т. н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия.
- Ответственные секретари главной редакции:** *Наумова Т.В.*, доцент, д. филос. н., профессор кафедры МГТУ ГА, Москва, Россия;
Полешкина И.О., доцент, д. т. н., старший научный сотрудник отдела научных исследований МГТУ ГА, Москва, Россия.

Члены главной редакции:

- Боев С.Ф.*, проф., д. т. н., д. э. н., генеральный директор Межгосударственной акционерной корпорации «Вымпел», Москва, Россия;
- Гаранина О.Д.*, почетный работник науки и техники РФ, проф., д. филос. н., проф. МГТУ ГА, Москва, Россия;
- Желтов С.Ю.*, заслуженный деятель науки РФ, академик РАН, проф., д. т. н., первый заместитель генерального директора ГосНИИАС, Москва, Россия;
- Калугин В.Т.*, проф., д. т. н., декан МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия;
- Козлов А.И.*, заслуженный деятель науки и техники РФ, проф., д. ф.-м. н., проф. МГТУ ГА, Москва, Россия;
- Лукин Д.С.*, заслуженный деятель науки РФ, проф., д. ф.-м. н., проф. МФТИ, Москва, Россия;
- Махутов Н.А.*, член-корреспондент РАН, проф., д. т. н., г. н. с. ФГБУН Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия;
- Трофименко Ю.В.*, проф., д. т. н., зав. каф. МАДИ, Москва, Россия;
- Туркин И.К.*, проф., д. т. н., зав. каф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;
- Ченцов А.Г.*, член-корреспондент РАН, проф., д. ф.-м. н., г. н. с. Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;
- Чернышев С.Л.*, академик РАН, проф., д. ф.-м. н., вице-президент РАН, научный руководитель ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия;
- Шапкин В.С.*, заслуженный работник транспорта РФ, проф., д. т. н., первый заместитель генерального директора Национального исследовательского центра «Институт имени Н.Е. Жуковского», Москва, Россия;
- Дамиан Ривас Ривас*, проф., PhD, проф. Университета Севильи, Севилья, Испания;
- Сюй Хаудзюнь*, PhD, Университет военно-воздушных сил, Хиан, Китай;
- Франческа де Кресченцио*, проф., кафедра промышленной инженерии, Болонский университет, Болонья, Италия;
- Владимир Немец*, PhD, Транспортный факультет Яна Пернера, кафедра воздушного транспорта, Университет Пардубице, Пардубице, Чешская Республика;
- Станислав Сзабо*, PhD, Факультет авиации, Технический университет в Кошице, Кошице, Словацкая Республика.

Editorial Board

- Editor-in-Chief:** *Boris P. Eliseev*, Professor, Doctor of Sciences, Rector, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
- Deputy Editor-in-Chief:** *Vadim V. Vorobyev*, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
- Executive Secretaries:** *Tatiana V. Naumova*, Associate Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
Irina O. Poleshkina, Associate Professor, Doctor of Science, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia.

Chief Editorial Board:

- Sergey F. Boev*, Professor, Doctor of Sciences, General Director, Interstate Joint Stock Corporation "Vympel", Moscow, Russia;
- Olga D. Garanina*, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
- Sergey Y. Zheltov*, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Academician, Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences, First Deputy General Director, State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russia;
- Vladimir T. Kalugin*, Professor, Doctor of Sciences, Dean, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;
- Anatoly I. Kozlov*, Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;
- Dmitry S. Lukin*, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;
- Nikolay A. Makhutov*, Corresponding Member, The Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Science, Principal Researcher, FSBI, Institute of Machine Science named after A.A. Blagonravov, Moscow, Russia;
- Yuriy V. Trofimenko*, Professor, Doctor of Science, Head of Chair, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, Moscow, Russia;
- Igor K. Turkin*, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia;
- Aleksander G. Chentsov*, Corresponding Member, The Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Science, Principal Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, named after N.N. Krasovskiy, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia;
- Sergey L. Chernishov*, Academician, Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Sciences, Vice-President, Russian Academy of Sciences, Academic Adviser, National Research Center "Zhukovskiy Institute", Moscow, Russia;
- Vacily S. Shapkin*, Honored Worker of Transport of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, First Deputy General Director, The National Research Center "Zhukovskiy Institute" Moscow, Russia;
- Damian Rivas Rivas*, Professor, PhD, University of Seville, Seville, Spain;
- Xu Haojun*, PhD, Air Force Engineering University, Xi'an, China;
- Francesca De Crescenzo*, Professor, Department of Industrial Engineering DIN, University of Bologna, Bologna, Italy;
- Vladimir Němec*, PhD, Faculty of Transportation Sciences, Jan Perner Transport Faculty, University of Pardubice, Pardubice, Czech Republic;
- Stanislav Szabo*, Associate Professor, PhD, Dean, Faculty of Aeronautics, Technical University of Košice, Košice, Slovak Republic.

Web-site: <http://avia.mstuca.ru>

E-mail: vestnik@mstuca.ru

Редакционный совет

Абрамов О.В., заслуженный деятель науки РФ, проф., д. т. н., Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, Владивосток, Россия;

Акиншин Р.Н., проф., д. т. н., в. н. с., секция оборонных проблем МО РФ при президенте РАН, Москва, Россия;

Бачкало Б.И., проф., д. т. н., в. н. с. ЦНИИ ВВС МО РФ, Щелково, Россия;

Брусов В.С., проф., д. т. н., проф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Васильев О.В., проф., д. т. н., г. н. с. ООО «НПО НаукаСофт», Москва, Россия;

Вышинский В.В., проф. МФТИ, г. н. с. ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия;

Горелик А.Г., проф., д. ф-м. н., проф. МИФИ, Москва, Россия;

Гузий А.Г., д. т. н., зам. директора ПАО «Авиакомпания «ЮТэйр», Москва, Россия;

Давидов А.О., доцент, д. т. н., Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Харьков, Украина;

Косьянчук В.В., проф., д. т. н., проф. РАН, заместитель генерального директора ГосНИИАС, Москва, Россия;

Красильщик И.С., проф., д. ф-м. н., проф. МНУ, Москва, Россия;

Кузнецов С.В., проф., д. т. н., зав. каф. МГТУ ГА, Москва, Россия;

Логвин А.И., заслуженный деятель науки РФ, проф., д. т. н., проф. МГТУ ГА, Москва, Россия;

Пантелеев А.В., проф., д. ф-м. н., зав. каф. МАИ (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Полтавский А.В., д. т. н., с. н. с., ведущий научный сотрудник Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;

Рухлинский В.М., д. т. н., председатель комиссии МАК по связям с Международной организацией гражданской авиации, Москва, Россия;

Самохин А.В., д. т. н., в. н. с. Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;

Сарычев В.А., проф., д. т. н., г. н. с. АО «Радар-ММС», Санкт-Петербург, Россия;

Татаринов В.Н., действительный член Академии электромагнетизма США, проф., д. т. н., проф. ТУСУР, Томск, Россия;

Увайсов С.У., проф., д. т. н., зав. каф. МГУ, Москва, Россия;

Халютин С.П., проф., д. т. н., ген. директор ООО «НПО НаукаСофт», Москва, Россия;

Харитонов С.А., проф., д. т. н., зав. каф. НГТУ, Новосибирск, Россия;

Ходаковский В.А., заслуженный деятель науки ЛССР, проф., д. т. н., Рига, Латвия;

Чинючин Ю.М., проф., д. т. н., проф. МГТУ ГА, Москва, Россия;

Шахтарин Б.И., академик РАЕН, заслуженный деятель науки и техники РФ, проф., д. т. н., проф. МГТУ им. Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета), Москва, Россия;

Юрков Н.К., заслуженный деятель науки РФ, почетный работник высшего профессионального образования РФ, проф., д. т. н., проф. ПГУ, Пенза, Россия.

Editorial Council

Oleg V. Abramov, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia;

Ruslan N. Akinshin, Professor, Doctor of Sciences, Leading Researcher, Section of Applied Problems under the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;

Boris I. Bachkalo, Professor, Doctor of Sciences, Leading Research Fellow, Russian Air Force Central Scientific Research Institute of Ministry of Defence, Shchelkovo, Russia;

Vladimir S. Brusov, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

Oleg V. Vasiliev, Professor, Doctor of Science, Principal Researcher, LLC “Scientific Production Association, NaukaSoft”, Moscow, Russia;

Viktor V. Vyshinsky, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Institute of Physics and Technology, Chief Research Fellow, Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovskiy, Russia;

Andrey G. Gorelik, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia;

Anatoliy G. Guziy, Doctor of Sciences, UTair Airlines, Moscow, Russia;

Albert O. Davidov, Assistant Professor, Doctor of Sciences, National Aerospace University Kharkiv Aviation Institute, Kharkiv, Ukraine;

Vladislav V. Kosyanchuk, Professor, Doctor of Sciences, Professor RAS, Deputy General Director of State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia;

Iosif S. Krasilschik, Professor, Doctor of Sciences, Moscow Independent University, Moscow, Russia;

Sergey V. Kuznetsov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Aleksandr I. Logvin, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation Moscow, Russia;

Andrey V. Panteleev, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

Alexandr V. Poltavsky, Doctor of Technical Sciences, Senior Scientific Researcher, Leading Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia;

Victor M. Rukhlinskiy, Doctor of Sciences, Chairman of the Commission for Relations with ICAO Board, International and Interstate Organizations of the Interstate Aviation Committee, Moscow, Russia;

Aleksey V. Samokhin, Doctor of Sciences, Leading Researcher, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia;

Valentin A. Sarychev, Professor, Doctor of Sciences, “Radar-MMS” Joint-Stock Company, St.Petersburg, Russia;

Viktor N. Tatarinov, Actual Member of the US Electrical Magnetism Academy, Professor, Doctor of Sciences, Tomsk State Radio Electronic and Control Systems University, Tomsk, Russia;

Saygid U. Uvaysov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Moscow Technological University, Moscow, Russia;

Sergey P. Khalyutin, Professor, Doctor of Sciences, Director General, CEO LLC “Scientific Production Association, NaukaSoft”, Moscow, Russia;

Sergey A. Kharitonov, Professor, Doctor of Sciences, Head of Chair, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;

Vladimir A. Hodakovsky, Honored Worker of Science of Latvian Soviet Socialist Republic, Professor, Doctor of Sciences, Riga, Latvia;

Yuriy M. Chinyuchin, Professor, Doctor of Sciences, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia;

Boris I. Shakhtarin, Academician of the Russian Academy of Natural Sciences, Honored Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

Nikolay K. Urkov, Honored Worker of Science of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Professor, Doctor of Sciences, Penza State University, Penza, Russia.

СОДЕРЖАНИЕ

К 55-ЛЕТИЮ

МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Елисеев Б.П.

Новая модель высшего образования: проблемы и перспективы подготовки кадров для авиатранспортной отрасли 8

ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

Vasiliev O.V., Gorshkov P.S., Zyabkin S.A., Shepet I.P.

The use of onboard decimeter-band radar stations for humanitarian demining 23

Mozzhukhin D.A., Nechaev V.N., Subbotin R.A.

Optimization of the approach to Moscow Flight Information Region: Environmental and economic aspects of implementing the continuous descent procedure 38

Ченцов А.Г., Полешкина И.О., Ченцов А.А., Ченцов П.А.

Маршрутизация движения грузовых беспилотных летательных аппаратов на труднодоступных территориях. Часть 1 53

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Каргаев М.В., Солодилов И.С.

Методики определения жесткостных характеристик лопасти несущего винта вертолета на базе вычислительного эксперимента 84

Тарасов А.Л.

Статистическое моделирование боевого функционирования системы авиационных комплексов армейской авиации 97

CONTENTS

DIDICATED TO THE 55th ANNIVERSARY OF MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY OF CIVIL AVIATION

Eliseev B.P.

A new model of higher education: Issues and prospects for training personnel for the air transport industry 8

TRANSPORTATION SYSTEMS

Vasiliev O.V., Gorshkov P.S., Zhabkin S.A., Shepet I.P.

The use of onboard decimeter-band radar stations for humanitarian demining 23

Mozzhukhin D.A., Nechaev V.N., Subbotin R.A.

Optimization of the approach to Moscow Flight Information Region: Environmental and economic aspects of implementing the continuous descent procedure 38

Chentsov A.G., Poleshkina I.O., Chentsov A.A., Chentsov P.A.

Routing of cargo unmanned aerial vehicles in remote areas. Part 1 53

MECHANICAL ENGINEERING

Kargaev M.V., Solodilov I.S.

Methods for determining the stiffness properties of a helicopter main rotor blade based on computational experiments 84

Tarasov A.L.

Statistical modeling of combat functioning for army aviation airborne complexes system 97

*К 55-ЛЕТИЮ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ*

УДК 001.3

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-8-22

Новая модель высшего образования: проблемы и перспективы подготовки кадров для авиатранспортной отрасли

Б.П. Елисеев¹

*¹Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия*

Аннотация: Рассмотрены основные проблемы подготовки специалистов для гражданской авиации в высших учебных заведениях страны, обусловленные реорганизацией отечественной образовательной системы. На основании анализа научных публикаций и дискуссий профессионалов по проблематике современного высшего образования выявлены противоречия заявленных приоритетов и разногласия в последовательности решения поставленных перед высшей школой задач. Установлено отсутствие обоснованных критериев оценки качества образовательного процесса и подготовки специалистов. Сформулирована актуальная потребность в урегулировании роли государства в оценке состояния образования в целом и образовательных учреждений в частности в ракурсе его правовых и контрольно-надзорных функций. На примере МГТУ ГА показана специфика отраслевой подготовки профессионалов, уникальность, устойчивость к новым вызовам и успешность которой подтверждены полувековой высокой конкурентоспособностью выпускников на российском и международном рынке труда, а следовательно, сохраняющейся привлекательностью для абитуриентов. В контексте анонсированной Минобрнауки России в начале 2025 года инициативы построения новой модели высшего образования выявлены факторы, сдерживающие развитие отраслевой системы образования, определены концептуальные подходы для их преодоления, а также обоснована целесообразность сохранения системы подготовки специалистов для гражданской авиации в структуре Росавиации, что обеспечит сохранение целостности образовательно-производственной вертикали; соответствие образовательного процесса международным стандартам ИКАО; непрерывность и высокое качество подготовки авиационного персонала; выполнение государственных задач в области авиационной мобильности и безопасности полетов.

Ключевые слова: задачи системы высшего образования, риски реорганизации образовательной сферы, специфика подготовки авиационных специалистов, новая модель образования.

Для цитирования: Елисеев Б.П. Новая модель высшего образования: проблемы и перспективы подготовки кадров для авиатранспортной отрасли // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 8–22. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-8-22

A new model of higher education: Issues and prospects for training personnel for the air transport industry

B.P. Eliseev¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

Abstract: This paper considers the main issues related to the training of specialists for civil aviation at the higher educational institutions of Russia, which are caused by the reorganization of the national education system. Based on an analysis of the scientific publications and discussions among professionals regarding contemporary higher education, contradictions in the stated priorities and disagreements on the sequence of solutions to the tasks set for higher education institutions have been revealed. It has

been established that there is a lack of substantiated criteria for assessing the quality of the educational process and training of specialists. An urgent need has been formulated to regulate the role of the state in evaluating the state of education as a whole and educational institutions in particular, in terms of its legal and supervisory functions. The example of Moscow State Technical University of Civil Aviation (MSTU CA) illustrates the specifics of sectoral professional training, which uniqueness, resilience to new challenges and success are confirmed by half a century of high competitiveness of its graduates in the Russian and international labor markets, thus maintaining their attractiveness for applicants. In light of the initiative announced by the Ministry of Education and Science at the beginning of 2025 to build a new model of higher education, factors that hinder the development of the sectoral education system have been identified, along with conceptual approaches to overcome them. Furthermore, the feasibility of maintaining the civil aviation training system within the structure of Rosaviatsia has been substantiated, which will ensure: the integrity of the educational-production vertical; compliance of the educational process with ICAO international standards; continuity and high quality of aviation personnel training; and fulfillment of the state tasks in the field of aviation mobility and flight safety.

Key words: tasks of the higher education system, risks of reorganization in the education sector, specifics of training aviation specialists, a new model of education.

For citation: Eliseev, B.P. (2026). A new model of higher education: Issues and prospects for training personnel for the air transport industry. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 8–22. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-8-22

Введение

В настоящее время проблемы образования обусловлены несколькими факторами глобального и локального характера, включая поддержание соответствия российского образования требованиям международных стандартов, формирование гарантированного наличия средств для развития образовательных учреждений, обновления материально-технической базы учебных заведений в соответствии с достижениями научно-технического прогресса, материального обеспечения обучающихся, организацию доступности непрерывного повышения квалификации профессорско-преподавательского состава и др.

При этом одним из ключевых является вопрос по урегулированию роли государства в образовательной сфере в формате правовых и контрольно-надзорных процедур оценки состояния образования в целом и образовательных учреждений в частности. Одна из особенностей, связанная с проблемой образования, заключается в заинтересованности и взаимосвязи четырех субъектов – государства, образовательного учреждения, обучающего персонала и обучающихся лиц. Поэтому критерии оценок для принятия решений могут иметь противоречивый характер.

Сегодня авиационный транспорт – это прежде всего сложнейшая современная техника, достижения научно-технического прогресса которой реализуются в конструкциях,

оборудовании или системах, направленных на удовлетворение потребности в перевозках пассажиров, грузов и обеспечивающих взаимодействие различных видов транспорта.

Поэтому одной из главных особенностей авиатранспортного учебного заведения, отличающей его практически от любого другого аналогичного заведения, является то, что специалисты, получившие высшее или среднее техническое транспортное образование, ежедневно связаны с обеспечением безопасности жизни потребителей услуг этой отрасли, и недостаточная компетентность выпускников может привести к трагическим последствиям. Более того, согласно требованиям ИКАО, изложенным в приложениях 1 и 6 к Конвенции о международной гражданской авиации и Руководстве по обучению в области человеческого фактора (Doc. 9683-AN/950) подчеркивается, что методы обучения и подготовки квалифицированных специалистов должны содержать научно обоснованные технические, технологические и организационные решения, внедрение которых позволит внести значительный вклад в безопасность и эффективность авиатранспортной отрасли.

Это создает объективные предпосылки для глубокого изучения изменяющихся проблем и перспектив подготовки кадров для авиатранспортной отрасли, которые принципиально отличаются от организации обучения в высших учебных заведениях транспорта других технических вузов.

Область актуальных задач в образовательной сфере

Изучение и попытки решения актуальных задач, связанных с образованием, особенно высшей школой, представлены результатами многочисленных научных исследований [1–8].

Среди наиболее распространенных вопросов, рассматриваемых авторами публикаций, оказываются вопросы эффективного использования средств на образование; оценки состояния материально-технического обеспечения учебных заведений; достижения соответствия российского образования международным стандартам; обеспечения доступности и непрерывности подготовки и повышения квалификации кадров и др. Тем не менее отмечается недостаточность и малоизученность задач, связанных с оценкой роли государства в сложной социально-экономической системе государственного образования, являющегося одним из важнейших элементов национальной безопасности [9–14].

Именно государство обязано, с одной стороны, создать условия для обеспечения подготовки необходимых стране специалистов, а с другой – поднять общекультурный и интеллектуальный уровень общества, предоставив в соответствии с Конституцией реальное право каждому гражданину страны на получение высшего образования на конкурсной основе.

Однако противоречивость понятий в рассуждениях о высшем образовании искажают приоритетность и последовательность решения актуальных задач, важнейшей из которых является повышение качества образовательного процесса.

Прежде всего это обусловлено тем, что наблюдается системный дефицит заинтересованности в обеспечении высокого качества подготовки специалистов со стороны всех ключевых участников образовательного процесса – государства, высших учебных заведений, профессорско-преподавательского состава и самих студентов, что подтверждается объективными факторами:

- отсутствием четкой корреляции между планированием бюджета на образование и потребностью в численности конкретных специалистов будущего поколения;
- недостаточностью соответствия содержания учебных программ и качества подготовки выпускников, отвечающих требованиям федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС);
- неэффективным использованием уникального научного потенциала профессорско-преподавательского состава, имеющих ученые степени докторов и кандидатов наук;
- социально-экономическими проблемами, обусловленными необходимостью совмещения студентами, обучающимися на договорной основе, работы с учебой;
- бюрократизацией в области организации и оценки текущей деятельности профессорско-преподавательского состава.

Причина всего этого имеет вполне материальную основу, состоящую в отсутствии зависимости между качеством обучения, являющимся первостепенной задачей государства, и финансовым обеспечением вузов. Громоздкий механизм финансирования и управления высшей школой представляет собой систему со слабой обратной связью и отсутствием реальных стимулов у профессорско-преподавательского и вспомогательного состава за результаты своей работы, а также отсутствием у большинства студентов активной заинтересованности в качестве получаемых знаний.

Именно эти противоречия нуждаются в немедленном разрешении.

Задачи образования и проблемы их реализации

Роль государства в образовании обусловлена двумя ключевыми задачами – созданием условий для подготовки кадров по всем основным направлениям общественно полезной деятельности в соответствии с потребностями государства и повышением общекультурного и интеллектуального уровня общества.

Об успехе решения этих задач можно судить по оценке эффективности процессов реорганизации и оптимизации образовательной системы посредством локальной модернизации отдельных ее элементов. Например, постановлением Комитета по высшей школе Миннауки РФ № 13 от 13.03.1992¹ была введена многоуровневая структура высшего образования:

первый уровень – базовое высшее образование со сроком обучения не менее 4 лет в рамках бакалавриата вуза;

второй уровень – высшее образование со сроком реализации 2–3 года в рамках магистратуры вуза.

Реорганизация произошла в подготовке научных кадров, превратив аспирантуру практически в 6–8 курсы обучения в вузе.

Кроме этого, внедрение административных мер при оценке эффективности деятельности вузов посредством применения очень спорных и формальных показателей затронуло большое количество образовательных учреждений, следствием чего стали процессы закрытия и объединения вузов и их филиалов, повлиявшие на качество системы образования в целом.

Поскольку вопрос о необходимости и целесообразности реформирования образовательной сферы публично не обсуждался, процессы такой реорганизации стали поводом для активной дискуссии представителей ректорского корпуса, с мнением которых в сложившейся ситуации трудно не согласиться.

«В России сегодня происходит девальвация высшего образования, слишком много обещаний дают псевдовузы молодому поколению. Эти надежды не оправдываются. Если человек получает диплом, это не значит, что

он получает знания», – писал ректор Михаил Эскиндаров².

По справедливому замечанию ректора МГУ им. Ломоносова Виктора Садовниченко, «аспирантура у нас теперь – третий уровень образования. И я боюсь, что по нашей традиции и в соответствии с этим законом аспирантов начнут активно учить. Учить аспирантов, конечно, надо, но аспирантура – это в первую очередь научные исследования»³.

Справедливо отмечала генеральный секретарь Российского Союза ректоров О. Каширина, что «нынешний образовательный курс во многом основывается на попытках исключительно административного регулирования конкурентоспособности высшей школы, при этом он не создает стимулирующих механизмов для всех»⁴.

Многочисленные публикации и обсуждения результатов модернизации образования рассматривали вариант решения прежде всего с позиции организационных вопросов, направленных на объединение, сокращение или преобразование вузов в новые структуры без упоминания о достижении ключевых целей образования, одной из которых является качество.

Более того, отмечаются «претензии ректорского сообщества, связанные со стихийно проводимой реформой высшей школы и сокращением вузов, которое оборачивается весьма резонансными претензиями родителей абитуриентов». Такая оценка со стороны первого заместителя председателя Комитета по образованию Государственной думы Российской Федерации В. Бурматова, обладающего наиболее полной информацией о состоянии образования в России, должна была заставить

¹ Постановление Миннауки РФ от 13.03.1992 № 13 «О введении многоуровневой структуры высшего образования в Российской Федерации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 1992. URL: <https://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=EXP&n=401487#NuLux9Vlz3ddaYIp> (дата обращения: 20.08.2025).

² Эскиндаров М. В России происходит девальвация высшего образования [Электронный ресурс] // RG.RU. 12.12.2011. URL: <https://rg.ru/2011/12/13/eskindarov.html> (дата обращения: 20.08.2025).

³ Садовнический В. Не так все у нас и плохо [Электронный ресурс] // Газета.ru. 25.01.2014. URL: https://www.gazeta.ru/science/2014/01/25_a_5866277.shtml (дата обращения: 20.08.2025).

⁴ Каширина О. Стимул для роста // Ректор вуза. 2014. № 12.

более критично и более тщательно относиться к массовым организационным новшествам, предлагаемым Минобразования.

Подводя интегральный итог, следует обратить внимание на цитату из статьи В. Бурматова, в которой он подчеркнул, что «основными достижениями в сфере образования Россия обязана Президенту страны, а никак не Министерству образования, действия которого зачастую имеют совершенно иной вектор»⁵.

Тем не менее можно выделить ряд позитивных изменений последнего десятилетия. Например, методически проводимые Минобрнауки мониторинги эффективности образовательных учреждений заставили по-иному выстраивать работу ректоратов и ученых советов вузов посредством активного внедрения более прогрессивных форм управления и проведения рациональной оптимизации. Значительную роль сыграли проводимые Минобрнауки конкурсы по распределению квот количества бюджетных мест.

Стали более понятны новые правила и процедуры аккредитации, проводимой Рособнадзором.

В работе Высшей аттестационной комиссии (ВАК РФ) есть также ряд весьма позитивных преобразований, обусловленных качественным изменением состава и структуры диссертационных советов, численность которых сократилась более чем на 30 %⁶.

Заметные изменения произошли в организации управления жизнедеятельностью вузов. В настоящее время крупные вузы страны находятся в ведении не только Минобрнауки, но и других министерств и подконтрольных им агентств, которые вправе самостоятельно выпускать подзаконные акты, направленные на организацию образовательной и научной деятельности. Кроме того, значительная

часть работы по управлению образованием возлагается на органы власти субъектов Российской Федерации и систему местного самоуправления, предоставляя им право выступать в качестве учредителей образовательных учреждений разного уровня.

Поэтому, чтобы на практике реализовать политические установки, выраженные в указах главы государства, самих указов недостаточно. Необходима эффективная система органов исполнительной власти, успешно реализующая эту политическую волю. Органы исполнительной власти должны самостоятельно готовить проекты подзаконных и ведомственных актов. Причем качество и оперативность такой деятельности имеет ключевое значение.

Несомненно, у современной системы образования достаточно жизнеспособных элементов, которые могут и должны стать точками роста⁷. Но надо уметь определять эти точки и способствовать их развитию.

Необходимо обратить особое внимание на то, что образование является важнейшим элементом безопасности страны. Именно об этом говорится в Стратегии национальной безопасности Российской Федерации, где определяется, что одной из стратегических целей обеспечения национальной безопасности страны является «повышение уровня общего и профессионального образования населения, профессиональных качеств кадров высшей квалификации за счет доступности конкурентоспособного образования»⁸.

Серьезной проблемой для образовательной деятельности явились последствия разрушения органической связи между школами и вузами, повлекшей за собой резкий рост отчислений студентов за академическую неуспеваемость в период первых двух лет обучения практически во всех вузах страны

⁵ Бурманов В. Пять причин не любить министра Ливанова [Электронный ресурс] // Взгляд. Деловая газета. 19.11.14. URL: <https://vz.ru/opinions/2014/11/19/715634.html> (дата обращения: 20.08.2025).

⁶ Филиппова В. Материалы общего собрания ректоров ВУЗов Москвы и Московской области // Вузовский вестник № 9. 27.04.15.

⁷ Елисеев Б. Ученая степень независимости // РБК Daily. 22.02.13.

⁸ Указ Президента Российской Федерации № 400 от 02 июля 2021 г. «О Стратегии национальной безопасности Российской Федерации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_389271/ (дата обращения: 20.08.2025).

из-за слабой подготовленности школьников к учебе.

Ректор СПбГУ Л. Вербицкая, рассуждая о проблемах педагогического образования, справедливо отметила, что «школьное и вузовское образование – сообщающиеся сосуды»⁹.

Восстановление органического единства школьного и высшего образования – залог уверенности студентов в своей востребованности в будущем. Поэтому необходимо не просто менять содержание учебных программ, а правильно их структурировать, делая эти программы более содержательными на основе компетентного подхода.

Следующий фактор, влияющий на эффективность процессов образовательной деятельности, – это уровень использования современного оборудования. Практически 80 % лиц, имеющих ученые степени докторов и кандидатов наук, являются кадровым составом вузов, представляя собой мощнейший интеллектуальный потенциал России, который может эффективно использовать в своей деятельности результаты научно-технического прогресса и искусственного интеллекта.

Такой подход позволит повысить вовлеченность преподавателей и студентов в научно-исследовательскую деятельность и увеличить объем целевых фундаментальных и прикладных исследований при государственной поддержке в интересах организационно-научного обеспечения достижения стратегических национальных приоритетов.

Подводя итог рассмотрения проблем в образовательной сфере деятельности, можно отметить, что целесообразность их решения ограничена отсутствием обоснованных критериев оценки качества образовательного процесса и подготовки специалистов. Это непростой вопрос, требующий сформулированного решения, подтвержденного доказательной базой, отражающей компетентное мнение и результаты обсуждения работников вуза, потребителей образовательных услуг и представителей науки.

⁹ Вербицкая Л. Портал международного экономического форума. 18.08.2000.

Анализ научных достижений в исследуемой области показал, что в качестве одного из критериев оценки эффективности деятельности вузов все чаще звучит предложение об оценке их работы по числу выпускников, работающих по специальности. Однако за кажущейся естественностью и простотой такого критерия скрывается довольно серьезное противоречие. Государственный вуз набирает студентов в соответствии с устанавливаемыми ему государством контрольными показателями приема (контрольные цифры приема – КЦП), где для каждого уровня образования строго определена численность принимаемых абитуриентов. Поскольку корректировка данных показателей не предусмотрена, это означает, что государство планирует количество подготовленных специалистов, требующееся обществу через 4–6 лет. Однако практика реализации этого подхода и накопленный опыт показывают, что многим выпускникам сложно трудоустроиться после окончания обучения по выбранному направлению ввиду отсутствия потребности в таких специалистах из-за существенной ошибки и противоречий между результатами прогноза государства и объективной реальностью. Поэтому логичнее было бы формулировать государственный заказ не на прием, а на выпуск специалистов в конкретном году.

Статистика показывает, что пассажиропоток российских авиакомпаний в январе – октябре 2024 года вырос по сравнению с аналогичным периодом 2023 года более чем на 6 %, развивается инфраструктура аэропортов за счет реконструкции 133 аэродромов. Это означает, что авиационной отрасли Российской Федерации потребуется значительное увеличение подготовленных авиационных специалистов.

Риски реорганизации образовательной системы подготовки специалистов авиационного персонала

В настоящее время Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ предусматривается отраслевое регулирование подготов-

ки специалистов авиационного персонала уполномоченными органами в области гражданской авиации. В связи с этим существующая архитектура подготовки авиационных специалистов, включающая подведомственность вузов Росавиации, наличие трех многопрофильных вузов и оптимальную филиальную сеть, уже доказала свою эффективность. Поэтому сохранение такой системы поддерживается всеми территориальными органами Росавиации и работодателями, что вполне соответствует государственной политике. Поскольку сохранение кадрового потенциала является важнейшим условием безопасности Российской Федерации, как указано в Основах государственной политики до 2030 года¹⁰, а также подтверждается мировой практикой кадровой политики, в результате которой подготовка авиаспециалистов осуществляется под контролем авиационных ведомств.

В России подготовка авиаперсонала регулируется не только вышеуказанным федеральным законом¹¹. Особая специфика зафиксирована в Воздушном кодексе (ВК) и строгими отраслевыми Федеральными авиационными правилами (ФАП). В соответствии с требованиями статей 52–54 ВК подготовка специалистов авиационного персонала гражданской авиации осуществляется по программам подготовки, утвержденными уполномоченным органом в области гражданской авиации, то есть Росавиацией.

Целесообразность такого подхода подтверждается наличием мощного потенциала учебных заведений гражданской авиации, представляющих собой вертикально интегри-

рованные уникальные образовательно-производственные комплексы, которые:

- эксплуатируют аэродромы с полным комплексом инфраструктуры, включая содержание летного поля, светотехническое и энергетическое обеспечение, организацию поисково-спасательных и противопожарных работ;
- содержат и эксплуатируют воздушные суда, обеспечивая их летную годность через сертифицированные технические службы;
- обладают специализированной техникой для удаления обледенения, содержания и ремонта взлетно-посадочных полос (ВПП), техникой для технического обслуживания воздушных судов (ВС);
- имеют медицинские подразделения для проведения врачебно-летных экспертных комиссий (ВЛЭК) и медицинские пункты, проводящие предполетные и послеполетные осмотры.

На этом фоне предполагаемая передача учебных заведений гражданской авиации из подчинения Федерального агентства воздушного транспорта Минтрансу России либо Минобрнауки России представляет собой серьезные риски для сохранения существующей эффективной системы подготовки авиаспециалистов и может повлечь за собой негативные последствия для безопасности полетов, а также международного признания российских дипломов.

Это обусловлено тем, что при проведении проверок ИКАО смена учредителя российских учебных заведений может рассматриваться как существенный недостаток в вопросах подготовки и выдачи свидетельств авиационному персоналу, недопустимое отклонение от статьи 33 Чикагской конвенции о взаимном признании свидетельств и удостоверений авиационного персонала.

Поэтому вопрос смены учредителей авиационных вузов необходимо решать с учетом следующих факторов:

- сохранения международного признания объективности российской системы подготовки авиаперсонала и доверия к ней;
- предотвращения разрыва отраслевой вертикали «госполитика – регулятор – образование»;

¹⁰ Указ Президента Российской Федерации № 748 от 31 декабря 2021 г. «О внесении изменений в Положение о Министерстве обороны Российской Федерации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_405651/ (дата обращения: 20.08.2025).

¹¹ Федеральный закон № 273-ФЗ от 29 декабря 2012 г. «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения: 20.08.2025).

- предотвращения отрыва от непосредственного регулятора и организации для проведения производственной практики, что негативно отразится на качестве подготовки;
- предотвращения межведомственных конфликтов, возникающих между Минтрансом России (как учредителем) и Росавиацией (как регулятором).

Более того, сложившаяся структура взаимоотношений «Росавиация – подведомственные вузы» основана на международных стандартах и практиках ИКАО. Россия, как участник Конвенции о международной гражданской авиации, обязана сотрудничать в области установления единообразия правил, стандартов, процедур и организации подготовки специалистов воздушного транспорта с целью обеспечения высокого уровня компетентности и профессионализма в гражданской авиации. Основные квалификационные требования, включая структуру и содержание программ подготовки авиационного персонала, изложены в приложении 1 «Выдача свидетельства авиационному персоналу» к Конвенции о международной гражданской авиации. Этим же приложением вводится понятие «утвержденная учебная организация».

В приложении 19 к Чикагской конвенции «Управление безопасностью полетов» содержатся основные положения в отношении условий утверждения учебной организации, согласованной с государством, ответственным за утверждение такой организации, в обязанности которой в ходе предоставления образовательных услуг включают обеспечение безопасности полетов.

В связи с этим можно сформулировать ряд ключевых аргументов за сохранение авиатранспортных вузов в юрисдикции Федерального агентства воздушного транспорта России (ФАВТ), которые обусловлены:

- наличием уникальных кадров: в учебных заведениях работают специалисты (летно-инструкторский состав, инженерно-технический состав, командно-летный состав), которые отсутствуют в других образовательных организациях России и должны соответствовать особым требованиям ФАП;

- поддержанием неразрывной связи с производством: действующие работники отрасли участвуют в подготовке специалистов, входят в состав государственных экзаменационных комиссий;
- созданием на базе авиакомпаний и предприятий производственных кафедр, учебных отрядов;
- ключевой ролью учебных заведений в авиатранспортной системе гражданской авиации;
- риском снижения качества подготовки в отрыве от производственной деятельности;
- размытыми границами ответственности в случае отрицательных последствий для отечественной системы подготовки авиационных специалистов;
- использованием тренажерных устройств имитации полета, применяемых в целях подготовки и контроля профессиональных навыков специалистов авиационного персонала гражданской авиации с целью обеспечения безопасности полетов.

Задачи построения новой модели высшего образования

Для сохранения структуры существующей образовательной системы подготовки специалистов авиационного персонала и в зависимости от сформулированных факторов, влияющих на качество обучения, необходимо рассмотреть ряд ключевых задач, решение которых позволит сохранить востребованность и повысить конкурентную привлекательность авиатранспортных вузов.

Еще в марте 2020 года Президент России в своем поручении № 589 п. 1¹² поставил четкую задачу «обеспечить пересмотр перечня специальностей и направлений подготовки высшего образования... принять меры по их

¹² Перечень поручений по итогам совместного расширенного заседания президиума Госсовета и Совета по науке и образованию (утв. Президентом РФ 28.03.2020 № Пр-589) [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2020. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_348837/ (дата обращения: 21.08.2025).

укрупнению». А в 2023 году своим Указом № 343 «О некоторых вопросах совершенствования системы высшего образования»¹³ дал старт пилотному проекту, предусматривающему изменение уровней высшего образования. Устанавливаются два уровня высшего образования: базовое высшее образование со сроками освоения 4–6 лет; специализированное высшее образование, 1–3 года. И уровень профессионального образования – аспирантура. Реализация пилотного проекта началась в шести образовательных организациях высшего образования.

Как известно, Указом Президента Российской Федерации от 22.01.2026 № 27 «О внесении изменений в Указ Президента Российской Федерации от 12 мая 2023 г. № 343 «О некоторых вопросах совершенствования системы высшего образования»¹⁴ продлены сроки пилотного проекта и расширен перечень участников. Таким образом, эксперимент по созданию новой модели высшего образования будет проводиться до 2030 года в 17 вузах России.

Правительство Российской Федерации утвердит в данных вузах перечни специальностей и направлений подготовки, научных специальностей, по которым осуществляется реализация программ базового высшего образования, специализированного высшего образования и аспирантуры, включая новые специальности базового высшего образования, специальности и направления подготовки специализированного высшего образования, а также квалификаций, присваиваемых по соответствующим специальностям и

направлениям подготовки, в рамках утвержденных укрупненных групп специальностей и направлений подготовки высшего образования.

Образовательные организации высшего образования – участники пилотного проекта должны разработать и утвердить новые образовательные стандарты и требования образования по уровням образования базового и специализированного высшего образования, а также соответствующие образовательные программы высшего образования и программы аспирантуры.

Успех реализации новой парадигмы высшего образования во многом обусловлен наличием в ее методической платформе трех ключевых компонентов.

Первый – социогуманитарная часть, включающая в себя фиксированный перечень дисциплин и зачетных единиц. Результатом освоения дисциплин должны стать знания, навыки, умения и оценочные материалы по контролю уровня знаний, обозначенные в единых федеральных программах. Это послужит формированию творческой, думающей и, что немаловажно, патриотически настроенной личности выпускников вузов нового поколения.

Второй – фундаментальная часть. В ней планируется определить наименование дисциплин и минимальный объем зачетных единиц для разработки программ, максимально отражающих федеральные рекомендации по развитию знаний, навыков и умений, соответствующих решению актуальных производственных задач, обусловленных отраслевыми особенностями транспортной деятельности. Поэтому формой промежуточной аттестации этого блока обучения должен быть экзамен, оценивающий степень освоения теоретических основ и практических навыков обучающимися для решения ситуационных задач.

Отличительной особенностью формирования программ фундаментальной части обучения для авиатранспортных вузов является развитие у обучающихся навыков логического и критического мышления, актуализированных знаний понятийного аппарата, систе-

¹³ Указ Президента РФ от 12.05.2023 № 343 «О некоторых вопросах совершенствования системы высшего образования» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2023. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_446951/ (дата обращения: 21.08.2025).

¹⁴ Указ Президента РФ от 22.01.2026 № 27 «О внесении изменений в Указ Президента Российской Федерации от 12 мая 2023 г. № 343 «О некоторых вопросах совершенствования системы высшего образования» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2026. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_524914/ (дата обращения: 28.01.2026).

матизированного понимания ключевых концепций и теоретических основ профессиональной деятельности.

И третий, особенно важный для авиатранспортных вузов, – профессиональная часть, которая должна быть гибкой в зависимости от профессии, отрасли и изменяющихся требований потенциальных работодателей к современным выпускникам.

Ожидаемые изменения в системе подготовки выпускников для гражданской авиации коснутся структуры обучения и состоят из трех частей. Первые две части рассчитаны на два года. Реализация новых принципов развития профессиональных компетенций, отражающихся в третьей части, предполагается в течение 2–4 лет. Это означает, что срок обучения для получения высшего образования, в зависимости от специальности, будет составлять от 4 до 6 лет.

В связи с этим следует выделить несколько новых направлений, характерных для подготовки выпускников, например транспортное право. Этот институт давно сложился как система правовых норм, регулирующая комплекс правоотношений в транспортной сфере (перевозка грузов, пассажиров и багажа, организация деятельности транспортных предприятий и т. п.). Для подготовки инженера эксплуатационного предприятия надо не только знать и понимать основные положения Воздушного кодекса и Чикагской конвенции, но и нормы, регулирующие правовые аспекты организации морских, речных и международных перевозок. Актуальность этих знаний и практическая применимость основных положений транспортного права обострилась в настоящее время на фоне развития санкционных ограничений и изменений в системе взаимодействующих видов транспорта.

Есть еще одно направление, которое успешно реализуется университетом, – это «Технология транспортных процессов». Оно тесно связано с развитием практики интермодальных и мультимодальных перевозок, объем которых постоянно растет. Знание номенклатуры грузов, отдельные требования к специальным и опасным грузам, к условиям

их хранения перегрузки и перевозки, которые практически идентичны при подготовке специалистов в области грузоперевозок.

Очевидно, что мощным толчком для расширения грузоперевозок в нашей необъятной стране должна стать координация между железнодорожным, автомобильным, речным и авиационными видами транспорта. Важно понимать, что основой этой координации становятся интеллектуальные транспортные системы. Будущему авиатранспортному инженеру очень важно понимать практическое применение норм, заложенных в законе «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации»¹⁵.

С перевозками различными видами транспорта самым непосредственным образом связан ряд дисциплин, преподаваемых в рамках курса «Транспортная безопасность». Транспортная безопасность складывается из нескольких важных элементов. Четкое и последовательное выполнение команд с должным качеством, а также соблюдение процедур по подготовке транспортного средства к перевозке может предотвратить возникновение угрозы в адрес объектов авиатранспортной инфраструктуры и наступление негативных последствий.

Поэтому одной из актуальных задач является задача поиска новых решений в формате концептуальных положений подготовки кадров для транспортного комплекса до 2035 года, утвержденных распоряжением Правительства Российской Федерации¹⁶. В концепции подчеркивается, что ключевым элемен-

¹⁵ Федеральный закон № 187-ФЗ от 26 июля 2017 г. «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_20885/ (дата обращения: 20.08.2025).

¹⁶ Распоряжение Правительства РФ № 255-р от 6 февраля 2021 г. «Об утверждении Концепции подготовки кадров для транспортного комплекса до 2035 года» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_376695/f62ee45faefd8e2a11d6d88941ac66824f848bc2/ (дата обращения: 20.08.2025).

том сферы транспортного образования является подготовка специалистов всех видов транспорта, направленная на обеспечение безопасного движения.

Следует подчеркнуть, что воздушный транспорт является одним из привлекательных объектов террористических угроз. С 2018 года началась новая эпоха возникновения резонансных событий, связанных с беспилотными авиационными системами. Беспилотники стали представлять серьезную угрозу для пилотируемых ВС гражданской авиации. Это относится как к воздушным судам в зоне федеральных аэропортов, так и к гражданской авиации (вертолеты, планеры, дельтапланы). Столкновение летательного аппарата даже с небольшим дроном может создать риск падения воздушного судна или его повреждения^{17,18,19} [15–19].

Правительством Российской Федерации было принято постановление № 588 от 30.04.2025 «Об особенности защиты от актов незаконного вмешательства с использованием беспилотных аппаратов объектов транспортной инфраструктуры и (или) групп объектов транспортной инфраструктуры, вокруг которых устанавливаются зоны безопасности». Соответствующие дополнительные изменения внесены в ВК и ряд подзаконных актов.

Весьма закономерно, что Минобрнауки России в 2026 году планирует создание новой специальности «Проектирование, производство и эксплуатация беспилотных мобильных

средств» [8, 17, 18], хотя эта специальность в той или иной степени уже разработана, внедрена и освоена рядом транспортных вузов.

Впервые такая системная подготовка начата в МГТУ ГА в 2022 году, и в 2026 году состоится первый выпуск бакалавров по специальности «Эксплуатация беспилотных авиационных систем», а первый выпуск техников уже успешно прошел в Иркутском филиале. Около 500 человек получили квалификацию оператора беспилотных воздушных судов до 30 килограммов в системе дополнительного профессионального образования (ДПО) вуза. В ближайшей перспективе планируется организация обучения внешнего пилота для управления беспилотными авиационными системами.

Неотъемлемой частью построения новой модели высшего образования является видоизменение роли федеральных учебно-методических объединений (ФУМО) при Минобрнауки России. Федеральные учебно-методические объединения с 1 января 2026 года создаются по совокупности специальностей и направлений подготовки одной или нескольких укрупненных групп специальностей и направлений подготовки высшего образования (далее – совокупность (группа) специальностей и направлений подготовки).

Совокупность (группа) специальностей и направлений подготовки формируется Минобрнауки России на основе одного из следующих принципов:

- единое предметное содержание специальностей и направлений подготовки одной или нескольких укрупненных групп специальностей и направлений подготовки;
- объединение нескольких укрупненных групп специальностей и направлений подготовки, входящих в одну область образования;
- объединение укрупненных групп специальностей и направлений подготовки, имеющих единую отраслевую специфику.

В число членов федерального учебно-методического объединения должны быть включены:

- представители работодателей и их объединений, представители федеральных государственных органов и (или) органов

¹⁷ Распоряжение Правительства РФ № 1630-р от 21 июня 2023 г. «Об утверждении Стратегии развития беспилотной авиации Российской Федерации на период до 2030 года и на перспективу до 2035 года и плана мероприятий по ее реализации» [Электронный ресурс] // КонсультантПлюс. 2021. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_450667/ (дата обращения: 20.08.2025).

¹⁸ ГОСТ Р 59519-2021 Беспилотные авиационные системы. Компоненты беспилотных авиационных систем. Спецификация и общие технические требования. М.: Стандартинформ, 2021. 12 с.

¹⁹ ГОСТ Р 59751-2021 Беспилотные авиационные системы с беспилотными воздушными судами самолётного типа. Требования к летной годности. М.: Стандартинформ, 2021. 126 с.

государственной власти субъектов Российской Федерации – не менее 50 (пятидесяти) процентов от общей численности членов федерального учебно-методического объединения;

- представители организаций, осуществляющих образовательную деятельность, расположенных в субъектах Российской Федерации, за исключением городов федерального значения Москвы и Санкт-Петербурга, – не более 25 (двадцати пяти) процентов от общей численности членов федерального учебно-методического объединения;

- представители организаций, осуществляющих образовательную деятельность, расположенных в городах федерального значения Москве и Санкт-Петербурге, – не более 25 (двадцати пяти) процентов от общей численности членов федерального учебно-методического объединения²⁰.

Вывод

Проведенное исследование, целью которого стало обоснование первоочередных задач для построения новой модели высшего образования при подготовке кадров для авиатранспортной отрасли, позволяет сделать следующие выводы.

1. Противоречивость понятий в дискуссиях и научных публикациях о высшем образовании искажает приоритетность и последовательность решения задач реорганизации авиатранспортного образования, важнейшей из которых является повышение качества образовательного процесса.

2. С учетом уникальной отраслевой специфики, международных требований и необходимости сохранения авиационного потенциала страны возможная передача учебных

заведений гражданской авиации в ведение Минтранса России несет в себе элементы риска.

3. Максимальный эффект в формировании профессиональных качеств специалистов для гражданской авиации может быть достигнут при интеграции процессов базового обучения посредством обеспечения неразрывной связи с производством путем создания на базе авиакомпаний и предприятий производственных кафедр и организации переподготовки и повышения квалификации на базе авиационных учебных центров (АУЦ).

4. Целесообразность сохранения существующей системы подготовки специалистов для гражданской авиации в структуре Росавиации, которая позволит обеспечить:

- сохранение целостности образовательно-производственной вертикали;
- соответствие образовательного процесса международным стандартам ИКАО;
- непрерывность и высокое качество подготовки авиаперсонала.

5. Качественное выполнение государственных задач в области авиационной мобильности и безопасности полетов, управление которыми продиктовано на основе принципов субординации и иерархии, свойственной гражданской авиации и записи в нормативных правовых актах.

Список литературы

1. Акопов Г.Л., Пашинская В.В. Продвижение авиационного образования (на примере Ростовского филиала МГТУ ГА) // Гражданская авиация: прошлое, настоящее, будущее: сборник материалов всероссийской научно-практической конференции, посвященной празднованию 100-летия гражданской авиации России (Авиатранс-2023), Ростов-на-Дону, 20 октября 2023 г. Ростов-на-Дону: «ДГТУ-ПРИНТ» МГТУ ГА, 2023. С. 3–11.

2. Балацкий Е.В., Екимова Н.А. Концепция клиентоцентричности в сфере высшего образования: российский и международный опыт реализации // Journal of Economic

²⁰ Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 8 августа 2025 г. № 622 «Об утверждении Типового положения об учебно-методических объединениях в системе высшего образования» [Электронный ресурс] // Консультант-Плюс. 2025. URL: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_513289/ (дата обращения: 22.09.2025).

Regulation, 2023. Т. 14, № 1. С. 6–22. DOI: 10.17835/2078-5429.2023.14.1.006-022

3. Васкевич Т.В., Остапенко А.А. Адаптация отечественной системы высшего образования к евроинтеграции, или не пора ли осуществить импортозамещение в вузах? // Образовательные технологии. 2019. № 1. С. 3–30.

4. Елисеев Б.П., Плешакова О.А. Общество. Государство. Высшая школа. М.: Радиотехника, 2011. 288 с.

5. Елисеев Б.П. Современный университет в пространстве противоречий. Проблемы и пути их решения: монография. 3-е изд. М.: Дашков и К°, 2020. 274 с.

6. Жердев В.И. Болонский процесс и архитектурное образование в России [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 1989. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=18819> (дата обращения: 20.08.2025).

7. Жукова Т.А., Богословский В.И., Ивашкина О.А. Перспективы в системе высшего образования в России: к вопросу о стратегиях развития межкультурного интеллекта // Мир науки, культуры, образования. 2022. № 6 (97). С. 167–170. DOI: 10.24412/1991-5497-2022-697-167-170

8. Исавнина И.Н. Перспективная структура и порядок функционирования центра развития беспилотных авиационных систем МЧС России / И.Н. Исавнина, Ю.Н. Осипов, В.И. Ершов, Н.Г. Каменских // Актуальные вопросы пожарной безопасности. 2021. № 3 (9). С. 57–61. DOI: 10.37657/vniipr.avpb.2021.15.46.008

9. Ливинская В.А., Комарова С.Л. Стратегия развития высшего образования с учетом современных перспектив развития экономики // Стратегия развития экономики Беларуси: вызовы, инструменты реализации и перспективы: сборник научных статей. В 4 ч. Минск: Институт системных исследований в АПК НАН Беларуси, 2017. С. 136–140.

10. Рухлинский В.М., Большедворская Л.Г. Методология формирования резерва авиационного персонала нового поколения // Научный вестник МГТУ ГА. 2010. № 160. С. 169–173.

11. Симонов С.А. Направления развития высшего образования в концепции федеральной целевой программы развития образования на 2016–2020 годы // Современные проблемы профессионального образования: материалы научно-методической конференции. Брянск, 01 апреля – 31 мая 2015 г. Брянск: БГИТУ, 2015. С. 4–7.

12. Судаков В.И. Выбор концепции высшего образования для технических специальностей // Проблемы высшего образования. 2015. № 1. С. 86–87.

13. Батурин В.К. Модернизация образования, национальная безопасность, государственное развитие // Вестник Дальневосточной государственной академии экономики и управления. 2004. № 1 (29). С. 84–90.

14. Курбацкий А.Н. О роли парка высоких технологий в развитии ИТ-образования // Право.by. 2018. № 6 (56). С. 90–93.

15. Благодарящев И.В., Дрозд Н.С., Наумов Р.С. Проблемы подготовки квалифицированных авиационных специалистов по эксплуатации беспилотных авиационных систем (БАП), включающих в себя одно или несколько беспилотных воздушных судов (БВС) с максимальной взлетной массой 30 кг и менее, а также специалистов по техническому обслуживанию БАС и внешних пилотов-инструкторов через призму проведения всероссийского конкурса «Кибердром» // II Научно-практическая конференция по развитию робототехники в области обеспечения безопасности жизнедеятельности «RoboEmercom»: сборник материалов конференции. Москва, 16 сентября 2022 г. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2022. С. 54–64.

16. Великоклад Т.П. Проблемы, возникающие при подготовке специалистов для беспилотной авиации // Комплексная безопасность – 2024: сборник материалов по вопросам развития робототехники в МЧС России. Кубинка, 30-31 мая 2024 г. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2024. С. 36–42.

17. Журкин М.С., Лебедева А.В., Новичков С.С. Федеральный проект «Кадры для БАС» как инструмент развития отрасли беспилотной авиации в системе СПО // Стратегические сценарии развития демонстраци-

онного экзамена: сборник статей Всероссийской научно-практической конференции. Москва, 24-25 октября 2024 г. Чебоксары: Среда, 2024. С. 425–432.

18. Невоструев И.Г. История и перспективы развития малой авиации России // Мавлютовские чтения: сборник Материалов XVI Всероссийской молодежной научной конференции. В 6 т. Уфа, 2022. С. 393–398.

19. Толпегин А.В. Анти-Болонья: духовное и универсальное в высшем образовании // Воспитание духовности: ценностное содержание высшего образования: материалы региональной научно-практической конференции. Екатеринбург, 28-29 ноября 2005 г. Екатеринбург: РГППУ, 2006. С. 52–60.

References

1. Akopov, G.L., Pashinskaya, V.V. (2023). Media promotion of aviation education (on the example of the rostov branch of MGTU GA). In: *Grazhdanskaya aviatsiya: proshloye, nastoyashcheye, budushcheye: sbornik materialov vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy prazdnovaniyu 100-letiya grazhdanskoy aviatsii Rossii (Aviatrans-2023)*. Rostov-na-Donu: «DGTU-PRINT» MGTU GA, pp. 3–11. (in Russian)

2. Balatskiy, E.V., Ekimova, N.A. (2023). Client-centric concept in higher education: Russian and international experience of implementation. *Journal of Economic Regulation*, vol. 14, no. 1, pp. 6–22. DOI: 10.17835/2078-5429.2023.14.1.006-022 (in Russian)

3. Vaskevich, T.V., Ostapenko, A.A. (2019). Adaptation of the domestic higher education system to European integration, or is it time for import substitution in universities? *Obrazovatelnyye tekhnologii*, no. 1, pp. 3–30. (in Russian)

4. Eliseev, B.P., Pleshakova, O.A. (2011). Society. State. Higher School. Moscow: Radio-tekhnika, 288 p. (in Russian)

5. Eliseev, B.P. (2020). The modern university in a space of contradictions. Problems and solutions: Monograph. 3rd ed. Moscow: Iz-

datelsko-torgovaya korporatsiya “Dashkov i Ko”, 274 p. (in Russian)

6. Zherdev, V.I. (2015). In Russia Bologna process and architecture education. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*, no. 1-1, p. 1989. Available at: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=18819> (accessed: 20.08.2025). (in Russian)

7. Zhukova, T.A., Bogoslovskiy, V.I., Ivashkina, O.A. (2022). Perspectives in a higher education in Russia: the strategies to intercultural intellect development. *Mir nauki, kultury, obrazovaniya*, no. 6 (97), pp. 167–170. DOI: 10.24412/1991-5497-2022-697-167-170 (in Russian)

8. Isavnina, I.N., Osipov, Yu.N., Yershov, V.I., Kamenskykh, N.G. (2021). Prospective structure and functioning of the center for unmanned aircraft systems of Emerson of Russia. *Aktualnyye voprosy pozharной bezopasnosti*, no. 3 (9), pp. 57–61. DOI: 10.37657/vniipo.avpb.2021.15.46.008 (in Russian)

9. Livinskaya, V.A., Komarova, S.L. (2017). Strategy for the development of higher education considering modern economic development prospects. In: *Strategiya razvitiya ekonomiki Belarusi: vyzovy, instrumenty realizatsii i perspektivy: sbornik nauchnykh statey. V 4 chastyakh*. Minsk: institut sistemnykh issledovaniy v APK NAN Belarusi, pp. 136–140. (in Russian)

10. Rukhlinsky, V.M., Bolshedvorskaya, L.G. (2010). Methodology of formation of next generation of aviation professionals reserve. *Nauchnyy vestnik MGTU GA*, no. 160, pp. 169–173. (in Russian)

11. Simonov, S.A. (2015). Directions for the development of higher education in the concept of the federal target program for the development of education for 2016–2020. In: *Sovremennyye problemy professionalnogo obrazovaniya: materialy nauchno-metodicheskoy konferentsii*. Bryansk: BGITU, pp. 4–7. (in Russian)

12. Sudakov, V.I. (2015). Selecting a concept of higher education for technical specialties. *Problemy vysshego obrazovaniya*, no. 1, pp. 86–87. (in Russian)

13. Baturin, V.K. (2004). Modernization of education, national security, state development.

Vestnik Dalnevostochnoy gosudarstvennoy akademii ekonomiki i upravleniya, no. 1 (29), pp. 84–90. (in Russian)

14. Kurbatsky, A.N. (2018). The role of the park of high technologies in the development of IT education. *Pravo.by*, no. 6 (56), pp. 90–93. (in Russian)

15. Blagodaryashchev, I.V., Drozd, N.S., Naumov, R.S. (2022). The challenges of training qualified aviation specialists for the operation of unmanned aircraft systems (UAS), including one or more unmanned aerial vehicles (UAVs) with a maximum takeoff weight of 30 kg or less, as well as UAS maintenance specialists and external pilot instructors, through the lens of the all-Russian “Cyberdrome” competition. In: *II Nauchno-prakticheskaya konferentsiya po razvitiyu robototekhniki v oblasti obespecheniya bezopasnosti zhiznedeyatel'nosti «RoboEmercom»: sbornik materialov konferentsii*. Moscow: FC VNII GOChS Emercom of Russia, pp. 54–64. (in Russian)

16. Velikoklad, T.P. (2024). Problems arising in the training of specialists for unmanned aviation. In: *Kompleksnaya bezopasnost – 2024:*

sbornik materialov po voprosam razvitiya robototekhniki v MCHS Rossii. Moscow: FC VNII GOChS Emercom of Russia, pp. 36–42. (in Russian)

17. Zhurkin, M.S., Lebedeva, A.V., Novichkov, S.S. (2024). Federal project “Personnel for UAS” as a tool for the development of the unmanned aviation industry in the secondary vocational education system. In: *Strategicheskiye stsenarii razvitiya demonstratsionnogo ekzamina: sbornik statey Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Cheboksary: Izdatelskiy dom «Sreda», pp. 425–432. (in Russian)

18. Nevostruev, I.G. (2022). History and prospects for the development of small aviation in Russia. In: *Mavlyutovskiye chteniya: sbornik Materialov XVI Vserossiyskoy molodezhnoy nauchnoy konferentsii*. V 6 tomakh. Ufa, pp. 393–398. (in Russian)

19. Tolpegin, A.V. (2006). Anti-Bologna: spiritual and universal in higher education. In: *Vospitaniye dukhovnosti: tsennostnoye sodержaniye vysshego obrazovaniya: materialy regionalnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Yekaterinburg: RGPPIU, pp. 52–60. (in Russian)

Сведения об авторе

Елисеев Борис Петрович, доктор юридических наук, профессор, ректор МГТУ ГА, b.eliseev@mstuca.ru.

Information about the author

Boris P. Eliseev, Doctor of Juridical Sciences, Professor, the Rector of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, b.eliseev@mstuca.ru.

Поступила в редакцию	23.09.2025	Received	23.09.2025
Одобрена после рецензирования	23.10.2025	Approved after reviewing	23.10.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

- 2.9.1 – Транспортные и транспортно-технологические системы страны, ее регионов и городов, организация производства на транспорте;
2.9.4. – Управление процессами перевозок;
2.9.6 – Аэронавигация и эксплуатация авиационной техники;
2.9.8 – Интеллектуальные транспортные системы

УДК 621.396.959.3

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-23-37

The use of onboard decimeter-band radar stations for humanitarian demining

O.V. Vasiliev¹, P.S. Gorshkov¹, S.A. Zيابкин¹, I.P. Shepet'²

¹*NaukaSoft Scientific and Production Association, Moscow, Russia*

²*Technological Institute of Service (branch of DSTU), Stavropol, Russia*

Abstract: Humanitarian demining is a pressing issue today. This paper examines various technical means used in engineer reconnaissance to detect mines and substantiates the need for radar support for humanitarian engineer reconnaissance. An airborne engineer reconnaissance radar system based on a side-looking P-band radar, intended for deployment on unmanned aerial vehicles, is proposed as the main information link. The physical principles of radar image formation using aperture synthesis are described. The application of the radar relief function in describing the radio-reflective properties of a surface and the use of the superposition principle in radar signal processing are demonstrated. The main mathematical expressions used in calculating radar images of a surface using the aperture synthesis method are presented, consisting of the application of correlation signal processing independently by the coordinates of the ground and slant ranges. The features of using the decimeter range of electromagnetic waves in constructing radar images for the purpose of detecting mines on various underlying surfaces are analyzed and a comparison with the centimeter range is made. The demonstrated advantages include a significant increase in the contrast of metal objects against the background of reflection from the underlying surface and an increase in the penetration depth into the underlying surface. Disadvantages are also identified, including increased requirements for the stability of the flight of the carrier, the need to increase the size of the aperture to achieve comparable detail and take into account the migration of range channels. The software architecture is demonstrated, comprising an onboard unit for acquiring radar images and a graphical interface for a ground-based automated operator-decipherer workstation for solving the problem of mine detection during humanitarian demining. A sample system and the results of its testing on various carriers, including quadcopter and vertical takeoff and landing (VTOL) unmanned aerial vehicles, are presented.

Key words: humanitarian demining, engineer reconnaissance, airborne side-looking P-band synthetic aperture radar, information support for humanitarian demining, unmanned aerial vehicle.

For citation: Vasiliev, O.V., Gorshkov, P.S., Zيابкин, S.A., Shepet', I.P. (2026). The use of onboard decimeter-band radar stations for humanitarian demining. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 23–37. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-23-37

Применение бортовых радиолокационных станций дециметрового диапазона при гуманитарном разминировании

О.В. Васильев¹, П.С. Горшков¹, С.А. Зябкин¹, И.П. Шепеть²

¹*ООО «НПО НаукаСофт», г. Москва, Россия*

²*Технологический институт сервиса (филиал ДГТУ), г. Ставрополь, Россия*

Аннотация: Проблема гуманитарного разминирования на текущий момент чрезвычайно актуальна. В работе рассмотрены различные технические средства, применяемые в инженерной разведке для решения задачи обнаружения мин, и обоснована необходимость радиолокационного обеспечения гуманитарной инженерной разведки. В качестве

основного информационного звена предложен авиационный радиолокационный комплекс инженерной разведки на базе радиолокационной станции бокового обзора Р-диапазона, предназначенный для размещения на беспилотных летательных аппаратах. Описаны физические принципы формирования радиолокационного изображения методом синтеза апертуры. Показано применение функции радиолокационного рельефа при описании радиоотражающих свойств поверхности и использование принципа суперпозиций при обработке радиолокационного сигнала. Представлены основные математические выражения, применяемые при расчете радиолокационных изображений поверхности методом синтеза апертуры, заключающиеся в применении корреляционной обработки сигнала независимо по координатам поперечной и наклонной дальностей. Проанализированы особенности использования дециметрового диапазона электромагнитных волн при построении радиолокационных изображений в интересах обнаружения мин на различных подстилающих поверхностях, и проведено сравнение с сантиметровым диапазоном. В качестве преимуществ продемонстрировано значительное увеличение контраста металлических объектов на фоне отражения от подстилающей поверхности и возрастание глубины проникновения в подстилающую поверхность. Также сформулированы недостатки, включающие в себя повышенные требования к стабильности полета носителя, необходимость увеличения размера апертуры для достижения сопоставимой детальности и учета миграции каналов дальности. Демонстрирована структура программного обеспечения, содержащего бортовую часть для получения радиолокационных изображений и графический интерфейс наземного автоматизированного рабочего места оператора-дешифровщика для решения задачи поиска мин при гуманитарном разминировании. Показан образец комплекса и результаты его испытаний на различных носителях, включающих беспилотные летательные аппараты классов «квадрокоптер» и вертикального взлета и посадки (VTOL).

Ключевые слова: гуманитарное разминирование, инженерная разведка, бортовая радиолокационная станция с синтезированной апертурой бокового обзора Р-диапазона, информационное обеспечение гуманитарного разминирования, беспилотный летательный аппарат.

Для цитирования: Васильев О.В. Применение бортовых радиолокационных станций дециметрового диапазона при гуманитарном разминировании / О.В. Васильев, П.С. Горшков, С.А. Зябкин, И.П. Шепеть // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 23–37. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-23-37

Introduction

Humanitarian demining is an activity carried out outside combat zones in cooperation with local governments (territorial administrations) that leads to the elimination of hazards (risks) associated with explosive ordnance (EO), including a comprehensive survey of the area and facilities for the presence of EO, mapping, searching and disposal of EO, and preparing documentation after demining.¹

A characteristic feature of modern warfare is the widespread and massive mining of vast territories. Moreover, the vast majority of mines and EO are not equipped with self-destruct mechanisms. This makes their search and clearance mandatory. Current mine search methods using a deminer do not ensure mine clearance in a short time, and the use of unmanned mine clearers is impossible for clearing anti-tank mines.

In this case, conducting engineer reconnaissance using technical means for humanitarian demining is a pressing issue. At the same time, a whole range of devices is proposed as technical means, the operation of which is based on a wide range of physical principles.

This article substantiates the use of a side-looking synthetic aperture radar in the decimeter band for searching for antitank mines over large areas. The features of using the decimeter band, as well as its advantages and disadvantages for conducting engineer reconnaissance, are analyzed. The results of flight experiments on searching for and detecting mines and their simulators on various soils using radars mounted on various platforms are presented. A conclusion is drawn regarding the high effectiveness of this type of radar for conducting engineer reconnaissance for humanitarian demining.

Technical means used in engineer reconnaissance

Traditionally, the primary tools for explosive ordnance detection and mine clearance are: a probe

¹ Practical activities (humanitarian demining). *Ministry of Defense of the Russian Federation*. Available at: <https://mil.ru/mpc/activities/practical.htm> (accessed: 21.04.2025).

and mine detectors. Specially trained dogs can be used to reduce the risk to the lives of the deminers [1].

Attempts to reduce risks and automate the mine clearance process are underway in many countries, but so far without significant results.

However, over the past few years, the use of unmanned aerial vehicles (UAVs) in engineer reconnaissance has reached a large scale [2]. Many government and non-profit agencies involved in humanitarian demining are implementing UAVs into their standard procedures. In addition to collecting aerial photographs of potentially hazardous areas to create orthophoto maps, UAVs already prioritize demining zones and, in some cases, detect mines.

At the current stage of remote mine reconnaissance, the following sensors can be used as UAV payloads: visible-band video cameras (TV cameras), infrared cameras (IR cameras), scanning laser locators (SLRs), and magnetometric sensors (MS). All of these differ in both their application features and their information capabilities for detecting and classifying explosive ordnance [3].

TV cameras are characterized by high speed and detailed viewing of the surface being surveyed. However, image quality is significantly affected by meteorological and daily conditions. Furthermore, at least 60,000 images are required to cover 1 square kilometer with acceptable resolution.

One of the promising approaches to mine detection is the use of infrared cameras. This method is based on the differences in thermal radiation between the underlying soil and a small area where a mine is located or buried. However, experimental studies have revealed a high rate of false alarms caused by anomalies in soil moisture or density.

A laser locator is useful for detecting craters indicating ground disturbances, but it cannot detect buried objects.

Magnetometers are currently the best tools for detecting buried metal objects. However, the magnetic signal weakens as the magnetometer moves away from the ground, necessitating the use of UAVs at low altitudes.

One of the most promising areas for increasing the efficiency of mine reconnaissance is the use of side-looking synthetic aperture radar (SAR) as a target load for UAVs [4].

Physical principles of radar image formation in SAR

The radar relief function (RRF) is used as a mathematical model of the reflective properties of the observed surface. It defines the complex envelope of the electromagnetic field \dot{e} , scattered from the underlying surface and is numerically dependent on the local surface reflectivity and signal parameters according to the following formula [5]:

$$\dot{e}(r, x) = e(r, x) \cdot \exp\{j\psi(r, x)\}, \quad (1)$$

where x and $r = \sqrt{y^2 + H^2}$ are coordinates along the path and slant ranges, respectively; $e(r, x)$ and $\psi(r, x)$ are the amplitude and phase characteristics of the scattered electromagnetic field. Based on [5], if we do not take into account changes in the reflective properties of the surface in the observation interval $X_{\text{H}} = r_0 \theta_A$, where θ_A is the antenna radiation pattern (RP) width, we can limit ourselves to the dependence on spatial coordinates only. The formation of the synthetic aperture of the antenna in the side-looking SAR is shown in Figure 1.

In Figure 1, the variable T_3 characterizes the pulse recurrence interval, V_{H} is the carrier's flight speed. It is known that the process of generating and processing a radar signal obeys the principle of superposition due to the linearity of operations [6]. This means that the signal from each elementary reflector on the observed terrain can be processed independently, and reflections from a complex spatially distributed object can be represented as the sum of signals from several point targets on its surface.

The signal $\dot{s}(\tau, n)$ in a side-looking SAR from the i -th point target at the receiver output is continuous over slant range $\tau = 2r/c$ and discrete over ground range nT_3 ($n = 0, 1, 2, \dots$), and also independent over these coordinates [7]:

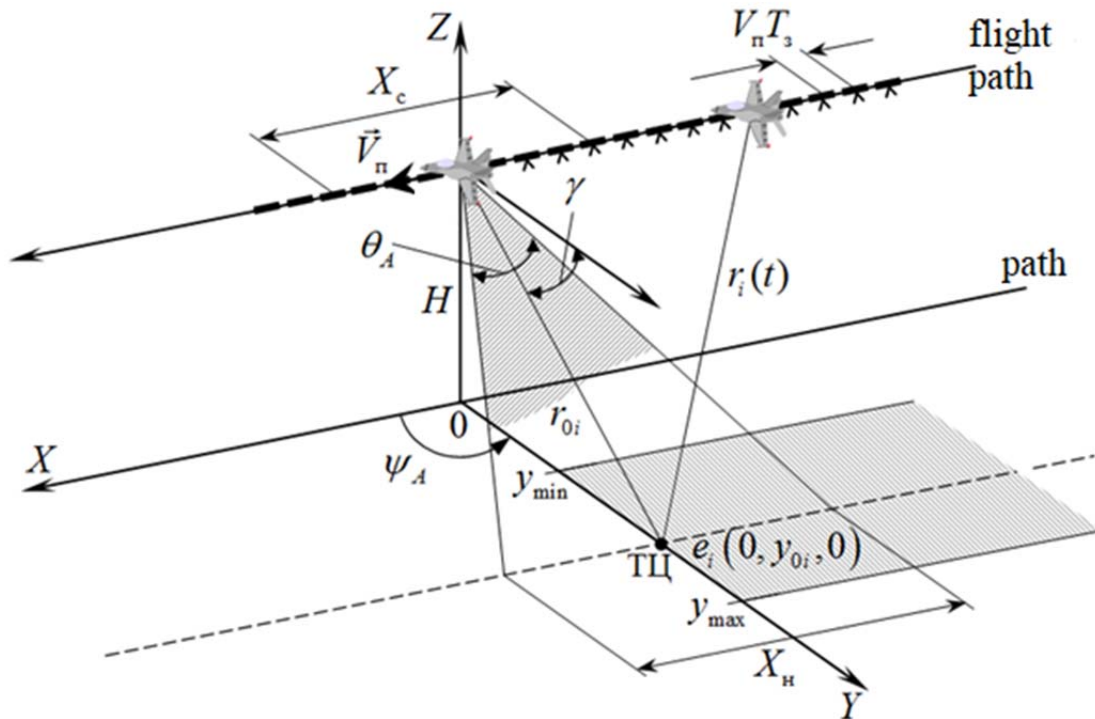


Fig. 1. Formation of the synthetic aperture of the antenna at $\Psi_A = \pi/2$

$$\begin{aligned} \dot{s}_i(\tau, n) = \dot{s}_i(\tau, nT_3) = \eta_i U_i(\tau - \tau_i) \cdot G(\tau, nT_3) \times \\ \times \exp\{j \cdot [\psi(\tau - \tau_i) - \alpha(nT_3)^2 + \varphi_i]\}, \end{aligned} \quad (2)$$

where τ_i is the time delay of the signal from the i -th point target along the slant range during the probing period; $\alpha = 2\pi V_n / \lambda r_{0i}$; $\psi(\tau)$ is the function describing the phase modulation law of the probing signals; $U_i(\tau)$ is the function describing the amplitude envelope of the signal from the i -th elementary reflector; $G(\tau, nT_3)$ is the signal envelope along the path coordinate x .

When using a probing chirp pulse, the signal from the i -th elementary reflector, located at a distance of r_i , $m\Delta r \leq r_i \leq (m+1)\Delta r$, is determined by the formula

$$\begin{aligned} \dot{s}_i(m, n) = \eta_i U_i[(m - m_i)\Delta r] G(m\Delta r, (n - n_i)\Delta x) \times \\ \times \exp\left\{-j \cdot \left[\frac{2\alpha_r}{c^2} ((m - m_i)\Delta r)^2 + \frac{2\pi}{m\Delta r\lambda} ((n - n_i)\Delta x)^2 + \varphi_i\right]\right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\Delta r = \delta r / k_r$ and $\Delta x = V_n T_3$ are the sampling intervals for coordinates x and r ; $a_r = 2\Delta\omega / \tau_u$ is the chirp step slope; $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ is the frequency deviation.

The signal reflected from the earth's surface and complex objects $\xi(\tau, n)$, is a superposition of noise and responses from all elementary reflectors within the radiation pattern:

$$\xi(\tau, n) = \sum_i \dot{s}_i(\tau, n) + \dot{n}(\tau, n), \quad (4)$$

where $\dot{n}(\tau, n)$ is complex white noise.

As mentioned earlier, the signal cross-sections $\dot{s}_i(m, n)$ along the ground (when fixing the coordinate m) and slant (when fixing n) ranges are independent in the absence of signal migration from point targets in the slant range band during the synthesis interval, and the signal

Table 1

Approximate RCS values for typical surfaces

Terrain type	Specific radar cross-section σ_0 , dB		
	$\lambda = 3.0 \text{ cm}$		$\lambda = 70.0 \text{ cm}$
	HH	VV	HH and VV
Sea, 2-point waves	-38	-28	-45
Sea, 6-point waves	-30	-25	-45
Runway	-32	-24	-58
Steppe, winter, snow	-17	-17	-55
Steppe, summer, grass	-15	-15	-53
Desert, rocks, sand	-15	-17	-40
Forest	-14	-15	-30

itself $\hat{s}_i(m, n)$ is separable by coordinates m and n [5]. Therefore, algorithms for this processing can be developed independently by coordinates m and n . The goal of the processing is to compress signals from each element of the observed surface based on the existing signal spectrum expansion in the cross-sections by coordinates r and x , thereby ensuring high resolution in the ground and slant range coordinates.

$$\begin{aligned} \varrho(m, n) &= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} \xi(l-m, k-n) \hat{h}_0(l, k) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=0}^{M-1} \xi(l-m, k-n) \hat{h}_{0r}(l) \right\} \cdot \hat{h}_{0x}(k) \right|, \end{aligned} \quad (5)$$

where $m = 0, 1, \dots, M_r - 1; n = 0, 1, \dots, N_x; M$ and N and is the number of reference function samples along the slant $\hat{h}_{0r}(m)$ and path $\hat{h}_{0x}(n)$ distances.

The reference function $\hat{h}(m, n)$, phase-matched with the signal from the point reflector over the synthesis interval $X_c = N_c V_{\Pi} T_3 = N_c \Delta x$, is described by the formula

$$\hat{h}(m, n) = H(m, n) \cdot \exp \left\{ j \frac{2\pi}{m\Delta r\lambda} (n\Delta x)^2 \right\}, \quad (6)$$

where $H(m, n)$ is the pulse response envelope of the digital filter, specified on the integrated circuit: $n = 0, 1, 2, \dots, N_c - 1$.

Features of P-band radar images

Target detection efficiency is determined by the signal-to-background ratio q , which is equal

It is known that radar signals with an extended baseline are compressed in duration using *correlation processing* [8]. This uses a reference function matched to the signal from an elementary reflector. This function, like the signal, is separated by coordinates x and r : $\hat{h}_0(m, n) = \hat{h}_{0r}(m) \cdot \hat{h}_{0x}(n) = \hat{s}_i^*(m, n)$ (the $*$ symbol denotes complex conjugation):

to the ratio of the target's RCS σ_{Π} to the background RCS σ_{Φ} in a resolution element:

$$q = \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_{\Phi}} = \frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_0 \delta r \delta l}, \quad (7)$$

where δr and δl the linear resolutions for range and angle, respectively, σ_0 is the specific RCS of the surface.

Approximate values of specific RCS for various underlying surfaces for the X (3 cm) and P (70 cm) bands at a 20° radiation incidence angle are presented in Table 1 [9]. The values are shown for various polarizations, where HH is the horizontal polarization for reception and transmission, and VV is the vertical polarization for reception and transmission.

As the table shows, the transition from the centimeter to the decimeter range is marked by an abrupt change, primarily in the reflectivity of

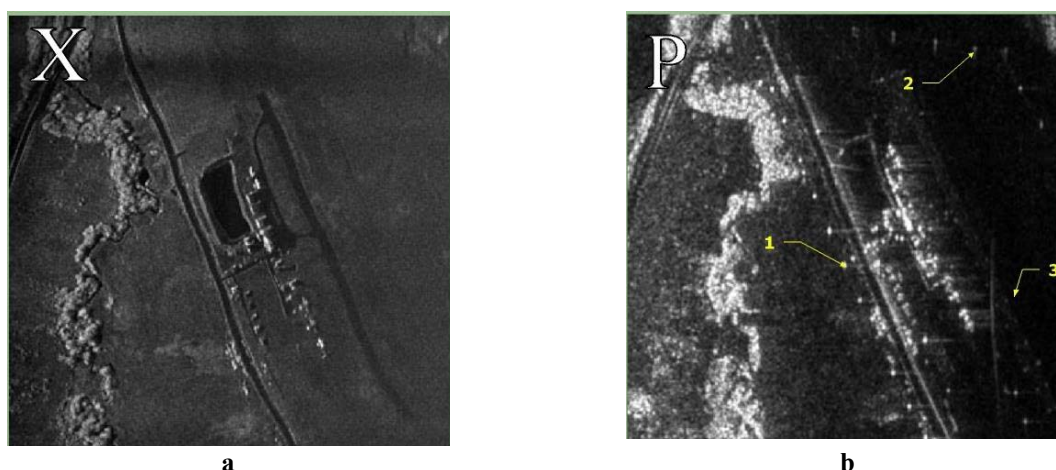


Fig. 2. Radar image of a section with a road, a pond, and a small aircraft airfield:
a – in the X-band; *b* – in the P-band

the underlying surface. Thus, in the range $\lambda = 70$ cm the average specific RCS σ_0 decreases by 20...30 dB, leading to an increase in the radar contrast of objects relative to the background.

It is also clear from expression (7) that maximum detection efficiency is achieved when the resolution element size of the side-looking SAR $\delta r, \delta l$ corresponds to the linear dimensions of the object (target) on the surface in the y and x coordinates, respectively. High resolution in slant range (y coordinate) is achieved by using broadband signals, and in the direction of ground speed (x coordinate) by using long intervals of trajectory signal accumulation.

Figure 2 shows radar images obtained using a dual-band integrated airborne side-looking SAR [10, 11]. The flight altitude of the carrier (Antonov-2 aircraft) is 800 m, the range to the center of the radar image is 2000 m. In Figure 2, *a* on the X-band radar image (wavelength $\lambda = 3$ cm) an airfield for small aircraft with infrastructure, a road and a pond are observed. In Figure 2, *b* on the P-band radar images (wavelength $\lambda = 70$ cm) lampposts and a ditch along the road, individual buildings, technical equipment, aircraft (marked with the corresponding markers 1–3 in Figure 2, *b* are clearly visible.

The specific features of P-band use, most of which are evident in Figure 2, include:

- the contrast of metallic objects significantly increases (by 20–30 dB) against reflections from the underlying surface;
- resonance phenomena begin to play a role;
- greater penetration depth into the underlying surface is ensured compared to the centimeter band.

At the same time, the use of P-band side-looking SAR poses objective difficulties in radar image formation.

Firstly, the relatively low carrier frequency precludes the use of signals with a spectral width greater than 100 MHz (20–25% of the carrier). In this case, the maximum slant range resolution δr is 1.5 m.

Secondly, a longer wavelength for achieving high azimuth resolution δl (commensurate with δr) requires a larger synthesized aperture size, which means longer trajectory signal accumulation intervals at the same carrier flight speeds [12]. The dependences of the aperture size X_c on the distance to the target r_0 for different azimuth resolutions for two frequency bands are shown in Figure 3.

Thus, for $\delta l = 1.5$ m, $r_0 = 1000$ m, $\lambda = 0.7$ m, the synthesis interval will be more than 200 m. To achieve the same radar image detail in the X-band, the synthesis interval does not exceed 9 m.

Thirdly, the condition for a linearly matched processing range of the accumulated trajectory signal is satisfied in the absence of migration of

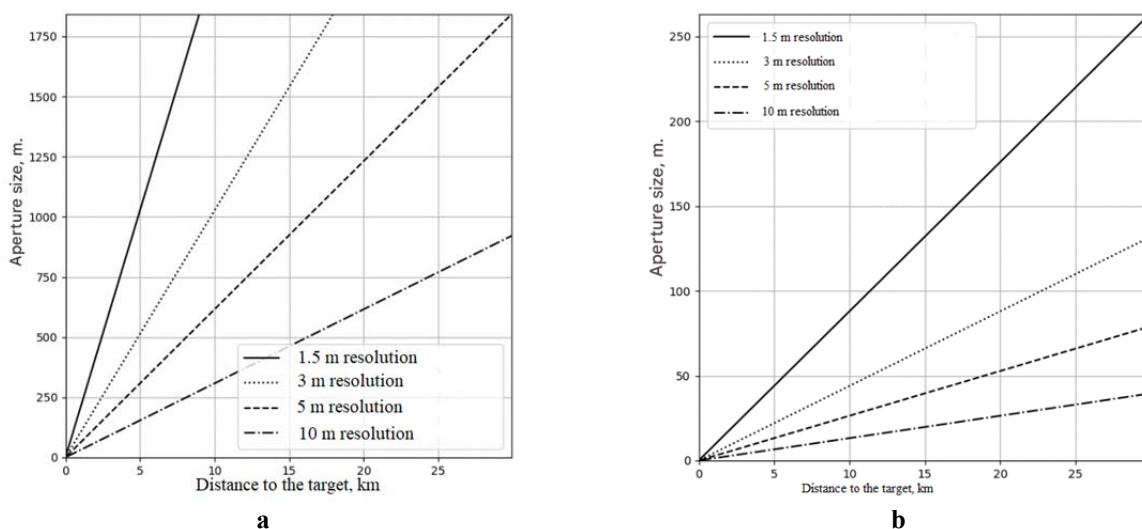


Fig. 3. Family of curves X_c from r_o for different δl : a – for $\lambda = 70$ cm, b – for $\lambda = 3$ cm

signal samples from each elementary reflector across the range strips [13]. For this, the following inequality must be satisfied in the synthesis interval $T_c = X_c/V_H$:

$$\Delta r_i(t) = r_i(t) - r_{ok} \leq \delta r, \quad (8)$$

where r_{ok} is the traverse slant range to the k -th range strip; $\Delta r_i(t)$ is the slant range increment to the i -th elementary reflector over the synthesis interval T_c . Given the equality $\delta r = \delta l$ we obtain the inequality:

$$r_{ok} \leq \frac{8\delta l^3}{\lambda^2}, \quad (9)$$

from which it follows that signal migration across range channels for the accepted values begins at a slant range greater than 60 m (for the X-band, 30,000 m), i.e., in the P-band, it is almost always the same.

Fourth, random deviations in the trajectory signal phase lead to broadening of radar responses from point reflectors in radar images [6, 12]. This can lead both to distortion of images from distributed targets and to incorrect identification of small targets.

All of these difficulties are addressed in real-world systems by employing various compromises, such as mathematical compensation for range channel migration during signal pro-

cessing, or the need to obtain and incorporate information from onboard micronavigation sensors to compensate for trajectory instabilities. All of this significantly complicates trajectory signal processing algorithms.

Structure of the side-looking SAR algorithmic support for radar image formation

Based on the information presented previously, the radar image formation algorithm can be generally represented as follows (fig. 4).

First, a radar signal is sent to the input, from which a radio hologram (RHG) of the received complex signal is prepared. Taking into account (5), it is advisable to perform range compression of the signal directly in the side-looking SAR. Compensation is provided for trajectory instabilities of the RHG and range channel migration. Next, a two-dimensional direct Fourier transform is performed to obtain the RHG spectrum. A direct Fourier transform of the two-dimensional support function is then performed to obtain the reference spectrum. The spectra of the support function and the RHG are multiplied. The support function is calculated for a given range to compensate for the phase of points at this range. A two-dimensional inverse Fourier transform of the

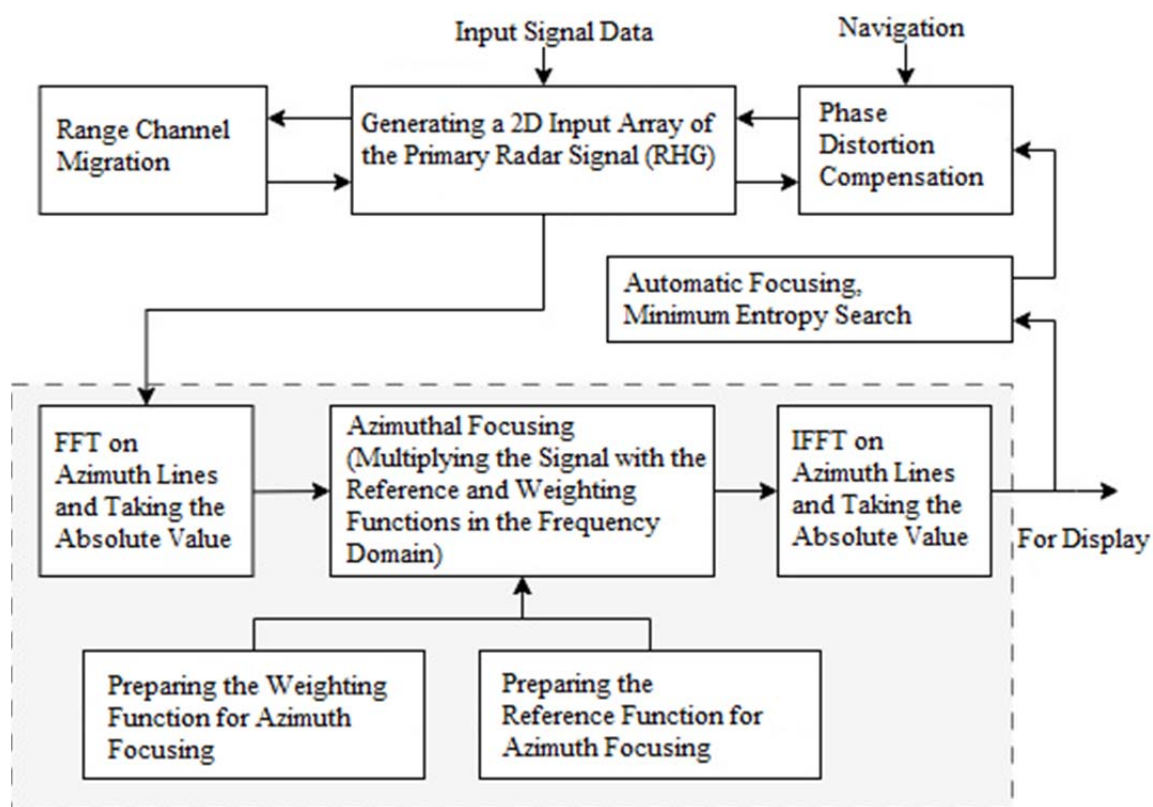


Fig. 4. Structural diagram of the radar image formation algorithm

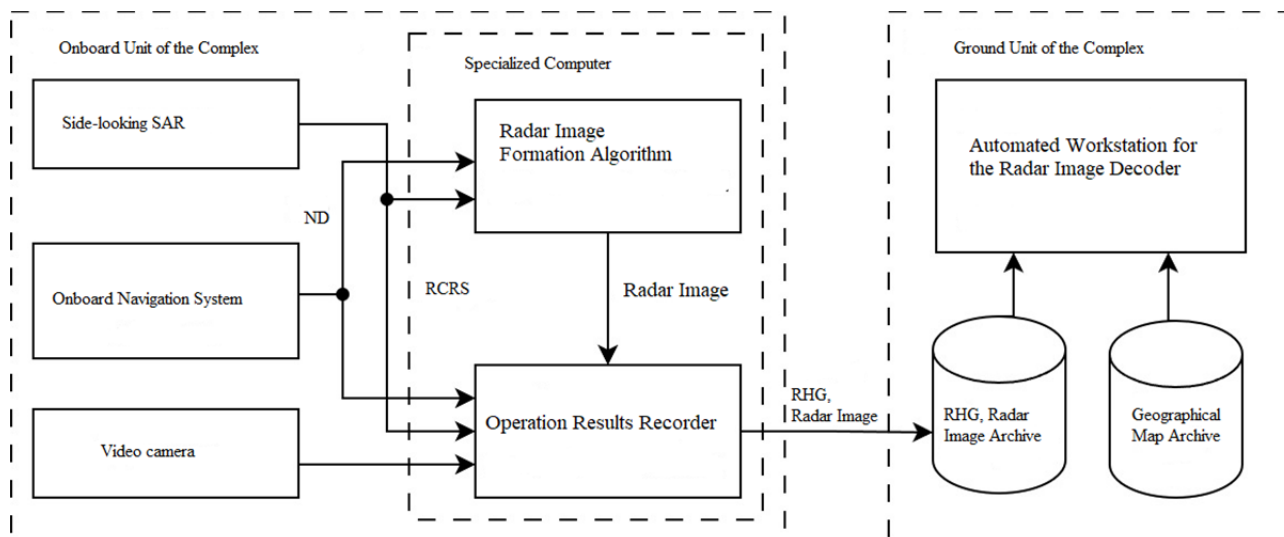


Fig. 5. Structural diagram of the airborne radar reconnaissance complex “Archeolog-I”

multiplied spectra is performed to convert the data to the time domain. The result is the desired data – a radar image [14, 15].

Figure 5 shows the structural diagram of the airborne radar reconnaissance complex “Archeolog-I”, developed on an initiative basis by the

creative team of NaukaSoft Scientific and Production Association.

The onboard unit of the complex consists of a specialized computer, an onboard navigation system, and a side-looking P-band radar. Navigation definitions (ND) are used to compensate

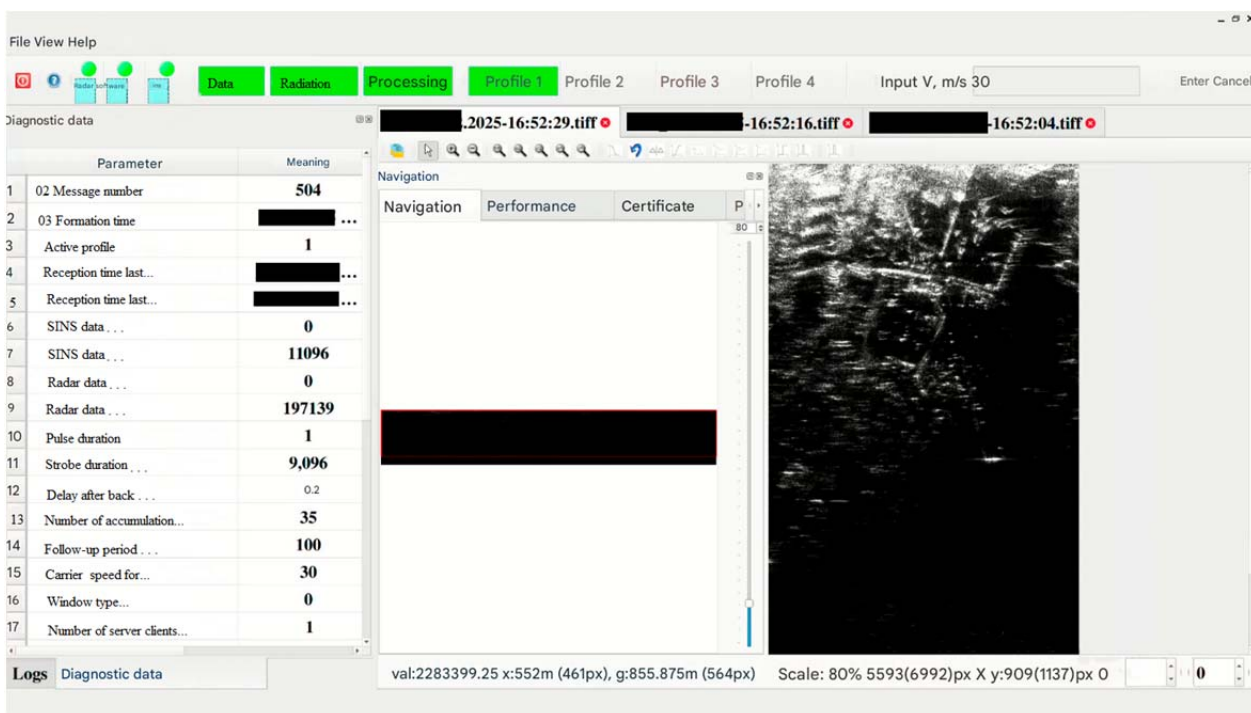


Fig. 6. Interface of the decoder operator's automated workstation

for trajectory instabilities in radar holograms, which consist of a range-compressed radio signal (RCRS). All system operation results, such as received RHG, ND, and received radar images, are stored in the specialized computer's internal memory.

The ground unit of the complex consists of a database containing archives of received RHG, radar images, and geographical maps. Geographical maps are used for georeferencing the received radar images to the terrain. Storing RHG for each radar image allows for repeated image acquisition operations with refined parameters, for example, for precise focusing of the radar image in a specific area of interest. The interface of the automated workstation (AWS) for the decoder operator for the airborne radar reconnaissance complex "Arkheolog-I" is shown in Figure 6.

The decoder operator's automated workstation performs the following tasks:

1. Receiving data from the Primary Processing Software (PDP) and display of radar images.
2. Receiving and displaying navigation data.
3. Preliminary processing of radar images.

4. Geometric correction and transformation of radar images.

5. Linking radar images to a digital terrain map [16].

6. Decoding radar images for detection, recognition, and determination of parameters of objects of interest [17].

7. Data archiving for repeated access.

8. Generating messages to users.

Experimental Observation Results

Experimental data describing the features of the use of the P-band SAR as part of an engineer reconnaissance system for humanitarian demining missions are presented below.

Figure 7, *a* shows the appearance of the airborne radar reconnaissance complex "Arkheolog-I", placed on a carrier – a medium-class UAV of the "Quadcopter" type, and Figure 7, *b* – airborne P-band radar "Linza".

On the radar of the P-band in shades of gray (fig. 8, *b*) and in the 3D representation (fig. 8, *c*), mine simulators (fig. 8, *a*) (three metal bowls up to 30 cm in diameter) and explosive reactive objects (two cuts of a metal water pipe 35 cm long)



Fig. 7. *a* – airborne radar reconnaissance complex “Arkheolog”, *b* – airborne P-band radar “Linza”, dimensions 43×38×27 cm, weight up to 9 kg

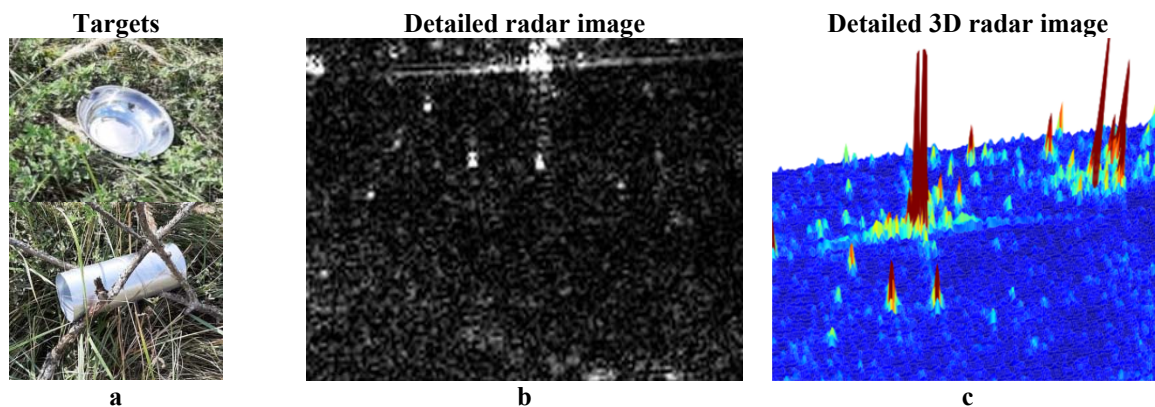


Fig. 8. Radar image of dry steppe in summer with mine simulators



Fig. 9. Flight experiment using a VTOL UAV

are observed. The carrier’s flight altitude was up to 300 m, and the slant range to the objects was less than 600 m. Despite the relative uniformity of the underlying surface, the radar image shows spots resulting from the random summation of reflected signals from elementary surface areas, a phenomenon known as “speckle” patterns.

Figure 9, *a* shows a variant of mounting the onboard radar reconnaissance complex on a VTOL UAV. The flight mission involved flying along a rectangular perimeter at an altitude of up to 300 m, a speed of up to 100 km/h, and an inclined distance of up to 400 m from the target installation center. A strong crosswind (up to

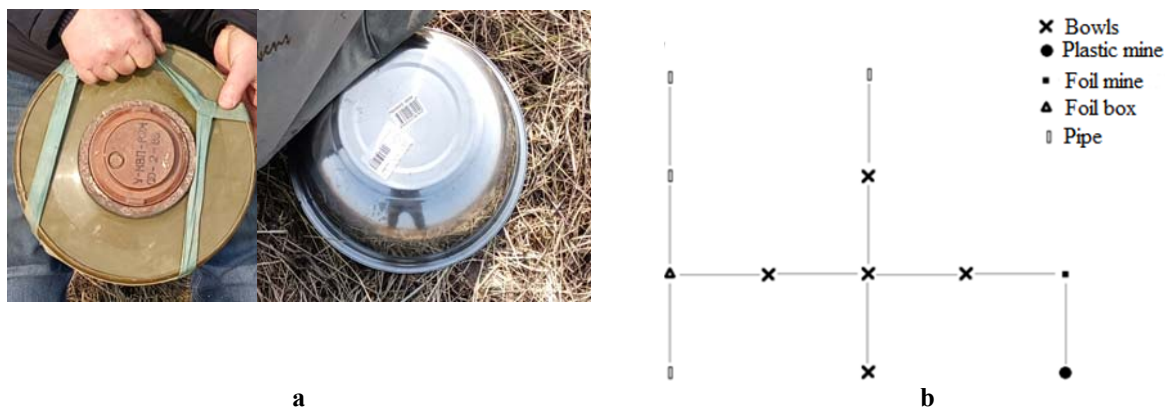


Fig. 10. Targets and their placement diagram

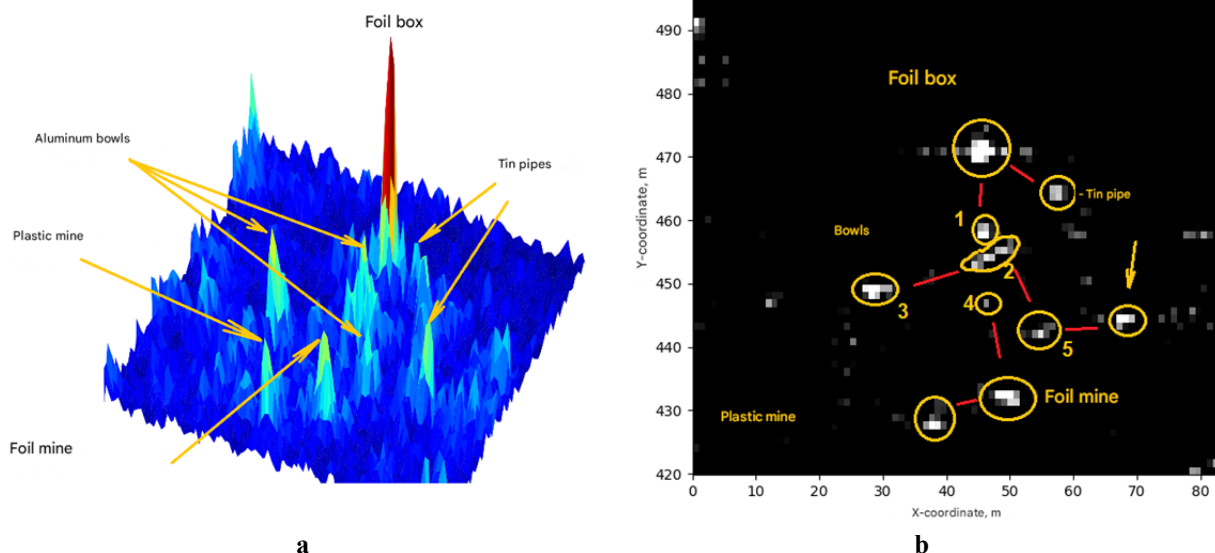


Fig. 11. Radar images of targets on a humid steppe background during spring

15 m/s) adjusted the route, significantly altering the carrier’s flight trajectory, as can be seen in Figure 9, *b*. Targets in the form of bowls, pipe cuts, and TM-62 plastic training anti-tank mines (fig. 10, *a*) were placed every 10 m, as shown in Figure 10, *b*.

Figure 11 shows 3D (fig. 11, *a*) and 2D (fig. 11, *b*) radar images of a surface area with targets.

Despite the significant trajectory curvature, processing was able to focus the reflected signals and obtain significant radar contrast. Radar image interpretation allowed detection and identification of 10 of the 12 targets (fig. 11, *b*). The maximum amplitude was observed in the signal

reflected from the foil-wrapped cardboard box. The interpretation process was complicated by the relative shift in the maximum reflections from the targets, caused by the significant deviation in the carrier’s flight path.

Conclusion

The conducted flight experiments demonstrated the high information content of the P-band SAR system for engineer reconnaissance missions. A VTOL UAV, with its greater longitudinal flight stability, appears to be the preferred carrier. Thus, the task of providing infor-

mation support for humanitarian demining can be accomplished through the integrated use of UAVs with various payloads in several stages.

At the first stage, an orthophoto map of the area intended for demining is created using TV cameras and laser locators. Then, radar and IR images are generated, combined processing, after overlaying the orthophoto map, will allow for the construction of a minefield cadastral register. This information can be refined by an additional UAV flight with a minefield payload. This will ensure a consistent increase in the detail, completeness, and reliability of the information: “no mines” – “mines localized in the specified areas” – “cadastral register of the minefield with mine coordinates.”

The need to process large volumes of complex information requires maximum automation of the image decoder operator. This requires the use of artificial intelligence technologies, which require large volumes of training samples and significant computing resources.

References

1. Severov, N.V. (2003). Application of robotics in emergency situations: theory and practice: Monograph. Novogorsk: AGZ MCHS Rossii, 241 p. (in Russian)
2. Petrenko, E.S. (2024). Some technical features of the solution to the problem of humanitarian demining. Systems of technical protection of objects. *vrsystems.ru*. Available at: https://www.vrsystems.ru/stati/nekotorie_texnicheskie_osobennosti_resheniya_problemi_gumanitarnogo_razminirovaniya.htm (accessed: 21.04.2025). (in Russian)
3. Baur, J. (2024). Ukraine is riddled with land mines: drones and ai can help. *IEEE Spectrum*, vol. 61, no. 5, pp. 42–49. DOI: 10.1109/MSPEC.2024.10522930
4. Gorshkov, P.S, Vasiliev, O.V. (2024). New technical means of reconnaissance in the interests of humanitarian demining. In: *Innovatsionnyye, informatsionnyye i kommunikatsionnyye tekhnologii: sbornik trudov XXI Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Moscow: Assotsiatsiya vypusknikov i sotrudnikov VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, pp. 131–135. (in Russian)
5. Shkolnyy, L.A., Tolstov, E.F., Detkov, A.N. et al. (2008). Onboard radar reconnaissance systems and decoding of radar images: Tutorial, in Shkolnyy L.A. (Ed.). Moscow: Izdatelstvo VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 432 p. (in Russian)
6. Kondratenkov, G.S., Frolov, A.Yu. (2005). Radiovision. Spaceborne Radar Earth-Observation Stations: textbook for universities, in Kondratenkov G.S. (Ed.). Moscow: Radiotekhnika, 368 p. (in Russian)
7. Tolstov, E.F., Filonchikov, V.D., Shkolnyy, L.A. (1993). Radio engineering circuits and signals. Theory of signals, linear circuits and systems. Moscow: Izdatelstvo VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 720 p. (in Russian)
8. Tihonov, V.I., Harisov, V.N. (1989). Theory, Methods of Analysis and Synthesis of Radio-Electronic Systems. Moscow: Izdatelstvo VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 609 p. (in Russian)
9. Kondratenkov, G.S., Hotlyannik, V.A., Ivanisov, B.A. (2000). Statistical Characteristics of Signals of Decimeter Band Synthetic Aperture Radar Stations. *Radiotekhnika*, no. 3, pp. 55–60. (in Russian)
10. Vasilyev, O.V., Detkov, A.N., Zinchenko, O.N., Krishtopov, A.V., Tsvetkov, O.E. (2016). The compact p-band UAV’S SAR. *Information-measuring and control systems*, vol. 14, no. 2, pp. 44–54. (in Russian)
11. Vasilyev, O.V., Detkov, A.N. (2018). Small-sized integrated two-band SAR for a UAV of monitoring of an ice surface in the arctic region. *Polet*, no. 7, pp. 17–23. (in Russian)
12. Neronskiy, L.B., Mikhaylov, V.F., Bragin, I.V. (1999). Microwave equipment for remote sensing of the Earth’s surface and atmosphere. Radars with synthetic aperture antennas: Tutorial. Part 2. St. Petersburg: SPbGUAP, 220 p. (in Russian)
13. Shkolnyy, L.A. (1981). Two ways to describe the operator’s sensing during the syn-

thesizing of the RSA signal processing system by coordinate path range. In: *NMM po impul'snoy tekhnike i sadovoy obrabotke informatsii: sbornik statey*. Moscow: Izdatelstvo VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, pp. 112–119. (in Russian)

14. **Cumming, I., Wong, F.** (2005). Digital processing of synthetic aperture radar data: algorithms and implementation. Artech House Publishers, 625 p.

15. **Fang, J., Xu, Z., Zhang, B., Hong, W., Wu, Y.** (2014). Fast compressed sensing SAR imaging based on approximated observation. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 7, no. 1, pp. 352–363. DOI: 10.1109/JSTARS.2013.2263309

16. **Tonkih, A.N., Kuznetsova, V.A.** (2023). Automated georeferencing of sar images using machine vision methods. In: *Aktualnyye problemy i perspektivy razvitiya radiotekhnicheskikh i infokommunikatsionnykh sistem ("RADIOINFOKOM-2023")*: sbornik nauchnykh statey VII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Moscow: MIREA, pp. 38–42. (in Russian)

17. **Vlasov, S.O., Glasyshev, A.I., Boguslavsky, A.A., Sokolov, S.M.** (2023). Example of the object detection problem solving using neural network technologies. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, no. 16, 27 p. DOI: 10.20948/prepr-2023-16 (in Russian)

Список литературы

1. **Северов Н.В.** Применение робототехники в чрезвычайных ситуациях: теория и практика: монография. Новогорск: АГЗ МЧС России, 2003. 241 с.

2. **Петренко Е.С.** Некоторые технические особенности решения проблемы гуманитарного разминирования. Системы технической охраны объектов [Электронный ресурс] // vrsystems.ru. URL: https://www.vrsystems.ru/stati/nekotorie_texnicheskie_osobennost

[i_resheniya_problemi_gumanitarnogo_razminiroyvaniya.htm](#) (дата обращения: 21.04.2025).

3. **Baur J.** Ukraine is riddled with land mines: drones and ai can help // *IEEE Spectrum*. 2024. Vol. 61, no. 5. Pp. 42–49. DOI 10.1109/MSPEC.2024.10522930

4. **Горшков П.С., Васильев О.В.** Новые технические средства разведки в интересах гуманитарного разминирования // *Инновационные, информационные и коммуникационные технологии: сборник трудов XXI Международной научно-практической конференции*. Сочи, 01-10 октября 2024 г. Москва: Ассоциация выпускников и сотрудников ВВИА им. проф. Жуковского, 2024. С. 131–135.

5. **Школьный Л.А., Толстов Е.Ф., Детков А.Н. и др.** Радиолокационные системы воздушной разведки, дешифрирование радиолокационных изображений: учеб. пособие / Под. ред. Л.А. Школьного. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008. 432 с.

6. **Кондратенков Г.С., Фролов А.Ю.** Радиовидение. Радиолокационные станции дистанционного зондирования Земли: учеб. пособие для вузов / Под ред. Г.С. Кондратенкова. М.: Радиотехника, 2005. 368 с.

7. **Толстов Е.Ф., Филончиков В.Д., Школьный Л.А.** Радиотехнические цепи и сигналы. Теория сигналов, линейных цепей и систем. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1993. 720 с.

8. **Тихонов В.И., Харисов В.Н.** Теория, методы анализа и синтеза радиоэлектронных систем. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1989. 609 с.

9. **Кондратенков Г.С., Хотляник В.А., Иванисов Б.А.** Статистические характеристики сигналов РЛС с синтезированной апертурой дециметрового диапазона // *Радиотехника*. 2000. № 3. С. 55–60.

10. **Васильев О.В.** Малогабаритная радиолокационная система Р-диапазона беспилотных летательных аппаратов / О.В. Васильев, А.Н. Детков, О.Н. Зинченко, А.В. Криштопов, О.В. Цветков // *Информационно-измеритель-*

ные и управляющие системы. 2016. Т. 14, № 2. С. 44–54.

11. Васильев О.В., Детков А.Н. Малогабаритная двухдиапазонная радиолокационная станция с синтезированной и интегрированной апертурой антенны для беспилотного летательного аппарата воздушной ледовой разведки в арктическом регионе // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2018. № 7. С. 17–23.

12. Неронский Л.Б., Михайлов В.Ф., Брагин И.В. Микроволновая аппаратура дистанционного зондирования поверхности Земли и атмосферы. Радиолокаторы с синтезированной апертурой антенны: учеб. пособие. СПб.: СПбГУАП, 1999. Ч. 2. 220 с.

13. Школьный Л.А. Два способа описания оператора зондирования при синтезе системы обработки сигналов в РСА по координате путевая дальность // НММ по импульсной технике и дискретной обработке информации: сборник статей. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1981. С. 112–119.

14. Cumming I., Wong F. Digital processing of synthetic aperture radar data: algo-

rithms and implementation. Artech House Publishers, 2005. 625 p.

15. Fang J. Fast compressed sensing SAR imaging based on approximated observation / J. Fang, Z. Xu, B. Zhang, W. Hong, Y. Wu // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. 2014. Vol. 7, no. 1. Pp. 352–363. DOI: 10.1109/JSTARS.2013.2263309

16. Тонких А.Н., Кузнецова В.А. Автоматизированная геопривязка радиолокационных изображений с применением методов машинного зрения // Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем («РАДИО-ИНФОКОМ-2023»): сборник научных статей VII Международной научно-практической конференции. Москва, 20–24 ноября, 2023 г. М.: МИРЭА, 2023. С. 38–42.

17. Власов С.О. Решение задачи обнаружения объекта с помощью нейросетевых технологий / С.О. Власов, А.И. Гладышев, А.А. Богуславский, С.М. Соколов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. № 16. 27 с. DOI: 10.20948/prepr-2023-16

Information about the authors

Oleg V. Vasiliev, Doctor of Technical Sciences, Professor, Principal Researcher, NaukaSoft Scientific and Production Association, vas_ov@mail.ru.

Pavel S. Gorshkov, Doctor of Technical Sciences, General Director of NaukaSoft Scientific and Production Association, vas_ov@mail.ru.

Sergey A. Zybkin, Candidate of Technical Sciences, Research Associate, NaukaSoft Scientific and Production Association, sergezyab@gmail.com.

Sergey P. Shepet', Candidate of Technical Sciences, Professor, Professor of the Technological Institute of Service (branch of the Don State Technical University), ship.1963@mail.ru.

Сведения об авторах

Васильев Олег Валерьевич, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник ООО «НПО НаукаСофт», vas_ov@mail.ru.

Горшков Павел Сергеевич, доктор технических наук, доцент, генеральный директор ООО «НПО НаукаСофт», vas_ov@mail.ru.

Зябкин Сергей Алексеевич, кандидат технических наук, научный сотрудник ООО «НПО НаукаСофт», sergezyab@gmail.com.

Шепеть Сергей Петрович, кандидат технических наук, профессор, профессор Технологического института сервиса (филиал Донского ГТУ), ship.1963@mail.ru.

Поступила в редакцию	08.07.2025	Received	08.07.2025
Одобрена после рецензирования	25.08.2025	Approved after reviewing	25.08.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

УДК 351.814.33

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-38-52

Optimization of the approach to Moscow Flight Information Region: Environmental and economic aspects of implementing the continuous descent procedure

D.A. Mozzhukhin¹, V.N. Nechaev², R.A. Subbotin²

¹*Moscow Center for Automated Air Traffic Management, Moscow, Russia*

²*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

Abstract: With the growth of air traffic, the implementation of environmentally friendly and cost-effective technologies in civil aviation becomes increasingly important. One promising solution is the Continuous Descent Operations (CDO) mode, which ensures an optimal descent trajectory, reducing fuel consumption, CO₂ emissions, and noise near airports. This work develops an analytical model to evaluate the effectiveness of CDO implementation in the Moscow Flight Information Region, taking into account the optimization of air traffic control and airspace organization. The methodology includes mathematical modeling, expert evaluation, and simulation analysis. Algorithms are proposed for multifactor assessment of the impact of traffic density, air traffic control features, and weather conditions on CDO application. The results can be used to develop regulations and air traffic schemes in the Moscow area, contributing to fuel savings and environmental improvements in line with ICAO's 2016–2030 plan.

Key words: Continuous Descent Operations, efficiency assessment, air traffic control.

For citation: Mozzhukhin, D.A., Nechaev, V.N., Subbotin, R.A. (2026). Optimization of the approach to Moscow Flight Information Region: Environmental and economic aspects of implementing the continuous descent procedure. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 38–52. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-38-52

Оптимизация захода на посадку в районе полетной информации Москвы: эколого-экономическая оценка внедрения процедуры непрерывного снижения

Д.А. Мозжухин¹, В.Н. Нечаев², Р.А. Субботин²

¹*Московский центр автоматизированного управления воздушным движением,
г. Москва, Россия*

²*Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия*

Аннотация: В условиях роста воздушного движения важным становится внедрение экологических и экономических технологий в гражданской авиации. Одним из перспективных решений является режим непрерывного снижения (Continuous Descent Operations, CDO), обеспечивающий оптимальную траекторию снижения с уменьшением расхода топлива, выбросов CO₂ и шума вблизи аэропортов. В исследовании разработана аналитическая модель оценки эффективности внедрения CDO в Московском районе полетной информации, учитывающая оптимизацию диспетчерского управления и организацию воздушного пространства. Методология включает математическое моделирование, экспертный и имитационный анализ. Предложены алгоритмы мультифакторной оценки влияния плотности трафика, особенностей диспетчерского регулирования и метеоусловий на применение CDO. Результаты могут использоваться для формирования регламентов и схем воздушного движения в Московской зоне, способствуя снижению топливных затрат и экологическому улучшению в соответствии с планом ИКАО на 2016–2030 годы.

Ключевые слова: режим непрерывного снижения, оценка эффективности, обслуживание воздушного движения.

Для цитирования: Мозжухин Д.А., Нечаев В.Н., Субботин Р.А. Оптимизация захода на посадку в районе полетной информации Москвы: эколого-экономическая оценка внедрения процедуры непрерывного снижения // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 38–52. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-38-52

Introduction

Given the dynamic development of civil aviation, the implementation of technological solutions aimed at reducing the environmental impact of air transport and enhancing the economic efficiency of flights is becoming a pressing task. One promising direction is the Continuous Descent Operations (CDO) procedure, which facilitates an optimized descent with minimal engine thrust, contributing to reduced fuel consumption and lower levels of aircraft noise.¹

The relevance of this study is driven by the necessity to implement the provisions of the Global Air Navigation Plan (GANP) for 2016–2030, developed by the International Civil Aviation Organization (ICAO), within which the Continuous Descent Operations procedure plays a key role in the B1-RSEQ (Optimization of Arrival/Departure Sequencing and Merging) and B1-FRTO (Optimization of Flight Routes) modules.²

On the international stage, leading hub airports, such as Kansai International Airport (Japan) [1], as well as airports in the USA (Louisville and Los Angeles) [2, 3], have successfully implemented this technology, leading to significant reductions in operational costs and harmful emissions into the atmosphere. Implementing similar procedures in the Moscow airspace zone appears advisable and necessary from the perspective of improving the air traffic management (ATM) system and enhancing the efficiency of air navigation services.

A key advantage of implementing the continuous descent procedure is its low capital intensity, as modern civil aircraft are equipped with Flight Management Systems (FMS) capable

of automatically calculating optimal descent parameters. The main changes involve adapting air traffic control procedures, updating the regulatory framework, and training personnel of air traffic services (ATS). International experience confirms that the implementation of continuous descent does not require large-scale infrastructure transformations, yet delivers significant environmental and economic benefits.³

The goal of this study is to develop a comprehensive analytical model to assess the effectiveness of implementing continuous descent procedures in the Moscow Flight Information Region (FIR). The development and implementation of such models represents a relevant scientific and applied task associated with optimizing approach trajectories, minimizing fuel costs, reducing carbon dioxide emissions, and lowering aircraft noise levels in areas surrounding airports.

To achieve the stated goal, the following tasks were defined in the course of the research:

- conducting a survey of an expert group to assess the effectiveness of applying the continuous descent procedure;
- application of mathematical modeling to analyze air traffic processes during the implementation of Continuous Descent Operations (CDO);
- development of an analytical model to assess the impact of continuous descent on fuel consumption and air traffic controller workload;
- creation of algorithms and software for simulating various scenarios of applying the continuous descent procedure in the Moscow airspace region.

The theoretical significance of this research lies in the development of a comprehensive methodological approach for assessing the effec-

¹ Doc 9931-2010. (2010). Manual continuous descent operations (CDO). 1st ed. ICAO, 60 p.

² Doc 9750. (2016). Global Air Navigation Plan. 8th ed. ICAO, 54 p.

³ International Civil Aviation Organization (ICAO). (2005). Rules of the Air. Annex 2 to the Convention on International Civil Aviation. 10th ed. ICAO, 104 p.

tiveness of implementing Continuous Descent Operations (CDO). This approach is based on the integration of expert analysis, simulation modeling on a high-fidelity flight simulator, and the development of specialized software for the parametric optimization of descent trajectories.

Thus, the research results will contribute to the scientifically-grounded implementation of CDO procedures in the Moscow airspace region. This is expected to enhance the efficiency of air navigation services, reduce airline fuel costs, and minimize the environmental and acoustic impact of air transport.

Research methodology

The methodological foundation of the research is a comprehensive approach combining theoretical justification, mathematical modeling, and expert-analytical procedures. The aim of the methodology is a comprehensive assessment of the applicability of Continuous Descent Operations (CDO) procedures under the high-density air traffic conditions of the Moscow FIR.

The primary research method is mathematical modeling, aimed at the quantitative assessment of the effectiveness of CDO procedure implementation, taking into account aerodynamic, navigational, and operational characteristics of aircraft, as well as the specifics of air traffic management in the Moscow aviation hub.

To ensure the reliability of the obtained results, an expert group was formed, including first-class air traffic controllers with over 10 years of experience. Within the empirical stage, expert surveys were conducted with the goal of identifying factors significantly influencing the composite index of CDO applicability, as well as determining key constraints related to the current airspace structure.

Simulation modeling was conducted in two stages:

1. The air traffic situation was modeled using a specialized simulator adapted for scenarios typical of the Moscow zone.

2. Numerical modeling of trajectory solutions was performed in the MATLAB environment using a multi-parameter optimization mod-

el that accounts for the aerodynamic characteristics of a Boeing 737-800 aircraft.

Initial parameters for the numerical modeling included:

- Cruise flight level: FL360;
- Aircraft mass: 71 tonnes;
- Air temperature at flight level: $-43\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- Wind conditions: calm;
- CDO profile: descent at a constant flight path angle of 3° ;
- Fuel consumption calculation: based on a Thrust-Specific Fuel Consumption (TSFC) model dependent on engine operating mode;
- Trajectory data: obtained from FMS and simulator scenarios.

The system of differential equations of aircraft motion [4] during the descent phase has the following form

$$\frac{dh}{dt} = V \cdot \sin \gamma; \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{T-D}{m} - g \cdot \sin \gamma; \quad (2)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\text{TSFC} \cdot T, \quad (3)$$

where h – flight altitude;
 V – horizontal velocity;
 γ – flight path angle;
 T – engine thrust (dependent on altitude and velocity);
 D – aerodynamic drag;
 m – current aircraft mass;
TSFC – thrust-specific fuel consumption (dependent on engine operating mode);
 g – gravitational acceleration.

Aerodynamic drag was calculated using the formula [5]

$$D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho(h) \cdot V^2 \cdot S, \quad (4)$$

where C_D – drag coefficient (according to Boeing data);

$\rho(h)$ – air density according to the ICAO standard atmosphere;

S – wing surface area.

The optimization criterion for the numerical experiment was formulated as a functional for minimizing fuel consumption [6]:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} TSFC(t) \cdot T(t) dt. \quad (5)$$

The integration of the equations was performed using the fourth-order Runge-Kutta method with a step of 0.1 seconds. To account for the influence of uncertainties, such as mass variations and weather conditions, the Monte Carlo method was used with a number of iterations $N = 1000$. The simulation assessed both fuel consumption and acoustic impact on areas adjacent to the flight path.

Additionally, a software module was developed in the JavaScript language, enabling the simulation of potential trajectory conflict scenarios within the current airspace structure of the Moscow FIR. This made it possible to evaluate the potential for integrating CDO from the perspectives of flight safety and possible air traffic conflicts arising during the simultaneous execution of descent procedures by multiple aircraft.

The simulation results were subjected to expert evaluation. The level of agreement among experts was assessed using Kendall's coefficient of concordance. The obtained value of $W = 0.7$ indicates a high degree of consensus among the respondents, confirming the reliability of the conclusions.

Thus, the proposed methodology has enabled a comprehensive assessment of the applicability of the Continuous Descent Operations procedure under the conditions of the real airspace structure and the high flight intensity characteristic of the Moscow FIR.

Research results

1. Assessment of CDO applicability in the Moscow Flight Information Region (FIR)

The expert analysis method was applied to assess the applicability of the Continuous Descent Operations (CDO) procedure in the Mos-

cow FIR. The goal of the expert analysis was to rank factors by the degree of their impact on the implementation of the CDO procedure to identify the most significant parameters influencing its application [7].

Based on an analysis of regulatory documents, features of air traffic organization, and the results of expert surveys, all factors affecting the possibility of implementing CDO were classified into three main groups:

1. Factors reducing the overall airspace capacity.

This group includes:

- adverse meteorological phenomena (low cloud cover, thunderstorm activity, strong winds at flight levels and in the surface layer);
- established temporary and permanent restriction zones, including those related to the activities of the ministry of defense;
- high density of inbound aircraft traffic;
- the need to apply separation and maneuvering procedures deviating from the optimal trajectory;
- close proximity of airports to each other;
- diversity of aircraft types in the airspace;
- possible misalignment between the CDO profile direction and established approach procedures.

2. Factors limiting the capacity of air traffic control units.

This category includes:

- complexity of the airspace structure (multiplicity of sectors and their configurations, presence of intersecting routes);
- regulatory-established sector capacity;
- high workload on controller positions during periods of intensive traffic;
- limited capabilities to grant priorities to different flight categories.

3. Organizational and technological factors.

This group includes:

- the need for prior coordination of CDO application with ATS units;
- absence of unified continuous descent procedures within the FIR;
- insufficient level of automation in air traffic management processes (lack of automatic CDO trajectory prediction);

Table 1

Data for calculation of integral index characterizing CDO applicability

Key factors for CDO feasibility	Airspace structure	Traffic intensity	Meteorological conditions	Equipment
Weighing coefficients	0.25	0.2	0.2	0.2
Factor scores	0.8	0.7	0.9	0.85

- limited compatibility of the continuous descent procedure with existing arrival sequencing algorithms.

To quantitatively assess and verify the expert opinions, a procedure for evaluating the competence of each expert was conducted. The competence assessment was carried out based on the following expression [8]:

$$K_{\mathcal{E}_i} = \frac{K_{a_i} + K_{n_i}}{K_{a_{max}} + K_{n_{max}}}, \quad (6)$$

where $K_{\mathcal{E}_i}$ – coefficient reflecting the level of competence of the i -th expert;

K_{n_i} – coefficient reflecting the level of informedness of the i -th expert;

K_{a_i} – coefficient reflecting the level of argumentation of the i -th expert;

$K_{a_{max}}$ and $K_{n_{max}}$ – maximum possible scores for coefficients K_{a_i} and K_{n_i} typically equal to 1.

The aggregated competence value for the entire expert group was determined by the formula

$$Q = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^z K_{\mathcal{E}_i}. \quad (7)$$

Based on the calculated competence level, a final sample was formed and used for the expert survey to determine the indicator of successful CDO application in the Moscow FIR.

To assess the degree of consensus among expert judgments, Kendall’s coefficient of concordance was applied [9, 10], defined by the following relationship:

$$W = \frac{S}{S_{max}} = \frac{S}{\frac{1}{12} z^2 (m^3 - m) - z \sum_{j=1}^z T_j}, \quad (8)$$

where S – the sum of squares of deviations of the total average ranks for each option from the overall average rank of all options;

S_{max} – the maximum possible sum of squares of deviations of the total average ranks for each option from the overall average rank of all options, considering the presence of tied ranks;

z – number of experts;

m – number of alternative options to be ranked by the experts;

T_j – correction factors accounting for tied ranks.

The calculated concordance coefficient was 0.7, which indicates a high degree of consensus in the expert assessments and allows for the conclusion that there is a significant probability of successfully implementing continuous descent operations in the airspace of the Moscow FIR. The assessment of CDO implementation feasibility was determined using the following expression [11]:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{W_i \cdot \phi}{W_i}, \quad (9)$$

where W_i – weighting coefficients;

ϕ – factor scores.

Table 1 presents the data for calculating the integral indicator of CDO procedure applicability in the Moscow FIR, as determined by the expert group.

During the research, each expert was asked to assess the influence of a specific factor (e.g., “Airspace Structure,” “Meteorological Conditions,” etc.) on the possibility of applying CDO on a scale from 0 to 1, where

1 – maximum positive influence,

0 – no influence.

Individual expert assessments were averaged, taking into account weights dependent on their level of competence.

Based on the analysis of the expert survey, the integral indicator characterizing the possibility of successfully implementing the CDO procedure in the Moscow FIR amounted to 0.78. This indicates a high degree of feasibility for this technology under current operational conditions.

2. Implementation of the CDO procedure in the Moscow FIR

The Continuous Descent Operation (CDO) procedure is a type of flight trajectory implemented during the aircraft descent phase, aimed at ensuring a smoother, more environmentally friendly, and efficient approach to the aerodrome. However, in real airspace conditions, multiple trajectory intersections and conflicts are possible due to existing arrival and departure routes. Given the priority task of ensuring flight safety, when designing new routes using CDO, it becomes necessary to develop and apply specialized tools capable of identifying potential conflicts between new and existing trajectories. Such tools should provide a comprehensive analysis of spatiotemporal flight parameters, model interaction scenarios, and generate feasible solutions for preventing or resolving identified conflict situations.

As part of the analysis of the airspace structure of the Aerodrome Control Center, potential trajectory intersections affecting safety were identified at the stage of designing CDO trajectories. Since trajectory creation is based on known waypoints using interpolation methods, a specialized program was developed in JavaScript for this work. Its logic is presented in Figure 1.

As the reference point for calculations, runway 06 of Vnukovo Airport was selected, its coordinates specified in latitude and longitude. To simplify mathematical computations, the coordinates were converted from degrees, minutes, and seconds format to decimal degrees.

The program utilizes the Haversine formula to calculate the distance between two points on

the Earth's surface, allowing for the consideration of its curvature. The cross product is used to check the parallelism of two lines defined by pairs of points (p_1, p_2 and q_1, q_2), which is an important step in analyzing potential conflicts between trajectories. In the case of parallel lines, an additional collinearity check is performed to determine if the lines lie on the same straight line. If the lines are collinear, they either coincide or do not intersect.

If the lines are not parallel, the program calculates parameters t and u , which indicate their intersection point. Subsequently, the algorithm checks whether these intersection points lie within the line segments. If the intersection point is outside the segments, the program reports no conflict.

To enhance calculation accuracy, the algorithm analyzes the difference between the coordinates of intersection points using a threshold value (in this case, 10 units). If the difference between the coordinates is less than the specified threshold, the program returns the intersection point, accounting for computational inaccuracies. This approach allows for effective modeling and analysis of the interaction between various arrival routes, which is important for optimizing air traffic and preventing conflict situations in the aerodrome zone. Thus, the developed algorithm provides the capability to flexibly modify the arrival route with CDO while avoiding the occurrence of conflicting aircraft trajectory intersections.

In Figure 2, the URAGO 1C STAR will be used as an example of a CDO procedure for an eastern approach to Vnukovo. It consists of the following waypoints (data taken from the AIP):

URAGO (553300.00N, 0395953.00E);
GEKLA (553330.00N, 0395923.00E);
ENMUR (553310.00N, 0373419.00E);
WW239 (553531.10N, 0373010.50E);
AFISA (553817.80N, 0372814.00E);
WW451 (553659.54N, 0372221.97E).

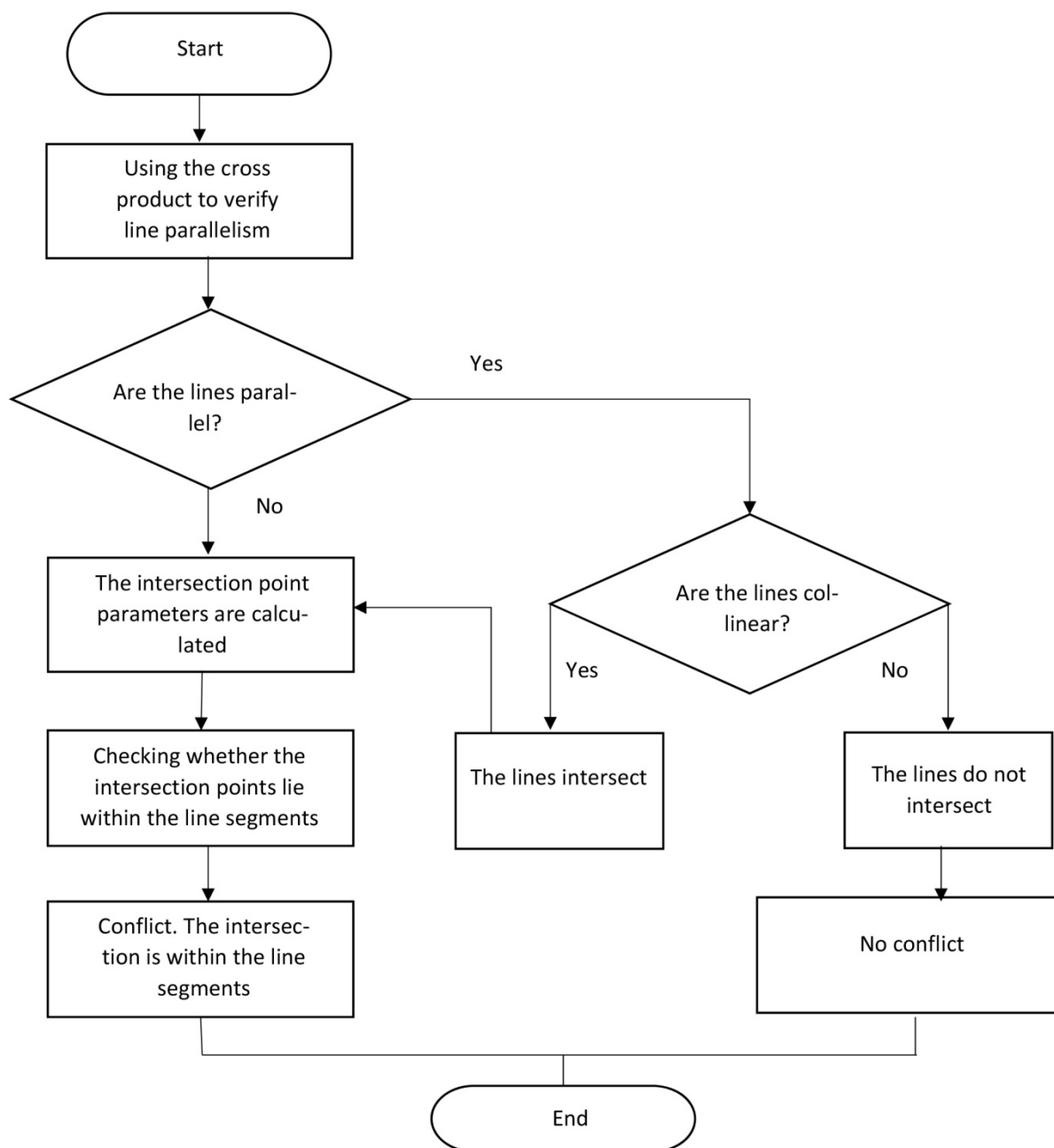


Fig. 1. Flowchart for determining the intersection point of aircraft routes

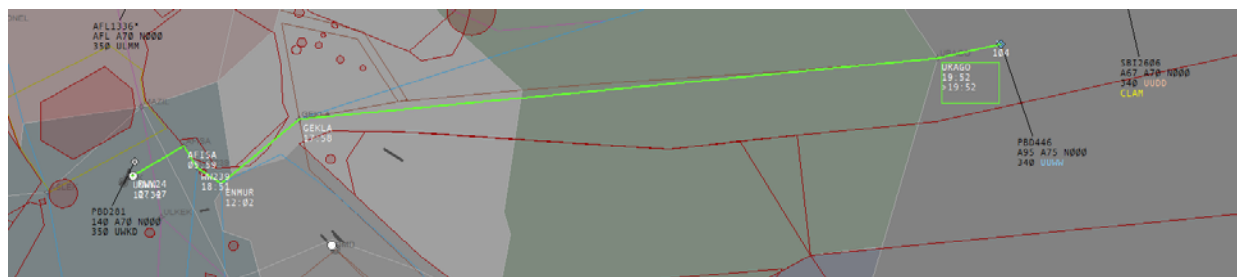


Fig. 2. STAR using CDO URAGO 1C



Fig. 3. STARs DIMGI 3A and DIMGI 3B

In this arrival procedure, the primary focus was placed on the Restricted Airspace UUR215 (Ramenskoye Aerodrome), which is active at altitudes from FL150 to FL980 [12]. However, it should be noted that this restriction is applied only during periods of active airspace use by Ramenskoye Aerodrome.

There are three scenarios for traversing the UUR215 restricted area when applying the continuous descent procedure via the URAGO 1C arrival:

1. If the flight schedule does not include the use of this part of the airspace, it becomes available for maneuvering. In this case, the URAGO 1C arrival will consist of waypoints URAGO-ENMUR-WW239-AFISA-WW451, and the flight trajectory will contain a minimal number of turn points.

2. If there are airspace restrictions, controllers at the Moscow ATM center can directly contact controllers at Ramenskoye Aerodrome to coordinate the transit of the restricted zone for individual aircraft, even with active airspace restrictions.

3. If the airspace in zone UUR215 is restricted, and transit of the zone by agreement is prohibited, the route using the CDO procedure will follow the full CDO arrival procedure and consist of waypoints URAGO-GEKLA-ENMUR-WW239-AFISA-WW451.

Thus, flexibility in route planning, considering airspace restrictions and the possibilities for coordination with aerodromes, allows for the

effective use of CDO technologies while minimizing risks.

Figure 3 presents the traditional STARs in Vnukovo: DIMGI 3A and DIMGI 3B.

Navigation routes within the new airspace structure were designed following the principle of conflict-free routing [13]. The navigation waypoint DIMGI is intended for directing aircraft landing at Sheremetyevo and Vnukovo, while aircraft landing at Domodedovo pass through the URAGO waypoint. The key difference between the traditional arrival procedures and the continuous descent arrival procedure is the shift of the Top of Descent (ToD) point from DIMGI to URAGO for aircraft bound for Vnukovo Airport. Shifting the ToD point from DIMGI to URAGO will alleviate controller workload by redistributing aircraft flows. According to official data from the Federal Air Transport Agency, as of the end of 2024, Sheremetyevo Airport (Moscow) is the busiest airport in Russia, having served approximately 43.7 million passengers. By redirecting a portion of the traffic bound for Vnukovo through the URAGO point, a more balanced and safer flow of aircraft can be achieved.

As a result of moving the Top of Descent point to above URAGO, potential conflicts may arise between the trajectories of aircraft arriving on CDO procedures and those departing from Vnukovo and Sheremetyevo. Using the developed software to model the modified airspace structure within the Aerodrome Control Center

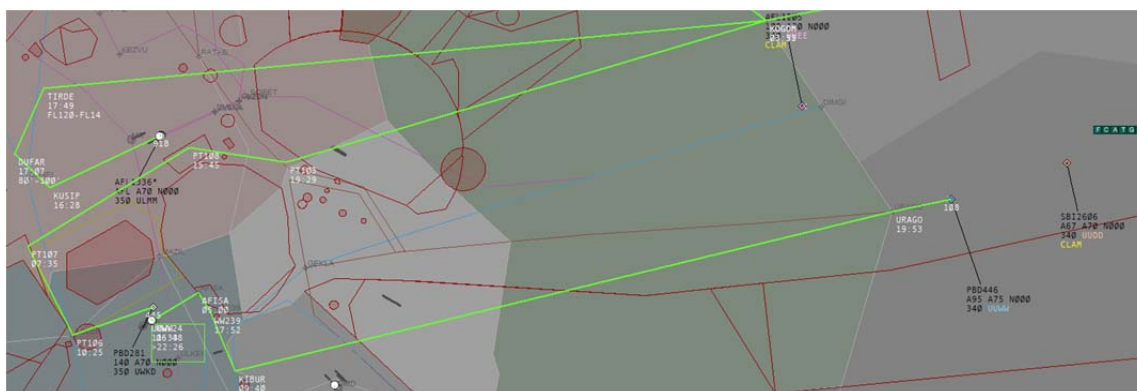


Fig. 4. Change in departure routes from Vnukovo and Sheremetyevo

zone, intersections of aircraft trajectories were identified. Accordingly, it is necessary to reorganize a portion of the departures from Vnukovo. Aircraft should depart westward to avoid conflict with inbound traffic, circumvent the prohibited areas UUP52 and UUP53, and then execute a right turn toward the planned flight route to the KOGOM waypoint. To ensure the reorganized departures from Vnukovo do not conflict with departures from Sheremetyevo, aircraft from the latter must perform a similar maneuver: initially westward, parallel to the Vnukovo departure route, followed by a right turn towards waypoints DUFAR – TIRDE – KOGOM. Altitude constraints are already in place above KOGOM for aircraft departing from different aerodromes, thus eliminating the possibility of conflicting trajectory intersections in that area. The reorganized departure routes are schematically presented in Figure 4.

The development and implementation of the Continuous Descent Operations (CDO) procedure in the Moscow FIR airspace are aimed not only at optimizing air traffic flows and enhancing safety but also at achieving tangible operational and environmental benefits. The positive effect of applying CDO is particularly noticeable in the vicinity of Vnukovo Airport, where the reduction of engine thrust during descent and the shortening of level flight segments contribute to decreased fuel consumption and reduced noise levels near the airport. Let us examine in more detail the key advantages that the implementation of this procedure provides under the condi-

tions of high-density air traffic in the Moscow Flight Information Region.

3. Advantages of implementing the Continuous Descent Procedure in the Moscow FIR

Continuous Descent Operations are widely adopted due to a number of significant advantages. Their implementation not only enhances flight efficiency but also reduces the negative environmental impact of aviation. The primary benefits of CDO include:

1. **Fuel efficiency** – reduced fuel consumption during the descent phase compared to the conventional stepping down descent.
2. **Reduction of harmful emissions** – decreased amount of CO₂, NO_x, and other pollutant emissions into the atmosphere.
3. **Noise abatement** – diminished acoustic impact due to a smoother and more predictable descent profile.

Each of these advantages is important both from the perspective of aircraft operations and from the standpoint of the sustainable development of the aviation industry. A more detailed explanation of each follows below.

To assess the effectiveness of the Continuous Descent Operations procedure in the Moscow FIR, let's introduce the concept of fuel consumption. In the Flight Management System (FMS), fuel consumption during aircraft descent is calculated based on several parameters, including

Table 2

Aircraft parameters during descent under URAGO 1C (with CDO) and DIMGI 3B arrivals

STAR	DIMGI 3B	URAGO 1C (with CDO)
ToD fuel remaining	6440 kg	6260 kg
Post-descent fuel remaining	5400 kg	6000 kg
Wind	calm	calm
OAT at FL300	-43 degrees Centigrade	-43 degrees Centigrade
Aircraft mass	71 tons	71 tons
Aircraft type	B737	B737
Fuel consumption	1040 kg	260 kg

aerodynamic drag, engine operating mode, aircraft mass, descent profile, and meteorological conditions.

The main formulae used to calculate fuel consumption are [14]

$$\dot{m}_{fuel} = TSFC \cdot T, \quad (10)$$

where \dot{m}_{fuel} – instantaneous fuel flow rate;

$TSFC$ – thrust-specific fuel consumption;

T – engine thrust.

During descent, engines operate at a reduced power setting, so T decreases significantly, which lowers fuel consumption [15].

$$\begin{aligned} T &\approx D, \\ D &= \frac{1}{2} C_D \rho V^2 S, \end{aligned} \quad (11)$$

where D – aerodynamic drag;

C_D – drag coefficient;

ρ – air density;

V – flight speed;

S – wing surface area.

To estimate fuel consumption during descent, accounting for speed and altitude data, the FMS uses the following relationship:

$$m_{fuel, desc} = \frac{TSFC \cdot C_D \rho V^2 S (h_{init} - h_{final})}{2V_{vert}}. \quad (12)$$

After reorganizing a part of the airspace structure and developing the URAGO 1C arrival utilizing continuous descent, modeling was con-

ducted on a “full flight” simulator. The fuel efficiency of the procedure using CDO and the conventional procedure was calculated using expression (12) and is presented in Table 2.

Thus, the reduction in fuel consumption during the continuous descent amounted to 780 kg, which is approximately 75% compared to the conventional descent, resulting in an average savings of about 25% of the total fuel consumption for the entire route. Figure 5 shows the relationship between fuel consumption and engine operating mode, as well as flight altitude.

The obtained difference in fuel consumption between conventional descent and descent with CDO allows for calculating the financial benefit of implementing continuous descent. In the Russian market, the price of Jet A-1 aviation fuel varies depending on the region, purchase volume, and supply terms. For example, the wholesale price for Jet A-1 aviation fuel is approximately 56,000–62,000 rubles per ton (or about 56–62 rubles per kilogram) according to data from major suppliers such as Gazpromneft-Aero. However, exact prices may depend on contract terms and the supply region. Thus, the financial benefit from changing one arrival procedure to continuous descent amounts to about 46,020 rubles per single flight.

In addition to significant fuel savings, the implementation of the continuous descent procedure allows for a substantial reduction in acoustic impact on the surrounding area, which is particularly relevant for the Moscow area of responsibility. The reduction in engine thrust and the elimination of level flight segments lead to a decrease in the overall noise level during the ap-

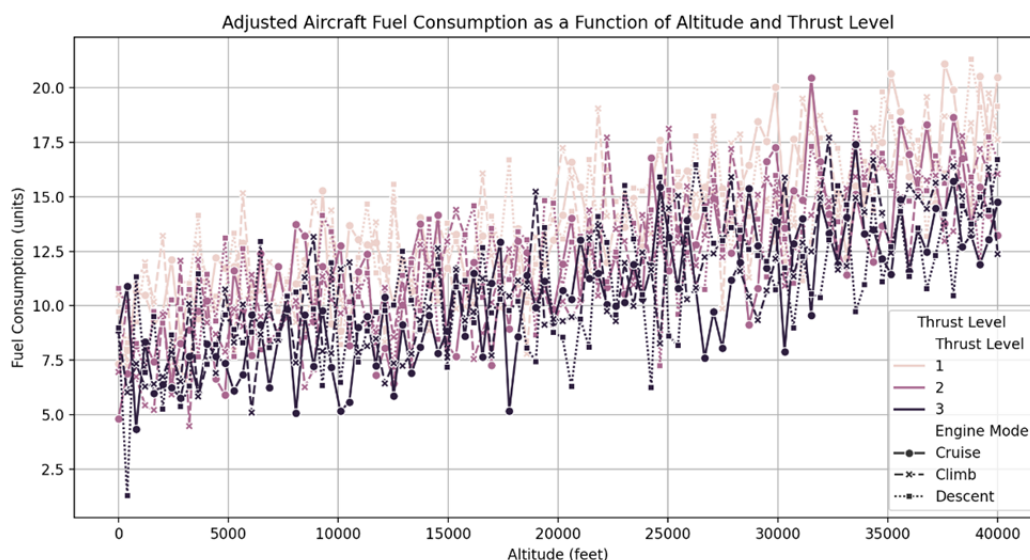


Fig. 5. Graph of dependence of aircraft fuel consumption on engine operation mode and flight altitude

Table 3

Comparison of Sound Exposure Levels (SEL) under Different Descent Scenarios

Scenario	SEL, dB(A) per 6 km	Difference
traditional DIMGI 3B arrival	81.4	
CDO URAGO 1C descent	77.6	-3.8

proach. To assess the acoustic effects of implementing the continuous descent procedure in the Moscow Flight Information Region, a model for calculating the sound exposure level on the ground was used, employing the INM v7.0 (Integrated Noise Model) software package. This software product is a recognized global standard for acoustic modeling in civil aviation and is officially recommended by ICAO for assessing the impact of aviation noise.

The input data for the calculation included:

- trajectory profiles: obtained from numerical modeling in MATLAB and using a Full Flight Simulator (for DIMGI 3B and CDO URAGO 1C profiles);
- aircraft type: Boeing 737-800 with CFM56-7B engines;
- aircraft mass on approach: 67–71 tons (variable mass from Monte Carlo simulation was considered);
- meteorological conditions: ICAO standard atmosphere, surface wind speed < 5 knots;

- engine operating modes: According to FMS and CDO profiles, accounting for reduced thrust during descent.

The acoustic indicator selected was SEL (Sound Exposure Level), dB(A) – the total sound exposure level, which considers both the loudness and duration of the noise (recommended by ICAO as the primary integrated indicator for analyzing ground-level noise from aircraft overflights).

The control point was:

- distance: 6 km from the runway threshold of Vnukovo Airport (along the runway centerline);
- measurement point height: at ground surface level (1.5 m above ground level).

In INM v7.0, for each scenario (conventional descent DIMGI 3B and CDO URAGO 1C), the trajectories and acoustic impact were calculated using the “Single Event SEL” methodology. This allows for assessing the effect of a single aircraft overflight at the given point (tab. 3).

Thus, the reduction in aircraft noise exposure on the ground when transitioning to CDO amounted to 3.8 dB(A) in terms of the SEL indicator at the control point.

Furthermore, continuous descent profiles demonstrate a more uniform and gradual reduction in acoustic impact across the entire approach segment. This is achieved by decreasing the number of segments where engines operate at higher power settings (intermediate level-off segments in conventional descent), increasing the flight altitude over populated areas, and reducing the duration of the sound event (shorter level flight phases).

Conclusion

Within the framework of this research, a comprehensive assessment of the applicability of the Continuous Descent Operations (CDO) procedure in the airspace of the Moscow FIR was provided, along with an analysis of the specifics of its integration into the existing route structure and air traffic control (ATC) provision.

The analysis of regulatory documents, features of air traffic organization, and expert surveys allowed for the identification of key factors influencing the implementation of CDO in this high-density airspace. These factors were classified into three main groups: those affecting airspace capacity, those affecting ATC unit workload, and organizational-technological factors. To ensure a well-founded ranking of these factors, an expert assessment methodology was implemented, accounting for the participants' competence, and the consistency of judgments was confirmed by a high value of Kendall's coefficient of concordance ($W = 0.7$).

As a result of the quantitative analysis, an integral indicator of CDO feasibility in the Moscow FIR was obtained, equal to 0.78. This indicates a high degree of readiness of the region for implementing the continuous descent procedure under current operational conditions, provided certain technological and organizational adaptations are made.

To enhance the efficiency of designing CDO trajectories, a software implementation of an al-

gorithm in JavaScript was developed as part of this work. This algorithm allows for the prompt identification of potential trajectory intersection points, considering spatiotemporal flight parameters. This solution aims to minimize the probability of conflicts and to form safe and optimal arrival trajectories.

Special attention was paid to designing the URAGO 1C procedure utilizing CDO for approaches to Vnukovo Airport from the eastern direction. Various scenarios for navigating around the UUR215 restricted zone were considered, confirming the possibility of flexible CDO application, taking into account the dynamics of airspace use and coordination with other ATS units.

Therefore, this research demonstrates not only the theoretical validity of applying CDO in the conditions of complex and dense air traffic in the Moscow FIR but also proposes concrete solutions for integrating this technology into the existing air traffic management system. The obtained results can be used for further development of recommendations for CDO implementation in Russia, as well as for improving the regulatory and methodological framework that ensures safe and efficient airspace operations.

References

1. **Toratani, D., Wickramasinghe, N.K., Fukushima, S., Hirabayashi, H.** (2017). Design methodology to simulate continuous descent operations at Kansai International Airport. *In: 2017 Winter Simulation Conference (WSC)*, Las Vegas, NV, USA, pp. 2578–2588. DOI: 10.1109/WSC.2017.8247985
2. **Clarke, J.-P., Brown, J.A., Elmer, K.R. et al.** (2004). Continuous descent approach: design and flight test for Louisville international airport. *Journal of Aircraft*, vol. 41, no. 5, pp. 1054–1066. DOI: 10.2514/1.5572
3. **Clarke, J.-P., Brooks, J., Neagle, G., Scacchioli, A., White, W., Liu, S.** (2013). Optimized profile descent arrivals at Los Angeles international airport. *Journal of Aircraft*, vol. 50, no. 2, pp. 360–369. DOI: 10.2514/1.C031529

4. Stevens, B.L., Lewis, F.L. (2015). Aircraft control and simulation. 3rd ed. New Jersey, John Wiley & Sons, 768 p.

5. Anderson, J.D. (2016). Fundamentals of aerodynamics. 6th ed. New York, McGraw-Hill Education, 1152 p.

6. Bryson, A.E. (1975). Applied optimal control: Optimization, estimation, and control. New York, Taylor & Francis, 500 p.

7. Nischuk, E.P., Reznichenko, S.V. (2017). The essence and analysis of the expert evaluation method and main approaches to its application. In: *Problemy identifikatsii, kachestva i konkurentosposobnosti potrebitelskikh tovarov: materialy V mezhdunarodnoy konferentsii v oblasti provedeniya i ekspertizy tovarov*. Kursk: Universitetskaya kniga, pp. 206–210. (in Russian)

8. Lyaskovskiy, V.L., Sarkisyan, D.A. (2020). Expert groups formation method to evaluate proposals for FPPI. *Competency (Russia)*, no. 3, pp. 4–9. (in Russian)

9. Postnikov, V.M., Chernenkiy, V.M. (2014). *Decision-making methods in organizational management systems*: Tutorial. Moscow: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Bauman, 208 p. (in Russian)

10. Kabanov, V.A., Komarova, E.S. (2016). Using the concordance method in assessing the consistency of expert opinions. In: *Reaktsiya regionalnoy ekonomiki na vneshniye vyzovy: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*. Vladimir: Vladimirskiy filial RANKhiGS, pp. 39–42. (in Russian)

11. Podinovsky, V.V., Potapov, M.A. (2013). Weighted-sum method of criteria in the analysis of multicriteria decisions: Pro et contra. *Biznes-informatika*, no. 3 (25), pp. 41–43. (in Russian)

12. Mozhukhin, D.A. (2024). Specific features of airspace organization in the area of an air hub control center for an air hub. In: *Aktualnyye problemy razvitiya aviatsionnoy tekhniki i metodov yeyo ekspluatatsii – 2023: materialy XVI Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov i aspirantov, posvyashchennoy prazdnovaniyu 100-letiya otechestvennoy*

grazhdanskoy aviatsii. Irkutsk: MGTU GA, pp. 168–179. (in Russian)

13. Divak, N.I. (2014). On the development of a new structure of Moscow area airspace. *Nauchnyy vestnik MGTU GA*, no. 209, pp. 67–71. (in Russian)

14. Kolodyazhny, D.Yu., Nagorny, V.S., Sipatov, A.M., Modorsky, V.Ya. (2017). A technique for numerical modeling of the liquid film disintegration in the pneumatic injector of aircraft engines. *Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika*, no. 1, pp. 93–97. (in Russian)

15. Bogomolov, D.V., Kharchenko, M.E. (2018). Justification of aviation fuel consumption rates using mathematical statistics methods. In: *Grazhdanskaya aviatsiya na sovremennom etape razvitiya nauki, tekhniki i obshchestva: tezisy dokladov mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii*. Moscow: Akademiya im. N.Ye. Zhukovskogo, p. 20. (in Russian)

Список литературы

1. Toratani D. Design methodology to simulate continuous descent operations at Kansai International Airport / D. Toratani, N.K. Wickramasinghe, S. Fukushima, H. Hirabayashi // 2017 Winter Simulation Conference (WSC). USA: Las Vegas, 2017. Pp. 2578–2588. DOI: 10.1109/WSC.2017.8247985

2. Clarke J.-P., Brown J.A., Elmer K.R. и др. Continuous descent approach: design and flight test for Louisville international airport // *Journal of Aircraft*. 2004. Vol. 41, no. 5. Pp. 1054–1066. DOI: 10.2514/1.5572

3. Clarke J.-P. Optimized profile descent arrivals at Los Angeles international airport / J.-P. Clarke, J. Brooks, G. Neagle, A. Scacchioli, W. White, S. Liu // *Journal of Aircraft*. 2013. Vol. 50, no. 2. Pp. 360–369. DOI: 10.2514/1.C031529

4. Stevens B.L., Lewis F.L. Aircraft control and simulation. 3rd ed. New Jersey: Wiley, 2015. 768 p.

5. Anderson J.D. Fundamentals of aerodynamics. 6th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2016. 1152 p.

6. **Bryson A.E.** Applied optimal control: Optimization, estimation, and control. New York: Taylor & Francis, 1975. 500 p.

7. **Нищук Е.П., Резниченко С.В.** Сущность и анализ метода экспертных оценок и основные подходы к его использованию // Проблемы идентификации, качества и конкурентоспособности потребительских товаров: материалы V Международной конференции в области товароведения и экспертизы товаров. Курск, 10 ноября 2017 г. Курск: Университетская книга, 2017. С. 206–210.

8. **Лясковский В.Л., Саркисян Д.А.** Метод формирования экспертных групп для оценки предложений по проведению ФППИ // Компетентность. 2020. № 3. С. 4–9. DOI: 10.24411/1993-8780-2020-10301

9. **Постников В.М., Черенький В.М.** Методы принятия решений в системах организационного управления: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 208 с.

10. **Кабанов В.А., Комарова Е.С.** Использование метода конкордации в оценке согласованности экспертных мнений // Реакция региональной экономики на внешние вызовы: материалы межвузовской научно-практической конференции, Владимир, 18 ноября 2016 г. Владимир: Владимирский филиал РАНХиГС, 2016. С. 39–42.

11. **Поудиновский В.В., Потапов М.А.** Метод взвешенной суммы критериев в анализе многокритериальных решений: Pro et

contra // Бизнес-информатика. 2013. № 3 (25). С. 41–43.

12. **Мозжухин Д.А.** Особенности организации воздушного пространства в районе аэроузлового диспетчерского центра // Актуальные проблемы развития авиационной техники и методов ее эксплуатации – 2023: материалы XVI Всероссийской научно-практической конференции студентов и аспирантов, посвященной празднованию 100-летия отечественной гражданской авиации. Иркутск, 7–8 декабря 2023 г. Иркутск: МГТУ ГА, 2024. С. 168–179.

13. **Дивак Н.И.** К вопросу о разработке новой структуры воздушного пространства московской воздушной зоны // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. № 209. С. 67–71.

14. **Колодяжный Д.Ю.** Методика численного моделирования процесса распада жидкой пленки в пневматической форсунке авиадвигателя / Д.Ю. Колодяжный, В.С. Нагорный, А.М. Сипатов, В.Я. Модорский // Известия вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 93–97.

15. **Богомолов Д.В., Харченко М.Э.** Обоснование норм расхода авиационного топлива методами математической статистики // Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества: тезисы докладов международной научно-технической конференции, Москва, 16–17 мая 2018 г. Москва: Академия им. Н.Е. Жуковского, 2018. С. 20.

Information about the authors

Denis A. Mozzhukhin, Master of Science, Air Traffic Controller at the Moscow Center for Automated Air Traffic Management (MC AATM), Postgraduate Student at Moscow State Technical University of Civil Aviation, mozzhukhin1998@mail.ru.

Vladimir N. Nechaev, Candidate of Historical Sciences, Associate Professor, the Head of the Air Traffic Management Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, v.nechaev@mstuca.ru.

Roman A. Subbotin, Associate Professor, Candidate of Military Sciences, Associate Professor of the Air Traffic Management Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, r.subbotin@mstuca.ru.

Сведения об авторах

Мозжухин Денис Алексеевич, магистр, диспетчер Московского центра автоматизированного управления воздушным движением, аспирант МГТУ ГА, mozzhukhin1998@mail.ru.

Нечаев Владимир Николаевич, кандидат исторических наук, доцент, заведующий кафедрой управления воздушным движением МГТУ ГА, v.nechaev@mstuca.ru.

Субботин Роман Александрович, кандидат военных наук, доцент, доцент кафедры управления воздушным движением МГТУ ГА, r.subbotin@mstuca.ru.

Поступила в редакцию	22.04.2025	Received	22.04.2025
Одобрена после рецензирования	22.09.2025	Approved after reviewing	22.09.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

УДК 62-732

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-53-83

Маршрутизация движения грузовых беспилотных летательных аппаратов на труднодоступных территориях. Часть 1

А.Г. Ченцов^{1,2}, И.О. Полешкина³, А.А. Ченцов¹, П.А. Ченцов^{1,2}

¹*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург, Россия*

²*Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия*

³*Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия*

Аннотация: Серьезной проблемой российской Арктики, которую можно решить за счет использования беспилотных летательных аппаратов, в условиях отсутствия круглогодично действующего автомобильного сообщения остается доставка грузов и патрулирование лесов с целью выявления и контроля развития пожарных явлений. Статья посвящена разработке методов построения оптимального маршрута облета лесных массивов на основе решения обобщенной задачи коммивояжера с условиями предшествования. Реализация методов оптимизации маршрутов основана на использовании динамического программирования в сочетании со специальной конструкцией на основе декомпозиции для двух вариантов агрегирования затрат: аддитивного и варианта, отвечающего минимаксной постановке; упомянутый подход позволяет в случае «двухкластерной» (в смысле декомпозиции) задачи находить композиционный экстремум за вполне приемлемое время. В первой части данной статьи рассматриваются возможности его применения в модельных задачах, ориентированных на проблемы в малой авиации, как первый шаг в построении методов и алгоритмов решения практических задач оптимизации маршрутов движения беспилотных летательных аппаратов, представляющих интерес для организации работы воздушного транспорта в Арктической зоне и для кардинального улучшения в организации мониторинга лесных пожаров. Результаты исследования показали, что использование динамического программирования для решения задачи с аддитивным критерием, осложненной ограничением предшествования, требует больших временных затрат, в модельном варианте время счета составило 29 ч 24 мин 49 с. Поэтому во второй части статьи будет рассмотрен вариант решения аддитивной задачи с выделением, предваряющей и финальной задач, в котором объектом исследования будет выступать композиционный маршрутный процесс (МП).

Ключевые слова: беспилотные летательные аппараты, декомпозиция, динамическое программирование, доставка грузов, маршрут, условия предшествования, патрулирование лесов, построение оптимального маршрута облета.

Для цитирования: Ченцов А.Г. Маршрутизация движения грузовых беспилотных летательных аппаратов на труднодоступных территориях. Часть 1 / А.Г. Ченцов, И.О. Полешкина, А.А. Ченцов, П.А. Ченцов // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 53–83. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-53-83

Routing of cargo unmanned aerial vehicles in remote areas. Part 1

A.G. Chentsov^{1,2}, I.O. Poleshkina³, A.A. Chentsov¹, P.A. Chentsov^{1,2}

¹*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian
Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

²*Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia*

³*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

Abstract: A serious problem in the Russian Arctic, which can be solved through the use of unmanned aerial vehicles (UAVs) given the lack of year-round road access, remains the delivery of goods and the patrolling of forests to identify and monitor the development of wild fires. This article is devoted to the development of methods for optimal forest area patrol route plotting based on solving a generalized traveling salesman problem (GTSP) with precedence constraints. The implementation of route optimization methods is based on dynamic programming combined with a special decomposition-based framework for two variants

of cost aggregation: additive and a variant corresponding to a minimax formulation; the mentioned approach allows for finding a compositional extremum in a fully acceptable time for a “two-cluster” (in terms of decomposition) problem. The first part of this article explores the possibilities of its application in model tasks focused on the problems in general aviation, as the first step in building methods and algorithms for solving practical UAV route optimization problems, which are of interest for organizing air transport operations in the Arctic Zone and for radical improvement wild fire monitoring. The research results showed that using dynamic programming to solve a problem with an additive criterion, complicated by a precedence constraint, requires significant time costs—in the model variant, the computation time was 29 hours, 24 minutes, and 49 seconds. Therefore, the second part of the article will consider a variant for solving the additive problem by setting the initial and final tasks, where the object of study will be a compositional mathematical programming (MP) model.

Key words: unmanned aerial vehicles, decomposition, dynamic programming, cargo delivery, route, precedence conditions, forest patrolling, optimal flight route plotting.

For citation: Chentsov, A.G., Poleshkina, I.O., Chentsov, A.A., Chentsov, P.A., (2026). Routing of cargo unmanned aerial vehicles in remote areas. Part 1. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 53–83. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-53-83

Введение

Создание надежной транспортной системы малонаселенных и труднодоступных территорий с участием круглогодично действующих автомобильных и железнодорожных магистралей часто оказывается экономически сложно реализуемым в силу отсутствия достаточных пассажиро- и грузопотоков для возврата вложенных инвестиций. В этих условиях необходим поиск наиболее гибких способов организации перевозок, позволяющих, с одной стороны, оптимизировать затраты на строительство и содержание транспортной инфраструктуры, с другой стороны, эффективно использовать транспортные средства с их максимальной загрузкой за счет консолидации отправок, применения мультимодальных схем доставки и переключения парка между выполнением разных транспортных заданий.

Одной из наиболее труднодоступных в транспортном отношении территорий Российской Федерации является Арктическая зона (АЗ), охватывающая 4,8 млн кв. км (28 % от общей площади Российской Федерации). На территории АЗ располагается частично или полностью 9 субъектов Российской Федерации. На основании особенностей природно-климатических условий Арктической зоны Российской Федерации (АЗ РФ) можно разделить на западную и восточную части, граница между которыми условно проходит по Уральским горам (рис. 1). На территории АЗ РФ проживает менее 2 %

населения России (около 2,4 млн человек). Для восточной части Российской Арктики характерны более суровые погодные условия со среднегодовым перепадом температур в 100 °С: от +40 до –60 °С. Особенностью этих территорий является большая разбросанность населенных пунктов, низкая численность постоянно проживающего населения, сезонные ограничения использования автомобильного транспорта (либо в связи с отсутствием дорог с твердым покрытием, либо из-за особенностей рельефа в горных местностях), частичное или полное отсутствие железнодорожного транспорта, постоянный, но небольшой спрос на транспортные услуги, за исключением случаев освоения новых мест добычи полезных ископаемых.

На территориях АЗ РФ, а также на территориях Крайнего Севера и приравненных к ним местностях можно выделить следующие особенности транспортной системы.

1. Основу транспортной системы составляют сезонные морские и речные пути с береговой инфраструктурой, сезонные автозимники, круглогодично действующие аэропорты и посадочные площадки, что определяет ее полуизолированное состояние.

2. Пассажирские перевозки осуществляются круглогодично действующим авиасообщением. Местные перевозки между населенными пунктами выполняются на нерегулярной основе.

3. Для перевозки грузов широко используются сезонно действующие водные пути сообщения и автозимники. Сезонность ис-

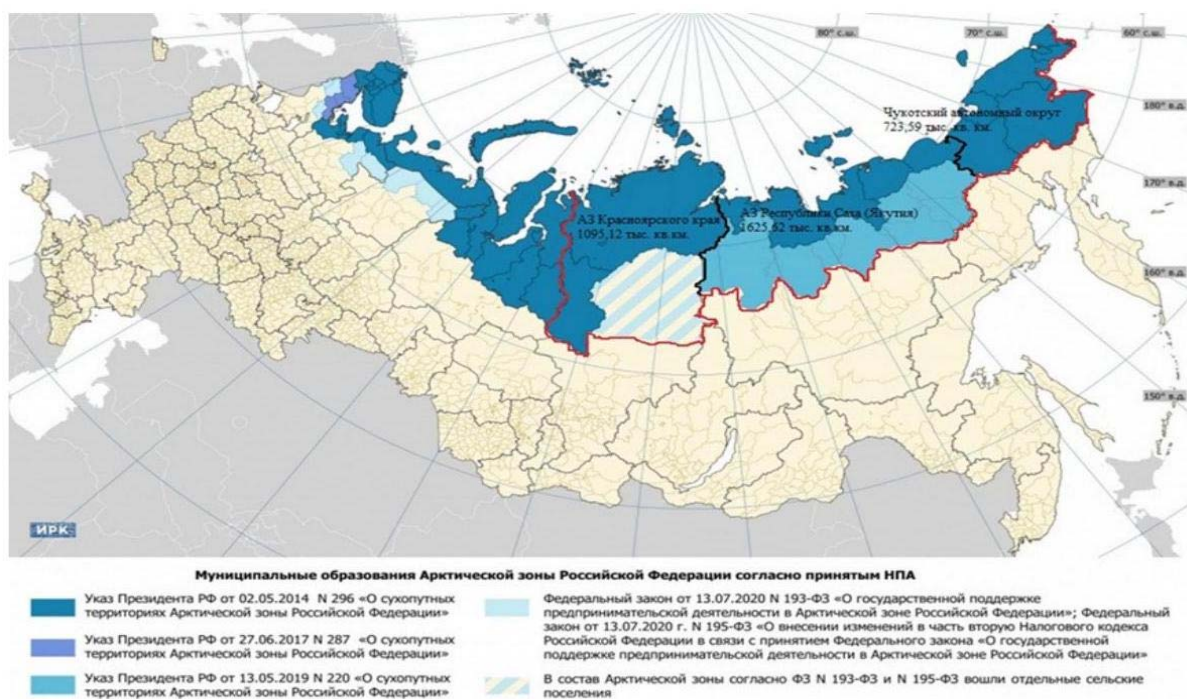


Рис. 1. Структура Арктической зоны Российской Федерации
Fig. 1. Structure of the Arctic zone of the Russian Federation

пользования автозимников, морских и речных путей требует создания долгосрочных запасов грузов в местах стыковки этих видов транспорта, что приводит к увеличению стоимости доставки и снижению качества доставляемого груза. В периоды отсутствия других альтернативных вариантов доставки срочные грузы, медикаменты и социально значимые скоропортящиеся грузы, такие как молочные продукты с ограниченным сроком годности, яйца, фрукты, некоторые овощи, в арктические районы доставляются воздушным транспортом (ВТ), что существенно повышает их стоимость. К таким периодам преимущественно относится межсезонье (с конца апреля по конец мая – начало июня и с середины октября по конец декабря).

4. Сложные долгосрочные (до 365–400 дней) мультимодальные схемы доставки топлива увеличивают его стоимость и затрудняют планирование поставок.

В условиях отсутствия достаточной наземной транспортной связанности арктических территорий возникают сложности нормального жизнеобеспечения этих регионов.

Под жизнеобеспечением понимается выполнение транспортной системой четырех основных функций: экономической, социальной, геополитической и экологической. В настоящее время в арктических регионах часть этих функций выполняется воздушным транспортом, однако высокая стоимость его эксплуатации и недостаточность наземной инфраструктуры (действующих аэродромов и посадочных полос) приводит к ограничению объема выполняемых функций. Крайне высокая стоимость эксплуатации воздушного транспорта в регионах АЗ обусловлена отсутствием достаточного количества мест базирования легких многоцелевых самолетов, низкой интенсивностью совершаемых полетов, высокими удельными затратами на содержание аэропортовой сети и поддержание летной годности воздушных судов, высокими затратами на доставку авиационного топлива [1]. Решением данной проблемы может стать встраивание беспилотных авиационных систем (БАС) в существующую транспортную структуру АЗ РФ. С этой целью необходимо определить весь спектр основных функций, которые на этих территориях могут

эффективно выполняться БАС с учетом всех действующих ограничений.

Вышеупомянутые обстоятельства определяют обширный набор требований (в ряде случаев противоречивых) к организации авиасообщения и контроля за ситуацией с лесными пожарами. Говоря о развитии транспортной системы, приходится иметь в виду вопросы встраивания авиационной компоненты в более общую структуру. Ситуация с лесными пожарами требует своевременного их обнаружения и оперативной реакции. Вполне естественными являются соображения, относящиеся к оптимизации; возникает вопрос о математических моделях, которые могут использоваться в столь общих практических задачах. В настоящем исследовании мы рассматриваем лишь некоторые вопросы, связанные с применением математических методов. Рассматриваемые математические постановки относятся к модельным задачам, в которых будут, однако, отражены некоторые направления в дискретной оптимизации.

Прежде всего представляется, что в применяемых методах должны присутствовать (в первом случае) направление, связанное с распределением заданий между участниками воздушного движения, и (во втором случае) направление, связанное с оптимизацией последовательности выполнения заданий этими участниками в пределах выделенных им систем заданий. В отмеченном (втором) случае имеются в виду задачи маршрутизации. В своей совокупности здесь реализуются маршрутно-распределительные задачи, которые вполне обоснованно относятся к категории труднорешаемых [2]. Таковыми являются и «составляющие» компоненты: задача разбиения и задачи, обобщающие известную задачу коммивояжера (ЗК). Мы сосредоточимся здесь на проблеме маршрутизации (вопросам, связанным с распределением заданий, посвящены работы [3, 4, часть 5]. В частности, в [4, часть 5] построен общий метод решения на основе динамического программирования и указана его реализация в задаче нескольких курьеров. Будем при этом различать постановки, ориентированные на транспортные задачи, и постановки, отвечающие идейно задачам авиа-

пожарного патрулирования; в первом случае потребуются рассмотрение минимаксной постановки, применяемой в задаче маршрутизации на узкие места, а во втором будет рассматриваться схема решения задачи с аддитивным критерием. Итак, в первом случае мы ориентируемся на вопрос о разрешимости транспортной задачи (при соблюдении ограничений предшествования), а во втором стремимся к осуществлению большей оперативности в реализации мониторинга лесных массивов.

В связи с решением ЗК отметим работы [5–9]. Важный вариант ЗК представляет задача курьера [5], в которой присутствуют ограничения предшествования, которые в [4, раздел 4.9] были использованы в положительном направлении для снижения сложности вычислений при реализации динамического программирования (ДП). Мы рассмотрим данный вариант ДП [10, 11] в сочетании со специальной конструкцией на основе декомпозиции для двух вариантов агрегирования затрат: аддитивного и варианта, отвечающего минимаксной постановке; такой подход позволяет в случае «двухкластерной» (в смысле декомпозиции) задачи находить композиционный экстремум за вполне приемлемое время. Мы рассматриваем его применение в модельных задачах, ориентированных на проблемы в малой авиации, как первый шаг в построении методов и алгоритмов решения упомянутых в первой части введения весьма конкретных задач, представляющих интерес для организации работы воздушного транспорта в АЗ и для кардинального улучшения в организации мониторинга лесных пожаров.

В первой части статьи в качестве модельной задачи рассматривается простейший пример маршрутизации движения БАС при выполнении авиапожарного патрулирования на заданной плоскости X : $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Точками на плоскости являются аэродромы либо вертолетные площадки, с которых возможно осуществить взлет БАС. Мегаполисы представляют собой конечные подмножества (п/м) лесных массивов, которые подле-

жат мониторингу. При этом предполагается, что каждый из мегаполисов достаточен с точки зрения возможностей наблюдения бортовыми средствами для однозначного ответа на вопрос, есть ли возгорание в данном лесу или нет. Основной задачей является смоделировать маршрутизацию движения БАС, которая позволит скорейшим образом посетить все города мегаполиса, то есть, по существу, решить внутреннюю 3К. Пункты прибытия и отправления (для данного мегаполиса) могут выбираться произвольно, а оставшиеся города должны посещаться последовательно. Внешние перемещения оцениваются временами соответствующих перелетов. Условия предшествования определяются приоритетностью посещения наиболее пожароопасных районов, направлением ветра и другими факторами, действующими в данной местности. Размерность модельной задачи достаточно высока, что требует продолжительного времени счета.

1. Обсуждение математической модели

Мы используем модель мегаполисов (непустых конечных множеств), которые должны посещаться некоторым транспортным средством (ТС) с целью выполнения при упомянутых посещениях работ, именуемых внутренними. Полагаем при этом, что у нас имеются ограничения предшествования (условия типа «одно после другого»). Оцениваются внешние перемещения (между мегаполисами, из точки старта к мегаполисам), внутренние работы и терминальное состояние. Значения функций стоимости (ФС) могут агрегироваться по-разному: аддитивно либо стоимостью наиболее затратного этапа перемещений.

Итак, следуя [4, 10, 11], фиксируем непустое множество X , конечное непустое его подмножество X^0 возможных точек старта, мегаполисы M_1, \dots, M_n , где n – натуральное число, $n \geq 2$, а также отношения [12, гл. 2] M_1, \dots, M_n , связанные (с мегаполисами) условиями $M_j \subset M_j \times M_j$ для каждого $j, 1 \leq j \leq n$;

элементами каждого отношения M_j являются упорядоченные пары (у/п) (x, y) , где x – пункт прибытия в мегаполис M_j , а y – пункт отправления (из M_j). Оценка внутренних работ, связанных с посещением M_j , зависит от (x, y) . Мы допускаем к рассмотрению ФС, включающие зависимость от списка заданий (удобно использовать список заданий, не выполненных на текущий момент, но к этому варианту легко сводится и зависимость от списка уже выполненных заданий). Для более точного описания рассматриваемых задач потребуется формализация, которая, в свою очередь, будет использовать целый ряд общематематических понятий. Этим вопросам посвящается следующий раздел.

2. Общие сведения

В настоящем разделе будут введены общематематические понятия и некоторые общие обозначения, включая нужные элементы теории множеств. Мы используем стандартную теоретико-множественную символику, включая кванторы и пропозициональные связи; далее через \emptyset обозначаем пустое множество, \triangleq – равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Впрочем, используя кванторы, мы имеем в виду просто замену слов: \forall заменяет выражение «для любого», \exists заменяет слово «существует». Выражение $\{x \in A \mid \dots\}$, где A – множество, обозначает множество всех $x \in A$ со свойством ... (вместо x может использоваться произвольная буква). Если A и B – высказывания, то $A \Rightarrow B$ заменяет здесь фразу «если истинно A , то непременно истинно B ». Если же C и D – высказывания, то $(C \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} D) \Leftrightarrow ((C \Rightarrow D) \& (D \Rightarrow C))$, где $\&$ – связка «и»; кроме того, \vee используем вместо слова «или». Такие упрощенные толкования в дальнейших построениях вполне соответствуют [12]. Семейством называем множество, все элементы которого – множества; итак, семейство суть множество множеств. Если x и y – какие-либо объекты, то через

$\{x; y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару, то есть (единственное) множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда всякому объекту m в виде $\{m\} \triangleq \{m; m\}$ сопоставляется синглетон (одноэлементное множество) со свойством $m \in \{m\}$. Множества являются объектами, а тогда [12, с. 67] для любых двух объектов p и q в виде $(p, q) \triangleq \{\{p\}; \{p; q\}\}$ имеем упорядоченную пару (у/п) с первым элементом p и вторым элементом q . Если же h – любая у/п, то через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы данной у/п h , однозначно определяемые равенством $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$. Если x, y и z – три объекта, то $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$ есть (упорядоченный) триплет с первым элементом x , вторым элементом y и третьим элементом z . Для двух любых множеств A и B в виде $A \times B$ имеем их декартово произведение, то есть единственное множество со свойствами: 1) $(a, b) \in A \times B$ при $a \in A$ и $b \in B$; 2) если $z \in A \times B$, то $z = (\alpha, \beta)$ для некоторых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$. Если же A, B и C – три множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$ [13, с. 17].

Если H – множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества H (здесь, как обычно [13, с. 17], п/м H есть множество, содержащееся в H); через $\text{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м H , $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$. Для двух любых непустых множеств A и B через B^A обозначаем [13, гл. II] множество всех функций, действующих из A в B ; при $f \in B^A$ (это то же самое, что $f: A \rightarrow B$) и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a . Далее будем использовать понятие образа множества: если A и B – непустые множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \triangleq \{f(x): x \in C\} \in \mathcal{P}(B) \quad (2.1)$$

есть образ C при действии f ; $f^1(C) \neq \emptyset$ при $C \neq \emptyset$. Используем обычные соглашения для значений функций нескольких переменных. Так, в частности, для непустых множеств A, B и C , функции $g \in C^{A \times B}$ и точек $a \in A$ и

$b \in B$, как обычно, $g(a, b) \triangleq g((a, b)) \in C$ есть значение g в точке $(a, b) \in A \times B$. Если же A, B, C и D – непустые множества, $h \in D^{A \times B \times C}$, $\mu \in A \times B$ и $v \in C$, то с учетом определения $A \times B \times C$ получаем значение $h(\mu, v) = h(\mu_1, \mu_2, v) \in D$, где $\mu_1 \triangleq \text{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \triangleq \text{pr}_2(\mu)$.

Пусть $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ (\mathbb{R} – вещественная прямая), $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+)$. При $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$ рассматриваем дискретный интервал (ДИ) $\overline{p, q} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid (p \leq k) \& (k \leq q)\}$. Тогда $\overline{1, 0} = \emptyset$ и $\overline{1, m} = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Если $K \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$ и $s \in \mathbb{N}$, то $K \oplus s \triangleq \{k + s: k \in K\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$, если сдвиг на s (непустого) множества K . Непустому конечному множеству K сопоставляется его мощность $|K| \in \mathbb{N}$ и непустое множество (би) $[K]$ всех биекций ДИ $\overline{1, |K|}$ на K [14, с. 87]. Перестановка непустого множества S есть [14, с. 87] биекция S на себя; перестановке α данного множества S сопоставляется перестановка α^{-1} этого множества, обратная к α , со свойством $\alpha^{-1}(\alpha(s)) = \alpha(\alpha^{-1}(s)) = s \forall s \in S$. Разумеется, при $m \in \mathbb{N}$ в виде (би) $[\overline{1, m}]$ имеем множество всех перестановок ДИ $\overline{1, m}$ (в самом деле, $|\overline{1, m}| = m$). Полагаем также $|\emptyset| \triangleq 0$. Кортажами называем функции, определенные на непустых п/м \mathbb{N}_0 . Используем индексную форму записи функций [15, с. 11], семейство с индексом). Если H – непустое множество, то $\mathcal{R}_+[H] \triangleq (\mathbb{R}_+)^H$ (множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на H). Отношением называем п/м декартова произведения двух множеств.

3. Элементы математической постановки задачи 1

Вернемся к разделу 1, используя, однако, понятия и обозначения, введенные в предыдущем разделе. Итак (см. раздел 1), далее, X – непустое множество и $X^0 \in \text{Fin}(X)$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и при этом $4 \leq \mathbf{n}$ (случаи, когда $\mathbf{n} < 4$, не представляют интереса, и мы их не обсужда-

ем, хотя и они могут быть «охвачены» постановочной частью без применения декомпозиции); фиксируем мегаполисы

$$M_1 \in \text{Fin}(X), \dots, M_n \in \text{Fin}(X), \quad (3.1)$$

получая семейство $\mathcal{M} \triangleq \{M_i: i \in \overline{1, n}\}$; относительно (3.1) полагаем, что

$$(M_j \cap X^0 = \emptyset \forall j \in \overline{1, n}) \& (M_p \cap M_q = \emptyset \forall p \in \overline{1, n} \forall q \in \overline{1, n} \setminus \{p\}). \quad (3.2)$$

(Итак, мегаполисы (3.1) попарно дизъюнкты и не содержат точек из X^0 .) Полагаем, что точки X^0 , и только они могут ис-

пользоваться в качестве стартовых для нашего ТС. Фиксируем также отношения

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \dots, \mathbb{M}_n \in \mathcal{P}'(M_n \times M_n), \quad (3.3)$$

элементы которых (а это у/п) соответствуют всякий раз объединению в у/п пункта прибытия в мегаполис и пункта отправления из него. Вообще говоря, возможна ситуация, когда $\mathbb{M}_j \neq M_j \times M_j$, то есть упомянутые пункты, входят в (3.3) именно «отмеченными» парами. Как уже говорилось, все мегаполисы (3.1) должны посещаться (с выполнением внутренних работ) при старте из X^0 . В [13–18] и в ряде других работ приведена процедура построения оптимального решения на основе ДП, восходящая к [4, §4.9]. Эта процедура приме-

нима и к задачам маршрутизации раздела 1; структура оптимального решения ясна. Возникают, однако, существенные затруднения на этапе вычислительной реализации. В связи с этим мы, ориентируясь на «диапазонные» (в смысле размерности) задачи управления ТС, сразу обратимся к построениям [10, 11], в которых ДП сочеталось с декомпозицией основной \mathcal{M} -задачи путем введения двух кластеров \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , реализующих разбиение \mathcal{M} . Итак, при $N \in \overline{2, n-2}$ вводим (частичные) семейства

$$\mathcal{M}_1 \triangleq \{M_i: i \in \overline{1, N}\}, \mathcal{M}_2 \triangleq \{M_i: i \in \overline{N+1, n}\}, \quad (3.4)$$

для которых (см. (3.1), (3.2)) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$. Полагаем далее, что сначала решается задача обслуживания мегаполисов из \mathcal{M}_1 и только после этого можно приступать к обслуживанию \mathcal{M}_2 . Процедуры ДП будут при этом локализованы в возникающих на основе (3.4) предваряющей \mathcal{M}_1 -задаче и финальной \mathcal{M}_2 -задаче; итак, рассматривается раздельное применение ДП в частичных задачах.

Замечание 1

В связи с (3.4) отметим, что N выбирается, как правило, с учетом возможностей в части вычислительной реализации (грубо говоря, ДИ $\overline{1, n}$ следует разбить пополам). В ряде прикладных задач, не связанных с малой авиацией, возникают обстоятельства, требу-

ющие выделить часть заданий из общей \mathcal{M} -задачи в число первоочередных; на этой основе может формироваться семейство \mathcal{M}_1 . Здесь мы отметим задачу управления инструментом при фигурной листовой резке деталей на машинах с ЧПУ, в которой (случай термической резки) в число первоочередных включаются так называемые длинномерные детали [19, 20, § 1.3.3]. Если подобное выделение первоочередных заданий затруднительно, для целей кластеризации может применяться подход [21], связанный с применением для построения \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 жадной эвристики. В [10] построен алгоритм для решения задачи маршрутизации с элементами декомпозиции в ситуации, когда кластеров может быть больше двух, но в настоящей работе мы его не обсуждаем и ограничиваемся случаем двухкластерной (3.4) задачи.

Полагаем, что в предваряющей и финальной задачах имеются условия предшествования (эти условия могут задаваться изначально, а могут [21] конструироваться на основе

ограничений предшествования основной \mathcal{M} -задачи). Для их введения фиксируем множества

$$\mathbf{K}_1 \in \mathcal{P}(\overline{1, N} \times \overline{1, N}), \mathbf{K}_2 \in \mathcal{P}(\overline{1, \mathbf{n} - N} \times \overline{1, \mathbf{n} - N}), \quad (3.5)$$

у/п – элементы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 (3.5) – называем адресными; у каждой адресной пары первый элемент называем отправителем, а второй – получателем. В связи с условиями предшествования напомним о задаче курьера в [5].

Замечание 2

В связи с задачами малой авиации отметим один возможный вариант условий предшествования, ориентируясь на случай \mathcal{M}_2 -задачи. Итак, мы полагаем, что обсуждается вопрос о перевозке с использованием ТС пассажиров между городами (для простоты) $m^{(1)}, \dots, m^{(\mathbf{n}-N)}$; при этом полагаем в данном замечании, что $M_j = \{m^{(j-N)}\}$ при $j \in \overline{N+1, \mathbf{n}}$.

Кроме того, в некоторых городах в ТС размещаются грузы с заданными адресами доставки (также в виде упомянутых городов). Итак, в целях доставки пассажиров ТС должно посетить все города, но есть еще план директивных грузоперевозок с заданными адресными парами индексов городов. Аналогичная ситуация складывается в \mathcal{M}_1 -задаче. Мы ограничиваемся сейчас случаем, когда условия предшествования сразу разделены по частичным задачам. В связи с противоположным случаем условий предшествования в \mathcal{M} -задаче и построением на их основе частичных ограничений предшествования отметим конструкцию [21].

Следуя [4, часть 2], условимся, что всюду в дальнейшем

$$\begin{aligned} (\forall \mathbf{K}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_1)) \exists z^0 \in \mathbf{K}^0: \text{pr}_1(z^0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}^0, \\ (\forall \check{\mathbf{K}}^0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}_2)) \exists \check{z}^0 \in \check{\mathbf{K}}^0: \text{pr}_1(\check{z}^0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \check{\mathbf{K}}^0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условия (3.6) исключают заикливание маршрутов, допустимых по предшествованию в частичных задачах. Данные маршруты

(перестановки индексов заданий) при $\mathbb{P}_1 \triangleq$ (bi) $[\overline{1, N}]$ и $\mathbb{P}_2 \triangleq$ (bi) $[\overline{1, \mathbf{n} - N}]$ составляют следующие два множества:

$$\mathcal{A}_1 \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P}_1 \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}_1\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_1), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{A}_2 \triangleq \{\beta \in \mathbb{P}_2 \mid \beta^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \beta^{-1}(\text{pr}_2(z)) \forall z \in \mathbf{K}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}_2). \quad (3.8)$$

Из (3.7), (3.8) следует, что допустимость каждого частичного маршрута сводится к требованию: для каждой адресной пары соответствующей задачи мегаполис с индексом отправителя посещается раньше, чем мегаполис с индексом получателя. Если \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 в (3.5) определены исходя из планов грузопе-

ревозок, то (3.7) и (3.8) означают, следовательно, выполнение всех упомянутых планов данных ТС для маршрутов, составляющих эти множества, и только для них. Возвращаясь к основной задаче, вводим склеивание произвольных маршрутов из \mathbb{P}_1 и \mathbb{P}_2 : при $\mathbb{P} \triangleq$ (bi) $[\overline{1, \mathbf{n}}]$ имеем, что $\forall \alpha \in \mathbb{P}_1 \forall \beta \in \mathbb{P}_2$

$$\alpha \diamond \beta \in \mathbb{P}: ((\alpha \diamond \beta)(t) \triangleq \alpha(t) \forall t \in \overline{1, N}) \& ((\alpha \diamond \beta)(t) \triangleq \beta(t - N) + N \forall t \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}); \quad (3.9)$$

сам маршрут $\alpha \diamond \beta$ (3.9) условимся называть композиционным. Из (3.9) следует, что маршрут $\gamma = \alpha \diamond \beta$ обязывает к посещению мегаполисов из \mathcal{M}_1 в очередности $M_{\alpha(1)}, \dots, M_{\alpha(N)}$,

$$\mathbf{P} \triangleq \{\text{pr}_1(z) \diamond \text{pr}_2(z) : z \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} = \{\alpha \diamond \beta : \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}) \quad (3.10)$$

имеем (непустое) множество всех допустимых композиционных маршрутов основной \mathcal{M} -задачи. Вообще же, выбор маршрута (перестановки множества $\overline{1, n}$) определяет для ТС лишь «укрупненный план» обслуживания \mathcal{M} . Требуется еще, при всяком выборе маршрута, детализировать конкретные варианты

$$\mathcal{Z}_\gamma[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z} \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_t \in \mathbb{M}_{\gamma(\tau)} \forall \tau \in \overline{1, n})\} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}) \quad (3.11)$$

имеем множество всех траекторий посещения (занумерованных) отношений $\mathbb{M}_{\gamma(1)}, \dots, \mathbb{M}_{\gamma(n)}$, связанных с мегаполисами, и стартом в x .

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \mathbf{P} \times \mathcal{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathcal{Z}) \quad (3.12)$$

всех композиционных допустимых решений (ДР) со стартом в x , имея в виду уже и выбор маршрута, и выбор траектории, согласован-

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{P} \times \mathcal{Z} \times X^0 \mid (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{P} \times \mathcal{Z} \times X^0) \quad (3.13)$$

есть множество всех возможных (для исследователя) вариантов поведения в условиях декомпозиции, называемых далее компози-

$$\tilde{\mathbb{D}}[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \mathbb{P} \times \mathcal{Z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]\} \in \text{Fin}(\mathbb{P} \times \mathcal{Z}). \quad (3.14)$$

Кроме того, введем в рассмотрение

$$\mathbb{D} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{P} \times \mathcal{Z} \times X^0 \mid (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]\} \in \text{Fin}(\mathbb{P} \times \mathcal{Z} \times X^0), \quad (3.15)$$

получая объемлющую совокупность МП (мы в (3.14), (3.15) рассматриваем не только композиционные решения). Тогда, поскольку (см. (3.10)) $\mathbf{P} \subset \mathbb{P}$, имеем при $x \in X^0$, что $\tilde{\mathbf{D}}[x] \subset \tilde{\mathbb{D}}[x]$. Как следствие (см. (3.13), (3.15)), $\mathbf{D} \subset \mathbb{D}$. Итак, в виде (3.15) имеем объемлющее множество всех МП. По этой при-

а затем к посещению мегаполисов из \mathcal{M}_2 в очередности $M_{\beta(1)+N}, \dots, M_{\beta(n-N)+N}$; итак, сначала «работает» α , а затем β . В виде

такого обслуживания – указать варианты посещения занумерованных мегаполисов, то есть задать траектории.

Пусть $\mathcal{Z} \triangleq (X \times X)^{\overline{0, n}}$ (множество всех кортежей (z_0, z_1, \dots, z_n) в $X \times X$); тогда при $x \in X^0$ и $\gamma \in \mathbb{P}$ в виде

Нас в первую очередь интересует случай $\gamma \in \mathbf{P}$. В этой связи при $x \in X^0$ введем в рассмотрение множество

ной с маршрутом по правилу (3.11). Наконец, мы допускаем и произвольный выбор старта из X^0 , а потому

ционными маршрутными процессами (МП). Наряду с (3.12), (3.13) для оценочных целей полезно ввести при $x \in X^0$

чине, снимая ограничения предшествования и требования предваряющего обслуживания мегаполисов из \mathcal{M}_1 , мы потенциально можем достигать лучших результатов и, как следствие, получать нижние оценки; однако существенное увеличение размерности за счет привлечения МП из $\mathbb{D} \setminus \mathbf{D}$ приводит обычно

к резкому усложнению вычислительной реализации. Далее, мы отметим, что при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$\left(\mathfrak{M}_j \triangleq \{pr_1(z): z \in M_j\} \in \mathcal{P}'(M_j) \right) \& \left(\mathbf{M}_j \triangleq \{pr_2(z): z \in M_j\} \in \mathcal{P}'(M_j) \right). \quad (3.16)$$

С помощью (3.16) мы конструируем конечные множества, призванные заменить (потенциально бесконечное) множество X на этапе математической постановки с приведением последней к задаче дискретной оптимизации:

$$\left(\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left(\mathfrak{X} \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X) \right) \& \left(\mathbf{X} \triangleq \left(\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{M}_i \right) \cup X^0 \in \text{Fin}(X) \right). \quad (3.17)$$

В виде $\mathfrak{N} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n}})$ (семейство всех непустых п/м ДИ $\overline{1, \mathbf{n}}$) имеем семейство множеств, именуемых далее списками (заданий). Фиксируем ФС

$$\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{N}], c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_1 \times \mathfrak{N}], \dots, c_{\mathbf{n}} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}], f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}]; \quad (3.18)$$

здесь значения c оценивают внешние перемещения (между мегаполисами, из точек X^0 к мегаполисам), значения $c_1, \dots, c_{\mathbf{n}}$ – внутренние работы при посещении мегаполисов, а значения f – терминальное состояние траектории. При этом (см. раздел 2) в (3.18) все ФС суть неотрицательные вещественнозначные (в/з) функции. Заметим, что в (3.18) допускается использование ФС с зависимостью от списка заданий (далее используется всякий раз список заданий, не выполненных «на текущий момент»). В исследованиях, связанных с другими прикладными задачами [18, 20, 21] и др., это позволило охватить единой постановкой целый

ряд практически интересных обстоятельств [20, § 1.3.3]. В настоящем исследовании мы сохраняем упомянутые общие определения, имея целью в дальнейшем отразить на уровне постановки те или иные соображения, связанные с применением ТС (например, можно иметь в виду возможность прогнозирования загрузки ТС по мере полета). В простейшем случае ФС в (3.18) можно определить посредством евклидовых расстояний на плоскости, что и будет отражено в модельных примерах.

В дальнейшем рассматриваются два варианта агрегирования затрат: при $x \in X^0$, $\gamma \in \mathbb{P}$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{Z}_\gamma[x]$ имеем

$$\mathcal{C}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}} \left[\mathbf{c} \left(pr_2(z_{t-1}), pr_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}) \right) + c_{\gamma(t)} \left(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}) \right) \right] + f(pr_2(z_{\mathbf{n}})) \in \mathbb{R}_+, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{B}_\gamma[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}}}] \triangleq \\ & \triangleq \sup \left(\left\{ \max_{t \in \overline{1, \mathbf{n}}} \left[\mathbf{c} \left(pr_2(z_{t-1}), pr_1(z_t), \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}) \right) + c_{\gamma(t)} \left(z_t, \gamma^1(\overline{t, \mathbf{n}}) \right) \right]; f(pr_2(z_{\mathbf{n}})) \right\} \right) \in \mathbb{R}_+, \quad (3.20) \end{aligned}$$

где (см. раздел 2) $\gamma^1(\overline{\tau, \mathbf{n}}) = \{\gamma(k): k \in \overline{\tau, \mathbf{n}}\}$ есть образ ДИ $\overline{\tau, \mathbf{n}}$, $\tau \in \overline{1, \mathbf{n}}$, при действии перестановки γ . На основе (3.19) определяется аддитивный критерий, а посредством (3.20) – критерий в минимаксной задаче. Напомним, что обозначение \sup используется при рассмотрении (точной) верхней грани числового (непустого мажорируемого) множества [13,

разд. 2.3]; однако для любых двух чисел a и b в виде $\sup(\{a; b\})$ реализуется наибольшее из них, что и соответствует (3.20). Здесь же заметим, что (3.19) и (3.20) определены в случае $\gamma \in \mathbf{P}$; в этом случае (3.19), (3.20) могут использоваться (см. (3.12)) при построении композиционных решений. В то же время в силу (3.14) значения (3.19), (3.20) определены

при $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, n}}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]$, то есть в задаче, где не используется декомпозиция и нет условий предшествования. Мы, однако, сосредоточимся на более реализуемом варианте постановок, где декомпозиция, приводящая к двухкластерной задаче, и ограничения предше-

ствования в частичных задачах имеются и используются в интересах снижения сложности вычислений.

Задача с аддитивным критерием. Учитывая (3.19), при $x \in X^0$ рассматриваем (\mathcal{M}, x) -задачу:

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x], \quad (3.21)$$

которой сопоставляются экстремум $\tilde{V}[x]$ и непустое экстремальное множество (sol) $[x]$:

$$\tilde{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.22)$$

$$(\text{sol})[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{V}[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbf{D}}[x]). \quad (3.23)$$

В связи с основной \mathcal{M} -задачей отметим, что (3.19) определено при $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, n}}, x) \in \mathbf{D}$.

Упомянутую основную задачу определяем в виде

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}, \quad (3.24)$$

которой сопоставляется (композиционный) экстремум \mathbb{V} и непустое множество SOL всех оптимальных композиционных МП:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \min_{x \in X^0} \tilde{V}[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.25)$$

$$\text{SOL} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D} \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}). \quad (3.26)$$

Мы рассматриваем также задачу оптимизации старта (учитываем (3.25))

$$\tilde{V}[x] \rightarrow \min, x \in X^0, \quad (3.27)$$

которой сопоставляется экстремум \mathbb{V} (см. (3.25)) и непустое экстремальное множество

$$X_{\text{opt}}^0 \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{V}[x] = \mathbb{V}\} \in \mathcal{P}'(X^0). \quad (3.28)$$

Задача (3.27) по смыслу является вспомогательной. В то же время при $x \in X^0$ значение

(3.19) определено при $(\gamma, (z_t)_{t \in \overline{0, n}}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]$, а потому мы получаем (оценочную) задачу

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x], \quad (3.29)$$

которой, подобно (3.22), (3.23), сопоставляются

$$\tilde{V}_0[x] \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.30)$$

$$(\text{sol})_0[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{V}_0[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbb{D}}[x]). \quad (3.31)$$

Ясно, что $V_0[x] \leq \tilde{V}[x] \forall x \in X^0$. При этом (см. (3.15)) значение (3.19) определено для

$(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}$. Тогда имеем (оценочную по отношению к основной) задачу

$$\mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}, \quad (3.32)$$

которой, подобно (3.25) и (3.26), сопоставляются

$$V_0 \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}} \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = \min_{x \in X^0} V_0[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.33)$$

$$\text{SOL} \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{C}_\gamma[\mathbf{z}] = V_0\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}). \quad (3.34)$$

С учетом (3.25) и (3.33) получаем неравенство

$$V_0 \leq V. \quad (3.35)$$

Итак, получаем нижнюю оценку композиционного экстремума.

Минимаксная постановка

В данном случае используем критерий, определяемый в (3.20). Как и в аддитивном случае, сначала рассматриваем при $x \in X^0$ задачу с фиксированным стартом x :

$$\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]; \quad (3.36)$$

задаче (3.36) сопоставляется экстремум $\tilde{\mathcal{V}}[x]$ и непустое экстремальное множество $\langle \text{sol} \rangle[x]$:

$$\tilde{\mathcal{V}}[x] \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.37)$$

$$\langle \text{sol} \rangle[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x] \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbb{D}}[x]); \quad (3.38)$$

мы получаем минимаксную (\mathcal{M}, x) -задачу. Отметим, что (3.20) определено в случае $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}$. С учетом этого получаем следующую задачу:

$$\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D} \quad (3.39)$$

(оптимизации в классе МП), для которой определены экстремум \mathcal{V}^0 и непустое экстремальное множество SOL^0 :

$$\mathcal{V}^0 \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \min_{x \in X^0} \tilde{\mathcal{V}}[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.40)$$

$$\text{SOL}^0 \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathcal{V}^0\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}). \quad (3.41)$$

В (3.39)–(3.41) говорится об оптимизации в классе композиционных МП. Как и в случае аддитивной задачи (см. (3.24)), вводим задачу оптимизации старта:

$$\tilde{\mathcal{V}}[x] \rightarrow \min, x \in X^0. \quad (3.42)$$

Задаче (3.42) соответствует экстремум \mathcal{V}^0 (см. (3.40)) и экстремальное множество

$$\tilde{X}_{\text{opt}}^0 \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{\mathcal{V}}[x] = \mathcal{V}^0\} \in \mathcal{P}'(X^0). \quad (3.43)$$

Далее, отметим, что значение (3.20) определено при $x \in X^0$ и $(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]$. Мы получаем при $x \in X^0$ (оценочную) задачу

$$\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]; \quad (3.44)$$

задаче (3.44) сопоставляется экстремум $\mathcal{V}[x]$ и непустое экстремальное множество $\langle \text{sol} \rangle^0[x]$:

$$\mathcal{V}[x] \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x]} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.45)$$

$$\langle \text{sol} \rangle^0[x] \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbb{D}}[x] \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathcal{V}[x]\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\mathbb{D}}[x]). \quad (3.46)$$

Наконец, (3.20) определено и при $(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}$. Приходим к задаче оптимизации МП

$$\mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}, \quad (3.47)$$

которой сопоставляются экстремум \mathfrak{B} и непустое экстремальное множество SOL^0 :

$$\mathfrak{B} \triangleq \min_{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D}} \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+, \quad (3.48)$$

$$\text{SOL}^0 \triangleq \{(\gamma, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{D} \mid \mathfrak{B}_\gamma[\mathbf{z}] = \mathfrak{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{D}). \quad (3.49)$$

Заметим, что (см. (3.37), (3.45)) имеют место неравенства

$$\mathcal{V}[x] \leq \tilde{\mathcal{V}}[x] \forall x \in X^0. \quad (3.50)$$

Кроме того, с учетом (3.40) и (3.48) реализуется неравенство

$$\mathfrak{B} \leq \mathcal{V}^0. \quad (3.51)$$

Мы можем, конечно, рассматривать (3.35) и (3.51) как верхние оценки экстремумов (3.33) и (3.48) соответственно; данные экстремумы могут быть недоступны для непосредственного вычисления, в то время как (3.25) и (3.40) можно [10, 11] (для диапазоновых в смысле размерности задач) найти за вполне приемлемое время.

4. Элементы математической постановки задачи 2

Итак, мы в качестве основных рассматриваем задачи (3.24) и (3.39), которые также представляются весьма сложными, но допускающими теоретическое исследование и построение оптимальных алгоритмов решения. В этом построении главным является специальная связка предваряющей и финальной задач. К постановкам этих двух задач мы

$$\mathcal{Z}_\beta^*[x] \triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}^* \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_t \in \mathbb{M}^{(\beta(t))} \forall t \in \overline{1, n-N})\} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}^*) \quad (4.4)$$

есть пучок траекторий \mathcal{M}_2 -задачи, стартующих из x и согласованных с маршрутом β . Тогда при $x \in X^{00}$ в виде

$$\mathbf{D}^*[x] \triangleq \{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}_2 \times \mathcal{Z}^* \mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\beta^*[x]\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_2 \times \mathcal{Z}^*) \quad (4.5)$$

имеем множество всех допустимых решений (ДР) \mathcal{M}_2 -задачи со стартом в x .

Аналогичные построения осуществляем и для \mathcal{M}_1 -задачи, где в качестве множества точек старта используется X^0 . Полагаем, что множество допустимых по предшествованию маршрутов в данной задаче есть \mathcal{A}_1 . Перехо-

сейчас и переходим, учитывая (3.4)–(3.8). Начнем с построения множества точек старта финальной \mathcal{M}_2 -задачи, полагая сначала $\tilde{\mathbf{K}}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_1\}$ и получая в виде $\overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1 \in \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ множество всех неотправителей предваряющей задачи. Тогда

$$X^{00} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1} \mathbf{M}_i \in \text{Fin}(\mathbf{X}) \quad (4.1)$$

рассматриваем далее в качестве множества всех возможных точек старта \mathcal{M}_2 -задачи. Далее, при $j \in \overline{1, n-N}$ полагаем, что

$$\begin{aligned} M^{(j)} &\triangleq M_{N+j}, \mathbb{M}^{(j)} \triangleq \mathbb{M}_{N+j}, \mathfrak{M}^{(j)} \triangleq \\ &\triangleq \mathfrak{M}_{N+j}, \mathbf{M}^{(j)} \triangleq \mathbf{M}_{N+j}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

получая (в (4.2)) непустые конечные множества. Имеем в силу (3.16), (3.17) и (4.2), что

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{M}^{(j)} = \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathcal{P}'(M^{(j)})) \& \\ &\& (\mathbf{M}^{(j)} = \{\text{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}^{(j)}\} \in \mathcal{P}'(M^{(j)})). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В виде \mathcal{A}_2 реализуется множество всех маршрутов \mathcal{M}_2 -задачи, допустимых по предшествованию. В связи с введением траекторий полагаем $\mathcal{Z}^* \triangleq (X \times X)^{\overline{0, n-N}}$ (множество всех отображений из ДИ $\overline{0, n-N}$ в $X \times X$). Если $x \in X^{00}$ (см. (4.1)) и $\beta \in \mathcal{A}_2$, то

для к определению траекторий, введем $\mathcal{Z}^\natural \triangleq (X \times X)^{\overline{0, N}}$ (множество всех отображений из $\overline{0, N}$ в $X \times X$). При $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathcal{A}_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x] &\triangleq \{(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}^\natural \mid (z_0 = (x, x)) \& \\ &\& (z_\tau \in \mathbb{M}_{\alpha(\tau)} \forall \tau \in \overline{1, N})\} \in \text{Fin}(\mathcal{Z}^\natural) \end{aligned} \quad (4.6)$$

есть пучок траекторий \mathcal{M}_1 -задачи, стартующих из x и согласованных с маршрутом α . При $x \in X^0$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\natural[x] &\triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{Z}^\natural \mid \\ &\mid \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha^\natural[x]\} \in \text{Fin}(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{Z}^\natural) \end{aligned} \quad (4.7)$$

имеем множество всех ДР (\mathcal{M}_1, x) -задачи, то есть \mathcal{M}_1 -задачи со стартом в x . Легко видеть, что [11]

$$\begin{aligned} \text{pr}_2(z_N) \in X^{00} \forall x \in X^0 \forall \alpha \in \\ \in \mathcal{A}_1 \forall (z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^{\natural}[x]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В связи с введением ФС частичных задач отметим, что

$$\begin{aligned} (\mathbb{X}^{\natural} \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{M}_i \in \text{Fin}(X)) \mid, (\mathbf{X}^{\natural} \triangleq (\bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i) \cup X^0 \in \text{Fin}(X)), \\ \mid (\mathbf{M}^{\natural} \triangleq \bigcup_{i=1}^N \mathbf{M}_i \in \text{Fin}(X)) \mid, (\mathbb{X}^* \triangleq \bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathfrak{M}^{(i)} \in \text{Fin}(X)), \\ \mid (\mathbf{X}^* \triangleq (\bigcup_{i=1}^{\mathbf{n}-N} \mathbf{M}^{(i)}) \cup X^{00} \in \text{Fin}(X)); \end{aligned} \quad (4.9)$$

из (3.17) и (4.9) легко следуют вложения $\mathbb{X}^{\natural} \subset \mathbb{X}, \mathbf{X}^{\natural} \subset \mathbf{X}, \mathbb{X}^* \subset \mathbb{X}$ и $\mathbf{X}^* \subset \mathbf{X}$. Кроме того,

при $\mathfrak{N}^{\natural} \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, N})$ и $\mathfrak{N}^* \triangleq \mathcal{P}'(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ имеем с очевидностью, что

$$(\mathfrak{N}^{\natural} \subset \mathfrak{N}) \& (K \oplus N \in \mathfrak{N} \forall K \in \mathfrak{N}^*). \quad (4.10)$$

Итак, \mathfrak{N}^{\natural} и \mathfrak{N}^* суть семейства всех непустых п/м ДИ $\overline{1, N}$ и $\overline{1, \mathbf{n} - N}$ соответственно, именуемых далее (как и множества из \mathfrak{N}) спис-

ками в \mathcal{M}_1 - и \mathcal{M}_2 -задаче соответственно. Теперь определяем ФС \mathcal{M}_1 -задачи

$$\mathbf{c}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^{\natural} \times \mathbb{X}^{\natural} \times \mathfrak{N}^{\natural}], \mathbf{c}_1^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_1 \times \mathfrak{N}^{\natural}], \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{n}}^{\natural} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}_{\mathbf{n}} \times \mathfrak{N}^{\natural}], \mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^{\natural}], \quad (4.11)$$

для которых полагается, что

$$(\mathbf{c}^{\natural}(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \cup \overline{N + 1, \mathbf{n}}) \forall x \in \mathbf{X}^{\natural} \forall y \in \mathbb{X}^{\natural} \forall K \in \mathfrak{N}^{\natural}), \quad (4.12)$$

$$(\mathbf{c}_j^{\natural}(z, K) \triangleq c_j(z, K \cup \overline{N + 1, \mathbf{n}}) \forall j \in \overline{1, N} \forall z \in \mathbf{M}_j \forall K \in \mathfrak{N}^{\natural}); \quad (4.13)$$

\mathbf{f} конкретизируется позднее. Подобно (4.11), (4.12), (4.13), вводим ФС \mathcal{M}_2 -задачи:

$$\mathbf{c}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}^* \times \mathbb{X}^* \times \mathfrak{N}^*], \mathbf{c}_1^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^{(1)} \times \mathfrak{N}^*], \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^{(\mathbf{n}-N)} \times \mathfrak{N}^*] \quad (4.14)$$

определяются следующими правилами:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}^*(x, y, K) \triangleq \mathbf{c}(x, y, K \oplus N) \forall x \in \mathbf{X}^* \forall y \in \mathbb{X}^* \forall K \in \mathfrak{N}^*) \& \\ \& (\mathbf{c}_j^*(z, K) \triangleq c_{j+N}(z, K \oplus N) \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \forall z \in \mathbf{M}^{(j)} \forall K \in \mathfrak{N}^*) \end{aligned} \quad (4.15)$$

мы дополняем набор $(\mathbf{c}^*, \mathbf{c}_1^*, \dots, \mathbf{c}_{\mathbf{n}-N}^*)$ ФС функцией f из (3.18). Итак, и в (4.11), (4.12) и в (4.14), (4.15) мы фактически работаем с «частями» ФС (3.18), а точнее, с несуществен-

ными преобразованиями сужений ФС (3.18). Введем два варианта критерия в частичных задачах. Полагаем при $x \in X^{00}, \beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}} \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[x]$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\beta}^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] \triangleq \sum_{t=1}^{\mathbf{n}-N} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) + \\ + \mathbf{c}_{\beta(t)}^*(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}))] + f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\beta}^*[(z_t)_{t \in \overline{0, \mathbf{n}-N}}] \triangleq \sup \left(\left\{ \max_{t \in \overline{1, \mathbf{n}-N}} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N})) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{c}_{\beta(t)}^*(z_t, \beta^1(\overline{t, \mathbf{n} - N}))]; f(\text{pr}_2(z_{\mathbf{n}-N})) \right\} \right) \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (4.17)$$

итак, (4.16) и (4.17) соответствуют \mathcal{M}_2 -задаче соответственно. Тогда при $x \in X^{00}$ имеем в ее аддитивном и минимаксном варианте следующую аддитивную (\mathcal{M}_2, x)-задачу:

$$\mathfrak{C}_\beta^*[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x], \quad (4.18)$$

которой сопоставляются экстремум

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{C}_\beta^*[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (4.19)$$

и непустое экстремальное множество

$$(\text{sol})^*[x] \triangleq \{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{C}_\beta^*[\mathbf{z}] = \tilde{V}^*[x]\} \in \text{Fin}(\mathbf{D}^*[x]); \quad (4.20)$$

кроме того (при $x \in X^{00}$), имеем минимаксную (\mathcal{M}_2, x)-задачу

$$\mathfrak{B}_\beta^*[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x], \quad (4.21)$$

для которой определены экстремум

$$\tilde{V}^*[x] \triangleq \min_{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x]} \mathfrak{B}_\beta^*[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (4.22)$$

и соответствующее непустое экстремальное множество

$$\langle \text{sol} \rangle^*[x] \triangleq \{(\beta, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^*[x] \mid \mathfrak{B}_\beta^*[\mathbf{z}] = \tilde{V}^*[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^*[x]). \quad (4.23)$$

Заметим, что на данном этапе (решения финальной задачи) определены функции (см. (4.19), (4.22))

$$\begin{aligned} &(\tilde{V}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{V}^*[x])_{x \in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}]) \& \\ &\& (\tilde{\mathcal{V}}^*[\cdot] \triangleq (\tilde{\mathcal{V}}^*[x])_{x \in X^{00}} \in \mathcal{R}_+[X^{00}]), \end{aligned} \quad (4.24)$$

которые будут использоваться затем для определения \mathbf{f} в (4.11). Итак, всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{M}^{\natural}]$ определяется условиями

$$(\mathbf{f}[x] \triangleq \tilde{V}^*[x] \forall x \in X^{00}) \& (\mathbf{f}[x] \triangleq 0 \forall x \in \mathbf{M}^{\natural} \setminus X^{00}) \quad (4.25)$$

в случае аддитивной \mathcal{M} -задачи и условиями

$$(\mathbf{f}[x] \triangleq \tilde{\mathcal{V}}^*[x] \forall x \in X^{00}) \& (\mathbf{f}[x] \triangleq 0 \forall x \in \mathbf{M}^{\natural} \setminus X^{00}) \quad (4.26)$$

в случае минимаксной \mathcal{M} -задачи; учитываем при этом, что (см. (4.1), (4.9))

$$X^{00} \subset \mathbf{M}^{\natural}. \quad (4.27)$$

Вернемся к (4.6)–(4.8). Точнее, рассмотрим постановку предваряющей \mathcal{M}_1 -задачи,

оперируя ФС (4.11), (4.12). Итак, при $x \in X^0, \alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^h[x]$ имеем

$$\mathfrak{C}_\alpha^h[(z_t)_{t \in \overline{0, N}} | \mathbf{f}] \triangleq \sum_{t=1}^N [\mathbf{c}^h(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + c_{\alpha(t)}^h(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}))] + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)) \in \mathbb{R}_+, \quad (4.28)$$

где функция \mathbf{f} конкретизируется посредством (4.25) (мы начинаем обсуждение с аддитивного варианта \mathcal{M}_1 -задачи). Разумеется

(см. (4.7)), значение (4.28) определено при $x \in X^0$ и $(\alpha, (z_t)_{t \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{D}^h[x]$. При $x \in X^0$ получаем (\mathcal{M}_1, x) -задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha^h[\mathbf{z} | \mathbf{f}] \rightarrow \min, (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x], \quad (4.29)$$

которой сопоставляется экстремум

$$V^h[x] \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x]} \mathfrak{C}_\alpha^h[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (4.30)$$

и непустое экстремальное множество

$$(\text{sol})^h[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x] | \mathfrak{C}_\alpha^h[\mathbf{z}] = V^h[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^h[x]). \quad (4.31)$$

Мы рассматриваем здесь и проблему оптимизации старта в \mathcal{M}_1 -задаче:

$$V^h[x] \rightarrow \min, x \in X^0; \quad (4.32)$$

задаче (4.32) сопоставляется полный экстремум \mathbb{V}^h \mathcal{M}_1 -задачи (в аддитивной версии) и экстремальное множество X_{opt}^h :

$$\mathbb{V}^h \triangleq \min_{x \in X^0} V^h[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (4.33)$$

$$X_{\text{opt}}^h \triangleq \{x \in X^0 | V^h[x] = \mathbb{V}^h\} \in \mathcal{P}'(X^0). \quad (4.34)$$

Аналогичные конструкции вводим для случая минимаксной постановки. Напомним в связи с этим (4.17), (4.21)–(4.23), получая конструкцию минимаксной \mathcal{M}_2 -задачи, после

чего формируем функцию \mathbf{f} по правилу (4.26).

Теперь рассмотрим постановку предваряющей \mathcal{M}_1 -задачи, оперируя ФС (4.11), (4.12). При $x \in X^0, \alpha \in \mathcal{A}_1$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^h[x]$ имеем

$$\mathfrak{B}_\alpha^h[(z_t)_{t \in \overline{0, N}}] \triangleq \sup(\{\max_{t \in \overline{1, N}} [\mathbf{c}^h(\text{pr}_2(z_{t-1}), \text{pr}_1(z_t), \alpha^1(\overline{t, N})) + c_{\alpha(t)}^h(z_t, \alpha^1(\overline{t, N}))]; \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N))\}), \quad (4.35)$$

где \mathbf{f} соответствует (4.26). В силу (4.7) имеем, что при $x \in X^0$ значение (4.35) определено

для $(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x]$; получаем минимаксную задачу

$$\mathfrak{B}_\alpha^h[\mathbf{z}] \rightarrow \min, (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x], \quad (4.36)$$

которой сопоставляется экстремум

$$\tilde{\mathcal{V}}^h[x] \triangleq \min_{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x]} \mathfrak{B}_\alpha^h[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}_+ \quad (4.37)$$

и непустое экстремальное множество

$$\langle \text{sol} \rangle^h[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^h[x] \mid \mathfrak{B}_\alpha^h[\mathbf{z}] = \tilde{\mathcal{V}}^h[x]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{D}^h[x]). \quad (4.38)$$

Посредством (4.37) определена функция $\tilde{\mathcal{V}}^h[\cdot] \triangleq (\tilde{\mathcal{V}}^h[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]$ экстремума предваряющей задачи в минимаксной постановке. Допуская вариацию старта, приходим к задаче

$$\tilde{\mathcal{V}}^h[x] \rightarrow \min, x \in X^0, \quad (4.39)$$

которой сопоставляется (полный) экстремум $\tilde{\mathcal{V}}_0^h$ и непустое экстремальное множество:

$$\tilde{\mathcal{V}}_0^h \triangleq \min_{x \in X^0} \tilde{\mathcal{V}}^h[x] \in \mathbb{R}_+, \quad (4.40)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\text{opt}}^h \triangleq \{x \in X^0 \mid \tilde{\mathcal{V}}^h[x] = \tilde{\mathcal{V}}_0^h\} \in \mathcal{P}'(X^0); \quad (4.41)$$

$\tilde{\mathcal{V}}_0^h$ рассматриваем в качестве полного экстремума минимаксной \mathcal{M}_1 -задачи.

Теперь мы располагаем двумя вариантами основной задачи и двумя вариантами частных задач (имеются в виду варианты аддитивной и минимаксной постановок). Важную роль играют правила (4.25), (4.26), реализующие связь предваряющей и финальной (частичных) задач как в аддитивном, так и в минимаксном случаях.

5. Оптимальный алгоритм построения композиционных решений: общая структура

Мы вернемся к (3.19), (3.20) и рассмотрим единую логику решения задач (3.32), (3.39), следуя конструкции [11, раздел 2]. Итак, в дальнейшем мы используем приводимый ниже алгоритм на функциональном уровне.

Шаг 1. По правилу (4.1) построить множество X^{00} возможных точек старта в финальной \mathcal{M}_2 -задаче.

Шаг 2. Сформировать финальную \mathcal{M}_2 -задачу как систему (\mathcal{M}_2, x) -задач, где x пробегает X^{00} .

Шаг 3. Найти функцию экстремума \mathcal{M}_2 -задачи, определенную на множестве X^{00} (кроме того, находятся слои функции Беллмана).

Шаг 4. На основе функции экстремума финальной \mathcal{M}_2 -задачи сформировать терминальную компоненту \mathbf{f} критерия предваряющей \mathcal{M}_1 -задачи (используется правило (4.25) в аддитивном случае и правило (4.26) в минимаксном).

Шаг 5. Сформировать предваряющую \mathcal{M}_1 -задачу как систему (\mathcal{M}_1, x) -задач, где x пробегает X^0 .

Шаг 6. Найти функцию экстремума предваряющей \mathcal{M}_1 -задачи (а также слои функции Беллмана), ее полный экстремум и соответствующее экстремальное множество точек старта из X^0 .

Шаг 7. Выбрать произвольно и зафиксировать оптимальный старт $x^0 \in X^0$ в предваряющей \mathcal{M}_1 -задаче и решить (\mathcal{M}_1, x^0) -задачу, то есть построить оптимальное решение (\mathcal{M}_1, x^0) -задачи (\mathcal{M}_1 -задачи со стартом x^0) в виде у/п маршрут – траектория; зафиксировать на данной траектории терминальное состояние в виде соответствующей у/п и выбрать $x^{00} \in X^{00}$ в виде второго элемента этой у/п.

Шаг 8. Принять $x^{00} \in X^{00}$ в качестве старта в \mathcal{M}_2 -задаче и найти оптимальное решение (\mathcal{M}_2, x^{00}) -задачи в виде у/п маршрут – траектория.

Шаг 9. Склеить найденные оптимальные решения (\mathcal{M}_1, x^0) -задачи и (\mathcal{M}_2, x^{00}) -задачи (раздельно склеиваются маршруты по правилу (3.9) и траектории [11, (4.4), (4.5)], после

чего дополнить получившуюся у/п точкой x^0 для реализации композиционного МП; данный МП будет оптимален в основной \mathcal{M} -задаче (то есть будет содержаться в **SOL** (3.26) или в **SOL**⁰ в зависимости от того, рассматривается аддитивная версия критерия или минимаксная постановка).

Отметим, что в ряде случаев не требуется построение оптимального композиционного МП, а достаточно найти экстремум основной задачи и оптимальный старт. В этой ситуации достаточно выполнить только этапы 1–6, причем в памяти вычислителя не требуется сохранять все слои функции Беллмана (поэтому в 3 и в 6 о них упоминается в скобках). Саму же реализацию процедур ДП в предваряющей и финальной задаче можно осуществлять с перезаписью слоев [22, замечание 2.1], чем достигается некоторая экономия ресурсов памяти. Знание экстремума в классе композиционных МП может быть полезно для оценивания эвристики в задачах большой размерности.

6. Динамическое программирование, 1: подготовительные построения

В связи с 1–9 отметим, что наиболее трудными в вычислительном отношении являются этапы 3, 6. Для выполнения данных этапов в [10, 11] использовалось широко по-

нимаемое ДП, реализуемое отдельно в \mathcal{M}_1 - и в \mathcal{M}_2 -задаче. При этом ограничения предшествования в данных задачах использовались в положительном направлении (в связи с этим напомним [4, § 4.9]).

Рассмотрим некоторые аналоги построенный [4, § 4.9], реализуемые универсально в аддитивной и минимаксной постановках. Речь идет о том, чтобы только подготовиться к введению слоев функций Беллмана.

Начнем с обсуждения конструкций для \mathcal{M}_1 -задачи, определяя оператор вычеркивания (заданий из списка)

$$\mathbf{I}^{\natural}: \mathfrak{N}^{\natural} \rightarrow \mathfrak{N}^{\natural} \quad (6.1)$$

посредством следующего правила [4, § 2.2]: при $K \in \mathfrak{N}^{\natural}$

$$\mathbf{I}^{\natural}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z): z \in \Sigma^{\natural}[K]\}, \quad (6.2)$$

где $\Sigma^{\natural}[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_1 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$. Итак, располагая списком K , мы оставляем в нем (6.2) только индексы заданий, не являющиеся получателями для адресных пар, «полностью укладываемых» в K (имеется в виду, что оба элемента соответствующей адресной пары содержатся в K).

Таким образом, множества – элементы семейства

$$\mathfrak{S}^{\natural} \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^{\natural} \mid \forall z \in \mathbf{K}_1 (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (6.3)$$

называем существенными списками в \mathcal{M}_1 -задаче. Эти списки ранжируем по мощности: при $s \in \overline{1, N}$ полагаем $\mathfrak{S}_s^{\natural} \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^{\natural} \mid s = |K|\}$. Ясно, что $\mathfrak{S}_N^{\natural} = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементное семейство); семейство $\mathfrak{S}_1^{\natural}$ также допускает очень простое описание: при $\tilde{\mathbf{K}}_1 = \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_1\}$

$$\mathfrak{S}_1^{\natural} = \{\{t\}: t \in \overline{1, N} \setminus \tilde{\mathbf{K}}_1\} \quad (6.4)$$

(семейство всех синглетонов неотправителей). Наконец [10, (6.3)], [22, (8.15)]

$$\mathfrak{S}_{s-1}^{\natural} = \{K \setminus \{t\}: K \in \mathfrak{S}_s^{\natural}, t \in \mathbf{I}^{\natural}(K)\}. \quad (6.5)$$

Посредством (6.4), (6.5) определена рекуррентная процедура $\mathfrak{S}_N^{\natural} \rightarrow \mathfrak{S}_{N-1}^{\natural} \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{S}_1^{\natural}$, в которой начальный элемент соответствует $\overline{1, N}$, а регулярный шаг определяется посредством (6.5).

Следующий этап – построение слоев пространства позиций $D_0^{\natural}, D_1^{\natural}, \dots, D_N^{\natural}$ (заметим, что позицией здесь называем каждую у/п (x, K) , где $x \in X$ и $K \subset \overline{1, N}$). Проще всего определяются [11, (3.4)] крайние слои:

$$(D_0^{\natural} \triangleq \{(x, \emptyset): x \in X^{00}\}) \& (D_N^{\natural} \triangleq \{(x, \overline{1, N}): x \in X^0\}). \quad (6.6)$$

Рассмотрим построение промежуточных слоев. Итак, сначала при $s \in \overline{1, N-1}$ и $\mathbb{K} \in \mathfrak{S}_s^{\mathbb{H}}$ последовательно создаем множества

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^{\mathbb{H}}(\mathbb{K}) &\triangleq \{j \in \overline{1, N} \setminus \mathbb{K} \mid \{j\} \cup \mathbb{K} \in \mathfrak{S}_{s+1}^{\mathbb{H}}\}, \mathcal{M}_s^{\mathbb{H}}[\mathbb{K}] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^{\mathbb{H}}(\mathbb{K})} \mathbf{M}_j, \\ \mathbb{D}_s^{\mathbb{H}}[\mathbb{K}] &\triangleq \{(x, \mathbb{K}) : x \in \mathcal{M}_s^{\mathbb{H}}[\mathbb{K}]\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

(в (6.7) реализуется цепочка $\mathcal{J}_s^{\mathbb{H}}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_s^{\mathbb{H}}[\mathbb{K}] \rightarrow \mathbb{D}_s^{\mathbb{H}}[\mathbb{K}]$). Теперь промежуточные слои определяем условиями

$$D_s^{\mathbb{H}} \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_s^{\mathbb{H}}} \mathbb{D}_s^{\mathbb{H}}[K] \forall s \in \overline{1, N-1}. \quad (6.8)$$

В связи с (6.6), (6.8) напомним, что [6, предложение 4.9] $D_s^{\mathbb{H}} \neq \emptyset$ при $s \in \overline{0, N}$. Отметим важное свойство [11, (3.7)] построенных слоев:

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^{\mathbb{H}} \forall s \in \overline{1, N} \forall (x, K) \in D_s^{\mathbb{H}} \forall j \in \mathbf{I}^{\mathbb{H}}(K) \forall z \in \mathbb{M}_j. \quad (6.9)$$

Аналогичным образом строятся слои в \mathcal{M}_2 -задаче. Сначала вводим оператор вычеркивания

$$\mathbf{I}^* : \mathfrak{N}^* \rightarrow \mathfrak{N}^*; \quad (6.10)$$

а именно: при $K \in \mathfrak{N}^*$ полагаем

$$\mathbf{I}^*(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Sigma^*[K]\}, \quad (6.11)$$

где $\Sigma^*[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K}_2 \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\}$ (в (6.10), (6.11) имеем аналогию с (6.1), (6.2)). В виде

$$\mathfrak{S}^* \triangleq \{K \in \mathfrak{N}^* \mid \forall z \in \mathbf{K}_2 (\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad (6.12)$$

реализуется семейство существенных списков \mathcal{M}_2 -задачи. Ранжируем их по мощности, получая при $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ в виде $\mathfrak{S}_s^* \triangleq \{K \in \mathfrak{S}^* \mid s = |K|\}$ семейство всех s -элементных существенных списков; тогда $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* = \{\overline{1, \mathbf{n} - N}\}$ и при $\check{\mathbf{K}}_2 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}_2\}$

$$\mathfrak{S}_1^* = \{\{t\} : t \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \check{\mathbf{K}}_2\} \quad (6.13)$$

(семейство всех синглетонов неотправителей \mathcal{M}_2 -задачи). Если же $s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}$, то

$$\mathfrak{S}_{s-1}^* = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{S}_s^*, t \in \mathbf{I}^*(K)\} \forall s \in \overline{2, \mathbf{n} - N}. \quad (6.14)$$

В (6.13), (6.14) имеем очевидную аналогию с (6.4), (6.5). Получили рекуррентную процедуру $\mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N}^* \rightarrow \mathfrak{S}_{\mathbf{n}-N-1}^* \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{S}_1^*$. Переходим к построению слоев пространства позиций: введем множества $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{\mathbf{n}-N}^*$. Полагая, что

мы вводим $D_0^* \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \check{\mathcal{M}}^*\}$; кроме того, $D_{\mathbf{n}-N}^* \triangleq \{(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) : x \in X^{00}\}$. Итак, определены крайние слои. Если $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}$ и $\mathbb{K} \in \mathfrak{S}_s^*$, то полагаем

$$\check{\mathcal{M}}^* \triangleq \bigcup_{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \check{\mathbf{K}}_2} \mathbf{M}^{(j)}, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^*(\mathbb{K}) &\triangleq \{j \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \mathbb{K} \mid \{j\} \cup \mathbb{K} \in \mathcal{G}_{s+1}^*\}, \mathcal{M}_s^*[\mathbb{K}] \triangleq \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s^*(\mathbb{K})} \mathbf{M}^{(j)}, \\ \mathbb{D}_s^*[\mathbb{K}] &\triangleq \{(x, \mathbb{K}) : x \in \mathcal{M}_s^*[\mathbb{K}]\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

(в (6.16) реализуем цепочку $\mathcal{J}_s^*(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_s^*[\mathbb{K}] \rightarrow \mathbb{D}_s^*[\mathbb{K}]$). Тогда

$$D_s^* \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s^*} \mathbb{D}_s^*[K] \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - N - 1}; \quad (6.17)$$

согласно [4, предложению 4.9.3] $D_s^* \neq \emptyset$ при $s \in \overline{0, \mathbf{n} - N}$. Итак, (6.17) логически «повторяет» (6.8). Подобно (6.9):

$$(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}^* \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - N} \quad \forall (x, K) \in D_s^* \quad \forall j \in \mathbf{I}^*(K) \quad \forall z \in \mathbb{M}^{(j)}. \quad (6.18)$$

В (6.9) и (6.18) мы имеем фактически конкретные способы продвижения в слоях пространства позиций частичных задач.

маршрутов и траекторий. Используя общие свойства перестановок [14, с. 87], отметим два следствия (3.9): при $\alpha \in \mathcal{A}_1$ и $\beta \in \mathcal{A}_2$

7. Процедуры склеивания (краткие замечания)

Напомним некоторые положения [11, раздел 4], касающиеся склеивания частичных

$$\begin{aligned} ((\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) &= \alpha^1(\overline{t, N}) \cup \overline{N + 1, \mathbf{n}} \quad \forall t \in \overline{1, N} \quad \& \quad ((\alpha \diamond \beta)^1(\overline{t, \mathbf{n}})) = \\ &= \beta^1(\overline{t - N, \mathbf{n} - N}) \oplus N \quad \forall t \in \overline{N + 1, \mathbf{n}}; \end{aligned} \quad (7.1)$$

в связи с (7.1) см. (2.1), а также [11, (4.2), (4.3)]. Итак, в (7.1) мы указываем явное описание образцов ДИ, содержащихся в $\overline{1, \mathbf{n}}$ при действии на них склеенных маршрутов.

Переходя к вопросу о склеивании траекторий, напомним (4.8); в силу (4.7)

$$\text{pr}_2(\mathbf{z}(N)) \in X^{00} \quad \forall x \in X^0 \quad \forall (\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]. \quad (7.2)$$

Итак, если выбрано любое ДР (\mathcal{M}_1, x) -задачи, где $x \in X^0$, то второй элемент у/п, являющийся финишной точкой траектории данного ДР, может использоваться в качестве старта \mathcal{M}_2 -задачи. Напомним определения \mathcal{Z}^{\natural} и \mathcal{Z}^* в

разделе 4 (множества кортежей в $X \times X$, определенных на ДИ $\overline{0, N}$ и $\overline{0, \mathbf{n} - N}$ соответственно). Тогда при $\mathbf{z}' \in \mathcal{Z}^{\natural}$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}^*$ определяем склеенный кортеж $\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}$ следующими условиями:

$$\left((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t) \triangleq \mathbf{z}'(t) \quad \forall t \in \overline{0, N} \right) \quad \& \quad \left((\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'')(t) \triangleq \mathbf{z}''(t - N) \quad \forall t \in \overline{N + 1, \mathbf{n}} \right). \quad (7.3)$$

При этом (см. [14, (4.5)]) справедливо следующее очевидное свойство склеиваемости: если

$x \in X^0, \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2, \mathbf{z}' \in \mathcal{Z}_{\alpha}^{\natural}[x]$ и $\mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\beta}^*[\text{pr}_2(\mathbf{z}'(N))]$, то

$$\mathbf{z}' \square \mathbf{z}'' \in \mathcal{Z}_{\alpha \diamond \beta}[x]. \quad (7.4)$$

В связи с [11, (4.6)] дополним (7.4) полезным свойством сужений траекторий, согласованных со склеенными маршрутами: при $x \in X^0$, $\alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \circ \beta}[x]$

$$(z_t)_{t \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_\alpha^{\natural}[x]; \quad (7.5)$$

с учетом (7.2) и (7.5) имеем очевидное следствие [11, (4.7)]: при условиях, обеспечивающих (7.5),

$$\text{pr}_2(z_N) \in X^{00}. \quad (7.6)$$

Наконец, еще один вариант сужения «совокупных» траекторий указан в [11, (4.8)]: при $x \in X^0, \alpha \in \mathcal{A}_1, \beta \in \mathcal{A}_2$ и $(z_t)_{t \in \overline{0, n}} \in \mathcal{Z}_{\alpha \circ \beta}[x]$ и $(z_t^*)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}^*$ истинна импликация

$$\left((z_0^* \triangleq (\text{pr}_2(z_N), \text{pr}_2(z_N))) \& (z_t^* \triangleq z_{t+N} \forall t \in \overline{1, n-N}) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow ((z_t^*)_{t \in \overline{0, n-N}} \in \mathcal{Z}_\beta^*[\text{pr}_2(z_N)]); \quad (7.7)$$

в (7.7) неявно говорится о сужении траектории $(z_t)_{t \in \overline{0, n}}$ на ДИ $\overline{N+1, n}$. Теперь, комбинируя (3.9) и (7.4), мы получаем свойство раздельной склеиваемости ДР: если $(\alpha, y) \in \mathbf{D}^{\natural}[x]$ и $(\beta, z) \in \mathbf{D}^*[\text{pr}_2(y(N))]$, то [11, (4.9)]

$$(\alpha \circ \beta, y \square z) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]. \quad (7.8)$$

Свойство (7.8) играет основную роль в обоснованиях теоретических положений, обеспечивающих композиционную оптимальность алгоритма 1–9 раздела 5. В настоящем исследовании мы совсем кратко коснемся этих положений, придерживаясь «алгоритмического» варианта изложения материала.

8. Динамическое программирование, 2: задача маршрутизации с аддитивным критерием

Рассмотрим (более простую в логическом отношении) задачу (3.24). Одно из практических применений данной постановки может быть гипотетически связано с задачей авиапожарного патрулирования, когда БПЛА должен по возможности быстрее осуществить обзор лесных массивов с целью оперативного получения информации о возможных возгораниях для того, чтобы направить для тушения последних десантников и, возмож-

но, необходимую технику. Мегаполисы, связанные с лесами, можно рассматривать в качестве дискретизаций последних, причем выполненных так, чтобы при посещении всех «городов» (это точки лесного массива, указанные заранее) мегаполиса с использованием бортовых средств наблюдения можно было бы однозначно ответить на вопрос, есть ли возгорание или нет (ограничимся сейчас такой упрощенной постановкой). Мы полагаем для простоты, что набор лесов выбран таким, что ограничениями ресурсного характера можно пренебречь. Внутренние работы, связанные с посещением каждого лесного массива, оцениваем временем облета всех «городов» мегаполиса, что при постоянной скорости движения может быть сведено к суммарному расстоянию. В результате внутренние работы всякий раз оцениваются значением возникающей метрической задачи коммивояжера. При этом пункт прибытия и пункт отправления из мегаполиса выбираются произвольно, то есть можно полагать, что $M_j = M_j \times M_j$ при $j \in \overline{1, n}$.

Разумеется, данная модель является упрощенной, но мы ей ограничимся сейчас и перейдем к рассмотрению общей постановки «аддитивной» задачи (см. (3.24)). Мы имеем при этом в виду, что уже проведена $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ -декомпозиция основной задачи, что может быть связано с ощутимой размерно-

стью последней либо с необходимостью первоочередного посещения наиболее пожароопасных районов (например, тех лесных массивов, в которых пожары могут угрожать населенным пунктам).

Итак, при $x \in X^0$ имеем задачу (3.21); допуская возможность оптимизации точки старта x , мы приходим к основной задаче (3.24). В интересах решения последней используем частичные задачи (4.18), (4.29) и (4.32). Важную роль здесь играют положения [11, раздел 5]. Так, согласно [11, предложение 2] при $x \in X^0$ имеем равенство $V^{\natural}[x] = \check{V}[x]$ экстремумов предваряющей и основной задач со стартом в x . Это свойство, в свою очередь, доставляет равенство $V^{\natural}[\cdot] = \check{V}[\cdot]$ [14, (5.28)] соответствующих функций экс-

тремума, заданных на X^0 ; здесь функция $V^{\natural}[\cdot]$ определяется подобно (4.24), а именно

$$V^{\natural}[\cdot] \triangleq (V^{\natural}[x])_{x \in X^0} \in \mathcal{R}_+[X^0]. \quad (8.1)$$

Из данного равенства функций экстремума вытекает, что $\mathbb{V}^{\natural} = \mathbb{V}$ [11, (5.29)]. Отметим, наконец, равенство экстремальных множеств $X_{\text{opt}}^{\natural} = X_{\text{opt}}^0$ в [11, (5.30)]. Данные положения, указанные в [11], используем ниже без дополнительных пояснений (ключевую роль в их обосновании играет (4.25)).

Рассмотрим шаг 3 алгоритма раздела 5, используя определения раздела 6 и следуя [11, раздел 6]. Точнее, мы укажем процедуру построения функций

$$v_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*], v_1^* \in \mathcal{R}_+[D_1^*], \dots, v_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[D_{\mathbf{n}-N}^*], \quad (8.2)$$

именуемых слоями функции Беллмана \mathcal{M}_2 -задачи. Итак, $v_0^* \in \mathcal{R}_+[D_0^*]$ определяем условиями

$$v_0^*(x, \emptyset) \triangleq f(x) \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}^*; \quad (8.3)$$

см. (6.15). Если же $s \in \overline{1, \mathbf{n} - N}$ и функция $v_{s-1}^* \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^*]$ уже построена, то $v_s^* \in \mathcal{R}_+[D_s^*]$ определяем, учитывая (6.18), по правилу

$$v_s^*(x, K) \triangleq \min_{j \in \Gamma^*(K)} \min_{z \in \mathbb{M}(j)} [c^*(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^*(z, K) + v_{s-1}^*(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s^*. \quad (8.4)$$

Посредством (8.3), (8.4) определена рекуррентная процедура

$$v_0^* \rightarrow v_1^* \rightarrow \dots \rightarrow v_{\mathbf{n}-N}^*, \quad (8.5)$$

для которой $v_{\mathbf{n}-N}^* \in \mathcal{R}_+[D_{\mathbf{n}-N}^*]$ реализует (см. [14, (6.3)]) функцию экстремума финальной задачи по правилу

$$\check{V}^*[x] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \quad \forall x \in X^{00}; \quad (8.6)$$

грубо говоря, (8.5) переводит терминальную функцию f в требуемую функцию $\check{V}^*[x]$ (4.24). Используя (4.25), получаем терми-

нальную компоненту критерия предваряющей задачи. Теперь нашей целью является построение слоев

$$v_0^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_0^{\natural}], v_1^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_1^{\natural}], \dots, v_N^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_N^{\natural}] \quad (8.7)$$

функции Беллмана \mathcal{M}_1 -задачи. Учитывая (6.6) и (8.6), определяем $v_0^{\natural} \in \mathcal{R}_+[D_0^{\natural}]$ правилом

$$v_0^h(x, \emptyset) \triangleq v_{n-N}^*(x, \overline{1, n-N}) = \tilde{V}^*[x] \forall x \in X^{00}. \quad (8.8)$$

Далее, если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v_{s-1}^h \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}^h]$ уже построена, то $v_s^h \in \mathcal{R}_+[D_s^h]$ определяем следующим правилом (учитывающим (6.9)):

$$v_s^h(x, K) \triangleq \min_{j \in \mathbf{I}^h(K)} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [c^h(x, \text{pr}_1(z), K) + c_j^h(z, K) + v_{s-1}^h(\text{pr}_2(z), K \setminus \{j\})] \forall (x, K) \in D_s^h. \quad (8.9)$$

Получили рекуррентную процедуру

$$v_0^h \rightarrow v_1^h \rightarrow \dots \rightarrow v_N^h, \quad (8.10)$$

$v_N^h \in \mathcal{R}_+[D_N^h]$ реализует (см. [14, (6.5)]) функцию экстремума предваряющей задачи:

$$v_N^h(x, \overline{1, N}) = V^h[x] \forall x \in X^0; \quad (8.11)$$

в (8.11) учитываем (6.6). Итак, процедура (8.10) переводит v_{n-N}^* в $V^h[\cdot]$. Тем самым реализуется шаг 6 нашего алгоритма в «аддитивном» случае; действительно, располагая функцией $V^h[\cdot]$, мы можем воспользоваться соотношениями (4.33), (4.34).

Далее, учитывая оговоренную ранее связь функций экстремума основной и предваряющей задач, а также соответствующих экстремальных п/м X^0 , мы находим $\tilde{V}[\cdot]$, \mathbb{V} и X_{opt}^0 (здесь, разумеется, надо иметь в виду, что множество (4.34) легко находится по известной уже функции $V^h[\cdot]$). Подчеркнем, что при нахождении $\tilde{V}[\cdot]$, \mathbb{V} и X_{opt}^0 мы можем исполь-

зовать в каждой из частичных задач режим построения с перезаписью слоев функций Беллмана [22, замечание 2.1] с целью экономии ресурсов памяти.

9. Оптимальный композиционный маршрутный процесс в задаче с аддитивным критерием

Сейчас мы продолжим работу с процедурами (8.5), (8.10), имея конечной целью реализацию шага 9 алгоритма раздела 5. Это предполагает, конечно, предваряющее построение оптимальных решений в частичных задачах, что было отмечено при описании шагов 7, 8. Здесь мы полагаем, что все функции (8.2), (8.7) построены и находятся в нашем распоряжении (точнее, находятся в памяти вычислителя). Зная множество $X_{\text{opt}}^0 = X_{\text{opt}}^h$, выбираем произвольно $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$, получая [11, (6.7)] цепочку равенств

$$v_N^h(x^0, \overline{1, N}) = \min_{j \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [c^h(x^0, \text{pr}_1(z), \overline{1, N}) + c_j^h(z, \overline{1, N}) + v_{N-1}^h(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\})], \quad (9.1)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{j\}) \in D_{N-1}^h$ при $j \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N})$ и $z \in \mathbb{M}_j$ в силу (6.9). Вместе с тем (см. раздел 8) имеем по выбору x^0 , что $x^0 \in X_{\text{opt}}^h$ и при этом

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}^h = V^h[x^0] = \tilde{V}[x^0] = v_N^h(x^0, \overline{1, N}). \quad (9.2)$$

С учетом (9.1) и (9.2) выбираем $\xi_1 \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N})$ и $y_1 \in \mathbb{M}_{\xi_1}$ из условия

$$\mathbb{V} = c^h(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + c_{\xi_1}^h(y_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}^h(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}), \quad (9.3)$$

получая также включения $(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \in D_{N-1}^h$. С учетом этого рассмотрим представление $v_{N-1}^h(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$. С учетом (8.9) получаем равенство

$$v_{N-1}^h(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}^h(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_j^h(z, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^h(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\})], \quad (9.4)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; j\}) = (\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) \setminus \{j\}) \in D_{N-2}^h$, при $j \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$ и $z \in \mathbb{M}_j$. С учетом (9.4) выбираем $\xi_2 \in \mathbf{I}^h(\overline{1, N} \setminus \{\xi_1\})$ и $y_2 \in \mathbb{M}_{\xi_2}$ так, что

$$v_{N-1}^h(\text{pr}_2(y_1), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) = \mathbf{c}^h(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_2}^h(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^h(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}), \quad (9.5)$$

получая также включение $(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}) \in D_{N-2}^h$. Из (9.3), (9.5) получаем, что

$$\mathbb{V} = \mathbf{c}^h(x^0, \text{pr}_1(y_1), \overline{1, N}) + \mathbf{c}^h(\text{pr}_2(y_1), \text{pr}_1(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + c_{\xi_1}^h(y_1, \overline{1, N}) + c_{\xi_2}^h(y_2, \overline{1, N} \setminus \{\xi_1\}) + v_{N-2}^h(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_1; \xi_2\}). \quad (9.6)$$

Полагаем далее, что $y_0 \triangleq (x^0, x^0)$. Тогда $\text{pr}_1(y_0) = \text{pr}_2(y_0) = x^0$ и согласно (9.6)

$$\mathbb{V} = \sum_{t=1}^2 [\mathbf{c}^h(\text{pr}_2(y_{t-1}), \text{pr}_1(y_t), \overline{1, N} \setminus \{\xi_s: s \in \overline{1, t-1}\}) + c_{\xi_t}^h(y_t, \overline{1, N} \setminus \{\xi_s: s \in \overline{1, t-1}\})] + v_{N-2}^h(\text{pr}_2(y_2), \overline{1, N} \setminus \{\xi_s: s \in \overline{1, 2}\}). \quad (9.7)$$

Далее операции, подобные (9.3) и (9.5), следует продолжать вплоть до исчерпания индексного множества $\overline{1, N}$; в результате будут построены $\xi \triangleq (\xi_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathcal{A}_1$ и $\mathbf{y} \triangleq (y_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathcal{Z}_{\xi}^h[x^0]$ со свойством

$$\mathbb{C}_{\xi}^h[\mathbf{y}] = \mathbb{V} \quad (9.8)$$

(при $N = 2$ равенство (9.8) непосредственно следует из (4.25), (4.28), (8.8) и (9.7)). В связи с подробностями в части проверки (9.8) в общем случае см. [23, §7]. Из свойств, отмеченных в разделе 8, легко следует, что

$(\xi, \mathbf{y}) \in (\text{sol})^h[x^0]$. Итак, мы построили полное решение предваряющей задачи на основе ДП.

Приступим к аналогичному построению для финальной задачи, фиксируя

$$x^{00} \triangleq \text{pr}_2(\mathbf{y}(N)) = \text{pr}_2(y_N) \in X^{00} \quad (9.9)$$

(см. (4.8)). При этом $(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N}) \in D_{\mathbf{n}-N}^*$; см. (9.9) и определения раздела 6. С учетом (8.6) $\tilde{V}^*[x^{00}] = v_{\mathbf{n}-N}^*(x^{00}, \overline{1, \mathbf{n} - N})$, а потому согласно (8.4)

$$\tilde{V}^*[x^{00}] = \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\})], \quad (9.10)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{j\}) \in D_{\mathbf{n}-N-1}^*$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$. С учетом (9.10) выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N})$ и $\hat{y}_1 \in \mathbb{M}^{(\eta_1)}$ из условия

$$\begin{aligned} \tilde{V}^*[x^{00}] &= \mathbf{c}^*(x^{00}, \text{pr}_1(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N}) + \\ &+ c_{\eta_1}^*(\hat{y}_1, \overline{1, \mathbf{n} - N}) + v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}), \end{aligned} \quad (9.11)$$

причем $(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \in \mathbf{D}_{\mathbf{n}-N-1}^*$, где $\mathbf{n} - N - 1 \geq 1$. Теперь мы имеем согласно (8.4) равенство

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) &= \min_{j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{z \in \mathbb{M}^{(j)}} [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_j^*(z, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\})], \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $(\text{pr}_2(z), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; j\}) = (\text{pr}_2(z), (\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) \setminus \{j\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$ при $j \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $z \in \mathbb{M}^{(j)}$ (см. (6.18)). С учетом (9.12) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}^*(\overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\hat{y}_2 \in \mathbb{M}^{(\eta_2)}$ из условия

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{n}-N-1}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) &= \mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_1), \text{pr}_1(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + \\ &+ c_{\eta_2}^*(\hat{y}_2, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \end{aligned} \quad (9.13)$$

при этом, конечно, $(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{\mathbf{n}-N-2}^*$. Полагаем, что $\hat{y}_0 \triangleq (x^{00}, x^{00})$; тогда в силу (9.11) и (9.13) получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{V}^*[x^{00}] &= \sum_{t=1}^2 [\mathbf{c}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_{t-1}), \text{pr}_1(\hat{y}_t), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_s; s \in \overline{1, t-1}\}) + \\ &+ c_{\eta_t}^*(\hat{y}_t, \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_s; s \in \overline{1, t-1}\})] + v_{\mathbf{n}-N-2}^*(\text{pr}_2(\hat{y}_2), \overline{1, \mathbf{n} - N} \setminus \{\eta_s; s \in \overline{1, 2}\}). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Далее операции, подобные (9.11), (9.13), следует продолжать вплоть до исчерпания $\overline{1, \mathbf{n} - N}$, в результате чего будут построены

$$\eta \triangleq (\eta_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{A}_2, \hat{y} \triangleq (\hat{y}_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - N}} \in \mathcal{Z}_\eta^*[x^{00}]$$

со следующим со свойством:

$$\mathfrak{C}_\eta^*[\hat{y}] = \tilde{V}^*[x^{00}]$$

(при $N = \mathbf{n} - 2$ последнее равенство легко извлекается из (9.14)). Из (4.20) вытекает, что $(\eta, \hat{y}) \in (\text{sol})^*[x^{00}]$. Таким образом, в нашем построении

$$x^0 \in X_{\text{opt}}^{\text{h}}, (\xi, \mathbf{y}) \in (\text{sol})^{\text{h}}[x^0]; \quad (9.15)$$

$$x^{00} = \text{pr}_2(\mathbf{y}(N)), (\eta, \hat{y}) \in (\text{sol})^*[x^{00}]. \quad (9.16)$$

С учетом (9.15), (9.16) и [11, (5.24)] получаем равенство $\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[\mathbf{y} \square \hat{y}] = V^{\text{h}}[x^0]$, где $V^{\text{h}}[x^0] = \tilde{V}[x^0]$ (см. раздел 8). Кроме того, из (4.20), (4.31), (7.8) и (9.15) следует, что $(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{y}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x^0]$, где $x^0 \in X_{\text{opt}}^0$ и, как следствие, $\tilde{V}[x^0] = \mathbb{V}$. Полу-

чили равенство $\mathfrak{C}_{\xi \diamond \eta}[\mathbf{y} \square \hat{y}] = \mathbb{V}$. Тогда, коль скоро (см. (3.13))

$$(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{y}, x^0) \in \mathbf{D},$$

имеем в силу (3.26) окончательное включение

$$(\xi \diamond \eta, \mathbf{y} \square \hat{\mathbf{y}}, x^0) \in \mathbf{SOL}. \quad (9.17)$$

Итак, композиционно оптимальный МП построен посредством склеивания оптимальных ДР в частичных задачах.

10. Пример (постановка с аддитивным критерием)

Будем рассматривать ниже простейший пример, ориентированный на задачу АПП (см. обсуждение в разделе 8). В качестве X будем использовать плоскость: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В качестве точек X^0 будем рассматривать аэродромы либо площадки, с которых возможен старт беспилотных авиационных средств (БАС). Мегаполисы определяются в виде конечных п/м лесных массивов, подлежащих мониторингу. Как уже отмечалось, предполагается, что каждый из мегаполисов достаточен с точки зрения возможностей наблюдения бортовыми средствами для однозначного ответа на вопрос, есть ли возгорание в данном лесу или нет. Это обстоятельство определяет специфику внутренних работ: нам следует скорейшим образом посетить все города мегаполиса, то есть, по существу, решить внутреннюю задачу коммивояжера (ЗК). При этом пункты прибытия и отправления (для данного мегаполиса) могут в простейшем случае выбираться произвольно, что соответствует случаю $M_j = M_j \times M_j$ при $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$. В этом случае при $x \in M_j$ и $y \in M_j$ мы должны решить ЗК, в которой оставшиеся города должны последовательно посещаться. Предполагаем при этом, что размерность каждого мегаполиса достаточно мала; это позволяет решать всякий раз возникающую ЗК за приемлемое время, применяя аппарат на основе ДП. В рассматриваемом здесь модельном примере предполагается, что зависимость ФС от списка заданий отсутствует;

значения ФС c_1, \dots, c_n определяются всякий раз экстремумами соответствующей «внутренней» ЗК. Внешние перемещения оцениваются временами соответствующих перелетов. Впрочем, предполагая, что движение БАС осуществляется с фиксированной скоростью, можно полагать, что ФС определяются евклидовыми расстояниями, что позволяет рассматривать метрическую задачу (оптимизацию суммарного расстояния). Условия предшествования определяются приоритетностью посещения наиболее пожароопасных районов, направлением ветра и другими факторами, действующими в данной местности. В настоящем разделе мы не будем рассматривать композиционные решения, а сосредоточимся на примере задачи (3.32), осложненной, однако, ограничениями предшествования с тем, чтобы проиллюстрировать возможности оптимизации на основе ДП в духе конструкций, восходящих к [4, §4.9]. Это предполагает, конечно, умеренную размерность основной задачи. В рассматриваемом примере размерность является весьма ощутимой, что приводит к большому времени счета.

Итак, будем считать, что мегаполисы построены с учетом вышеупомянутых соображений достаточности в части фиксации возможных возгораний. Поэтому сами лесные массивы сейчас не рассматриваем, ограничимся мегаполисами. Далее, полагаем, что терминальная компонента критерия (функция f) тождественно равна нулю, что отвечает содержательно отсутствию требования о финальном перемещении в какую-либо наперед заданную точку.

Полагаем в примере, что $\mathbf{n} = 35$. При $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ имеем $|M_j| = 10$ и $M_j = M_j \times M_j$. Описание мегаполисов не приводится по соображениям объема. Итак, имеем 35 десятиэлементных мегаполисов. Множество X^0 таково, что $|X^0| = 12$; оно имеет вид

$$X^0 = \{(30, -55); (0,0); (90,5); (-5, -60); (120,40); (70, -100); (115, -95); (-80,75); (25, -100); (-70, -85); (40,0); (40,75)\},$$

любая точка X^0 может использоваться в качестве стартовой. Значения функций c_1, \dots, c_n определяются экстремумами внутренних задач коммивояжера, где стоимость перемещений между городами задается евклидовым расстоянием между плоскими векторами. Полагаем, что совокупные условия предшествования в \mathcal{M} -задаче задаются множеством, содержащим 49 адресных у/п. Оптимальный результат 2894,40356445313. Выбрана (оптимальная) точка старта (120,40). Время счета 29 ч 24 мин 49 с.

Таким образом, построения на основе ДП в духе [4, § 4.9] требуют больших временных затрат. В связи с этим во второй части будет рассмотрен вариант решения аддитивной задачи с выделением, предваряющей и финальной задач, в котором объектом нашего исследования будет композиционный МП (см. также разделы 8, 9).

Применение аппарата ДП как развития подхода [7] позволило к настоящему времени существенно продвинуться в вопросах решения прикладных задач, для которых ранее доминировали эвристики. Такая ситуация имела место, в частности, в случае задач маршрутизации, связанных с листовой резкой. Отметим ряд исследований в этом направлении [24–34]. В то же время в процессе исследования задач маршрутизации важную роль играют фундаментальные исследования [9, 31, 32, 35]. Все это подчеркивает необходимость в построении строгой математической теории, которая дополняла бы эвристические методы, широко используемые при решении практических задач.

Список литературы

1. Полешкина И.О. Роль малой авиации в обеспечении транспортной доступности арктических регионов: проблемы и направления развития // Научный вестник МГТУ ГА. 2022. Т. 25, № 2. С. 54–69. DOI: 10.26467/2079-0619-2022-25-2-54-69
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Об одной задаче распределения работ с ограничениями // Математический и прикладной анализ: сборник научных трудов. Тюмень: Изд-во Тюменского университета, 2005. Вып. 2. С. 223–237.
4. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
5. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–33.
6. Литл Дж. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере / Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1, № 1. С. 94–107.
7. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. 1964. Т. 9. С. 219–228.
8. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. 1964. Т. 9. С. 202–218.
9. Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. Экстремальные задачи на множествах перестановок. Екатеринбург: УМЦ УПИ, 2016. 220 с.
10. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Двухэтапное динамическое программирование в задаче маршрутизации с элементами декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 2023. № 5. С. 133–164. DOI: 10.31857/S0005231023050070
11. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование и декомпозиция в экстремальных задачах маршрутизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 1. С. 247–272. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-03
12. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств / Пер. с англ. М.И. Кратко, под ред. А.Д. Тайманова. М.: Мир, 1970. 416 с.
13. Дьедонне Ж. Основы современного анализа: пер. с англ. М.: Мир, 1964. 432 с.

14. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ / Пер. с англ., под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2002. 960 с.
15. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Пер. с англ. В.И. Благодатских, под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: Наука, 1977. 624 с.
16. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
17. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158. DOI: 10.7868/S0869565215320043
18. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 96–117.
19. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 4. С. 569–592. DOI: 10.35634/vm220406
20. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Оптимальная маршрутизация инструмента машин фигурной листовой резки с числовым программным управлением. Математические модели и алгоритмы: монография. Екатеринбург: УрФУ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2020. 247 с.
21. **Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Некоторые конструкции решения задач маршрутизации с использованием декомпозиций и преобразований целевых множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34, № 4. С. 518–540. DOI: 10.35634/vm240404
22. **Ченцов А.Г.** Задача маршрутизации «на узкие места» с системой первоочередных заданий // Известия института математики и информатики УдГУ. 2023. Т. 61. С. 156–186. DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-09
23. **Ченцов А.Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. № 1. С. 59–82.
24. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестник Уфимского государственного авиационно-технического университета. 2009. Т. 13, № 2. С. 280–286.
25. **Петунин А.А.** Методологические и теоретические основы автоматизации проектирования раскроя листовых материалов на машинах с числовым программным управлением: дисс. ... докт. техн. наук. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. 348 с.
26. **Петунин А.А., Таваева А.Ф.** Об оптимизации маршрута инструмента для машин фигурной листовой резки с ЧПУ при условии непостоянства скорости рабочего хода // Фундаментальные исследования. 2015. № 6-1. С. 56–62.
27. **Таваева А.Ф., Петунин А.А.** Точное вычисление стоимости резки заготовки из листового материала на машине лазерной резки с числовым программным управлением в задачи оптимизации маршрута перемещения режущего инструмента // Модернизация, оптимизация и информационные технологии. 2018. Т. 6, № 4. С. 298–312. DOI: 10.26102/2310-6018/2018.23.4.022
28. **Ye J., Chen Z.G.** An optimized algorithm of numerical cutting-path control in garment manufacturing // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 796. Pp. 454–457. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454
29. **Dewil R., Vansteenwegen P., Catrysse D.** Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters // International Journal of Production Research. 2014. Vol. 52, iss. 20. Pp. 5965–5984. DOI: 10.1080/00207543.2014.895064
30. **Фроловский В.Д.** Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2005. № 4. С. 63–66.

31. **Gutin G., Punnen A.P.** The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002, 850 p.

32. **Cook W.J.** In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton University, 2012. 228 p.

33. **Khachai D.** Precedence constrained generalized traveling salesman problem: Polyhedral study, formulations, and branch-and-cut algorithm / D. Khachai, R. Sadykov, O. Battaia, M. Khachay // European Journal of Operational Research. 2023. Vol. 309, iss. 2. Pp. 488–505. DOI: 10.1016/j.ejor.2023.01.039

34. **Беллман Р., Дрейфус С.** Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 460 с.

35. **Пападимитриу Х., Стайглиц К.** Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985. 510 с.

References

1. **Poleshkina, I.O.** (2022). Contribution of general aviation to ensuring transport accessibility to the arctic regions: the challenges and areas of focus. *Civil Aviation High Technologies*, vol. 25, no. 2, pp. 54–69. DOI: 10.26467/2079-0619-2022-25-2-54-69 (in Russian)

2. **Garey, M.R., Johnson, D.S.** (1979). Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Editorial: W.H. Freeman, 340 p.

3. **Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2005). About one problem of work distribution with constraints. In: *Matematicheskiy i prikladnoy analiz: sbornik nauchnykh trudov*. Tyumen: izdatelstvo Tyumenskogo universiteta, issue 2, pp. 223–237. (in Russian)

4. **Chentsov, A.G.** (2008). Extremal routing and task allocation problems: Theoretical issues. Moscow–Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Izhevskiy institut kompyuternykh issledovaniy, 240 p. (in Russian)

5. **Melamed, I.I., Sergeev, S.I., Sigal, I.Kh.** (1989). The traveling salesman problem. Theoretical issues. *Avtomatika i telemekhanika*, no. 9, pp. 3–33. (in Russian)

6. **Little, J., Murthy, K., Sweeney, D., Carel, K.** (1965). An algorithm for solving the traveling salesman problem. *Ekonomika i matematicheskiye metody*, vol. 1, no. 1, pp. 94–107. (in Russian)

7. **Bellman, R.** (1964). Application of dynamic programming to the traveling salesman problem. *Kiberneticheskiy sbornik*, vol. 9, pp. 219–228. (in Russian)

8. **Held, M., Karp, R.M.** (1964). Application of dynamic programming to ordering problems. *Kiberneticheskiy sbornik*, vol. 9, pp. 202–218. (in Russian)

9. **Gimadi, E.Kh., Khachai, M.Yu.** (2016). Extremal problems on sets of permutations. Yekaterinburg: UMC UPI, 220 p. (in Russian)

10. **Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2023). Two-stage dynamic programming in a routing problem with decomposition elements. *Avtomatika i telemekhanika*, no. 5, pp. 133–164. DOI: 10.31857/S0005231023050070 (in Russian)

11. **Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2025). Dynamic programming and decomposition in extreme routing problems. *Proceedings of the institute of mathematics and mechanics Ural branch of RAS*, vol. 31, no. 1, pp. 247–272. DOI: 10.21538/0134-4889-2025-31-1-fon-03 (in Russian)

12. **Kuratowski, K., Mostowski, A.** (1967). Set theory. Amsterdam: North-Holland publishing company, Warszawa: PWN-Polish scientific publishers, 440 p.

13. **Dieudonne, J.** (1960). Foundations of Modern Analysis. Hesperides Press, 408 p.

14. **Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L.** (1990). Introduction to algorithms. MIT Press, 1312 p.

15. **Warga, J.** (1972). Cover for optimal control of differential and functional equations. Elsevier Inc., 531 p. DOI: 10.1016/C2013-011669-8

16. **Chentsov, A.G.** (2014). Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions. *Automation and Remote Control*, vol. 75, no. 4, pp. 728–744. DOI: 10.1134/S0005117914040122

17. **Chentsov, A.G., Chentsov, A.A.** (2015). Route problem with constraints depending on a list of tasks. *Doklady Mathematics*, vol. 92, no. 3, pp. 685–688. DOI: 10.1134/S1064562415060083
18. **Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2016). Routing under constraints: problem of visit to megalopolises. *Automation and Remote Control*, vol. 77, no. 11, pp. 1957–1974. DOI: 10.1134/S0005117916110060
19. **Chentsov, A.G., Chentsov, A.A.** (2022). Dynamic programming and questions of solvability of route bottleneck problem with resource constraints. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 22, no. 4, pp. 569–592. DOI: 10.35634/vm220406 (in Russian)
20. **Petunin, A.A., Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2020). Optimal tool routing for figured sheet cutting machines with numerical control. Mathematical models and algorithms: Monograph. Yekaterinburg: UrFU imeni pervogo Prezidenta Rossii B.N. Yeltsina, 247 p. (in Russian)
21. **Chentsov, A.G., Chentsov, P.A.** (2024). Some constructions for solving routing problems using decompositions and transformations of target sets. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 34, no. 4, pp. 518–540. DOI: 10.35634/vm240404 (in Russian)
22. **Chentsov, A.G.** (2023). A bottleneck routing problem with a system of priority tasks. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University*, vol. 61, pp. 156–186. DOI: 10.35634/2226-3594-2023-61-09
23. **Chentsov, A.G.** (2013). To question of routing of works complexes. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1, pp. 59–82. (in Russian)
24. **Petunin, A.A.** (2009). About some strategies of the programming of tool route by developing of control programs for thermal cutting machines. *Vestnik UGATU*, vol. 13, no 2, pp. 280–286. (in Russian)
25. **Petunin, A.A.** (2009). Methodological and theoretical foundations of automation of design of cutting sheet materials on machines with numerical control: D. Tekh. Sc. Thesis. Ekaterinburg: UGTU-UPI, 348 p. (in Russian)
26. **Petunin, A.A., Tavaeva, A.F.** (2015). Optimization of tool route for cnc shape cutting machines provided that working stroke speed is not constant value. *Fundamentalnyye issledovaniya*, no. 6-1, pp. 56–62. (in Russian)
27. **Tavaeva, A.F., Petunin, A.A.** (2018). The accurate calculation of parts treatment cost from sheet metal on the cnc laser cutting machine in problem of tool routing optimization. *Modeling, Optimization and Information Technology*, vol. 6, no. 4, pp. 298–312. DOI: 10.26102/2310-6018/2018.23.4.022 (in Russian)
28. **Ye, J., Chen, Z.G.** (2013). An optimized algorithm of numerical cutting-path control in garment manufacturing. *Advanced Materials Research*, vol. 796, pp. 454–457. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.796.454
29. **Dewil, R., Vansteenwegen, P., Cattrysse, D.** (2014). Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters. *International Journal of Production Research*, vol. 52, issue 20, pp. 5965–5984. DOI: 10.1080/00207543.2014.895064
30. **Frolovskiy, V.D.** (2005). Automation of design of control programs for thermal cutting of metal on CNC equipment. *Informatsionnyye tekhnologii v proyektirovanii i proizvodstve*, no. 4, pp. 63–66. (in Russian)
31. **Gutin, G., Punnen, A.P.** (2002). The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 850 p.
32. **Cook, W.J.** (2012). In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton University, 228 p.
33. **Khachai, D., Sadykov, R., Battaia, O., Khachay, M.** (2023). Precedence constrained generalized traveling salesman problem: Polyhedral study, formulations, and branch-and-cut algorithm. *European Journal of Operational Research*, vol. 309, issue 2, pp. 488–505. DOI: 10.1016/j.ejor.2023.01.039
34. **Bellman, R., Dreyfus, S.** (1965). Applied problems of dynamic programming. Moscow: Nauka, 460 p. (in Russian)
35. **Papadimitriou, H., Steiglitz, K.** (1985). Combinatorial optimization. Algorithms and complexity. Moscow: Mir, 510 p.

Сведения об авторах

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный ведущий сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, agchentsov@mail.ru.

Полешкина Ирина Олеговна, доктор технических наук, доцент, старший научный сотрудник Московского государственного технического университета гражданской авиации, i.poleshkina@mstuca.ru.

Ченцов Алексей Александрович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, chentsov.a@binsys.ru.

Ченцов Павел Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, chentsov.p@mail.ru.

Information about the authors

Alexandr G. Chentsov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Leading Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, agchentsov@mail.ru.

Irina O. Poleshkina, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, ipoleshkina@mail.ru.

Alexey A. Chentsov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, chentsov.a@binsys.ru.

Pavel A. Chentsov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, chentsov.p@mail.ru.

Поступила в редакцию	13.11.2025	Received	13.11.2025
Одобрена после рецензирования	22.12.2025	Approved after reviewing	22.12.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

МАШИНОСТРОЕНИЕ

- 2.5.12 – Аэродинамика и процессы теплообмена летательных аппаратов;
2.5.13 – Проектирование, конструкция и производство летательных аппаратов;
2.5.14 – Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов;
2.5.15 – Тепловые электроракетные двигатели и энергоустановки летательных аппаратов;
2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

УДК 629.7.01, 539.3

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-84-96

Методики определения жесткостных характеристик лопасти несущего винта вертолета на базе вычислительного эксперимента

М.В. Каргаев^{1,2}, И.С. Солодилов²

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

²Национальный центр вертолетостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова, Томилино, Россия

Аннотация: В связи с широким использованием композиционных материалов в конструкциях лопастей несущего винта (ЛНВ) вертолетов необходимо уделять особое внимание контролю получаемых жесткостных характеристик на всех этапах их разработки и эксплуатации. Известные экспериментальные методы контроля имеют присущие им ограничения и могут быть использованы только на поздних этапах разработки лопастей, а также на этапе их серийного производства. В настоящей работе предлагаются методики определения жесткостных характеристик композитной лопасти по результатам вычислительного эксперимента, выполняемого на базе метода конечных элементов в подмодуле MSC.Laminate Modeler вычислительного комплекса MSC.Patran/Nastran, и численной обработки полученных деформаций модельной лопасти, пригодные для использования также и на этапах проектирования и отработки конструкции ЛНВ. Численная обработка результатов выполняется по соотношениям, полученным в результате перехода от исходных уравнений изгиба и кручения консольно закрепленной балки переменного сечения, моделирующей лопасть, к их дискретной матричной записи. Для чего по длине лопасти выбираются расчетные сечения, количество и расположение которых зависит от особенностей ее конструкции. При этом значения старших производных (кривизны и относительного угла закручивания), входящих в указанные уравнения, вычисляются по формулам, представляющим их разностные аппроксимации. Предложенные методики апробированы на конечно-элементной модели ЛНВ вертолета типа Ми-34. Получены оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных жесткостных характеристик.

Ключевые слова: вертолет, лопасть несущего винта, вычислительный эксперимент, конечно-элементная модель, композиционные материалы, жесткость.

Для цитирования: Каргаев М.В., Солодилов И.С. Методики определения жесткостных характеристик лопасти несущего винта вертолета на базе вычислительного эксперимента // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 84–96. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-84-96

Methods for determining the stiffness properties of a helicopter main rotor blade based on computational experiments

M.V. Kargaev^{1,2}, I.S. Solodilov²

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

²National Helicopter Center Mil&Kamov, Tomilino, Russia

Abstract: Due to the widespread use of composite materials in the designs of helicopter main rotor blades (MRB), special attention should be paid to monitoring the obtained stiffness characteristics at all stages of their development and operation. The available

experimental control methods have inherent limitations and can only be used at the late stages of blade development, as well as at the stage of mass production. This paper proposes the methods for determining the stiffness properties of a composite blade based on the results of a computational experiment, performed on the basis of the finite element method (FEM) in the MSC.Laminate Modeler submodule of the MSC.Patran/Nastran computing complex and numerical processing of the obtained deformations of the model blade suitable for use also during the design and development stages of the MRB. Numerical processing of the results is performed according to the ratios obtained as a result of the transition from the initial equations of bending and torsion of a cantilevered beam of variable cross-section, modeling the blade to their discrete matrix notation. For this purpose, the calculated sections are selected based on the blade length, the number and location of which depend on the features of its design. In this case, the values of the higher derivatives (curvature and relative twist angle) included in the specified equations are calculated by formulas representing their difference approximations. The proposed methods have been tested on the FEM MRB of the Mil-34 (NATO reporting name: Hermit) helicopter. The estimates of the quality of the coincidence of the calculated and experimental stiffness properties are obtained.

Key words: helicopter, main rotor blade, computational experiment, finite element model, composite materials, stiffness.

For citation: Kargaev, M.V., Solodilov, I.S. (2026). Methods for determining the stiffness properties of a helicopter main rotor blade based on computational experiments. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 84–96. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-84-96

Введение

В конструкциях современных лопастей несущего винта вертолета [1] широко применяются композиционные материалы, благодаря чему удается достигать их больших ресурсов и сроков службы в сравнении с металлическими лопастями. Известно, что для изделий из композиционных материалов необходим особый контроль стабильности массово-жесткостных и прочностных характеристик. В особенности это важно для лопастей, являющихся особо ответственными агрегатами, разрушение которых в полете с большой вероятностью приводит к катастрофе [2]. Контроль за жесткостными характеристиками лопастей, а именно изгибными в плоскостях наименьшей и наибольшей жесткости, а также на кручение, необходимо выполнять на этапах их разработки, производства и эксплуатации.

При проектировании лопастей их жесткостные характеристики используются при [3–5] построении резонансных диаграмм; расчете напряжений и деформаций лопасти и агрегатов несущей системы на земле и в полете, а также при оценке их ресурса; анализе границ отстройки от различных видов неустойчивости типа флаттер, дивергенция и земной резонанс. На этапе серийного производства вертолета важность контроля массово-жесткостных характеристик лопасти главным образом обусловлена их влиянием на уровень нагрузок, действующих на лопасти и агрега-

ты несущей системы на земле и в полете, от величин которых зависит их ресурс.

Экспериментальное определение жесткостных характеристик лопасти не может быть выполнено непосредственными измерениями и традиционно осуществляется с использованием кривизномера и дифференциального угломера [6, 7]. Указанные средства и методики определения жесткостных характеристик лопасти имеют присущие им погрешности [8]. Точность определения жесткостных характеристик значительно зависит от расстояний между опорами кривизномера и дифференциального угломера, величины которых определяют характерный размер участка лопасти, на котором находится его средняя жесткость. Так, на участках лопасти с резко меняющимися характеристиками, например в комлевой части лопасти, погрешности значительны. При этом на точности определения жесткостных характеристик могут сказываться и небольшие деформации рассматриваемого участка лопасти, полученные в результате нагружения при относительно малом значении прикладываемой нагрузки, ограничиваемой соображениями прочности конструкции.

Указанные недостатки натуральных испытаний могут быть частично нивелированы при имитации процедуры нагружения лопасти в численном эксперименте. Обзор и анализ применяемых методов численного определения жесткостных характеристик авиацион-

ных конструкций приведен в работе [9]. Представляется перспективным подход определения жесткостных характеристик, сочетающий использование метода конечных элементов (МКЭ) [10–12] и искусственных нейронных сетей [13–15].

В настоящей работе предлагаются методики определения жесткостных характеристик композитной лопасти по результатам вычислительного эксперимента, выполняемого на базе МКЭ в подмодуле MSC.Laminate Modeler вычислительного комплекса MSC.Patran/Nastran [16], и численной обработки полученных деформаций модельной лопасти. Численная обработка результатов выполняется по соотношениям, полученным в результате перехода от исходных уравнений изгиба и кручения консольно закрепленной балки переменного сечения, моделирующих лопасть, к их дискретной матричной

записи. С такой целью по длине лопасти выбираются расчетные сечения, количество и расположение которых зависит от особенностей ее конструкции. При этом значения старших производных (кривизны и относительного угла закручивания), входящих в указанные уравнения, вычисляются по формулам, представляющим их разностные аппроксимации [17].

Выражения для определения жесткостных характеристик лопасти

Будем моделировать ЛНВ в виде балки переменного сечения. Тогда дифференциальные уравнения изгиба лопасти в плоскостях наименьшей и наибольшей жесткости имеют вид соответственно [9, 18]

$$EI_x \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = -P_y(z_l - z); \quad EI_y \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} = -P_x(z_l - z). \quad (1)$$

Здесь EI_x – жесткостная характеристика лопасти в плоскости наименьшей жесткости; EI_y – жесткостная характеристика лопасти в плоскости наибольшей жесткости; P_y – сосредоточенная на конце лопасти перерезывающая сила, действующая в плоскости наименьшей жесткости; P_x – сосредоточенная на конце лопасти перерезывающая сила, действующая в плоскости наибольшей жестко-

сти; y – перемещения сечений лопасти в плоскости наименьшей жесткости; x – перемещения сечений лопасти в плоскости наибольшей жесткости; z – продольная координата лопасти; z_l – продольная координата конечного сечения лопасти.

Граничные условия для уравнений (1), моделирующих лопасть консольно жестко закрепленную в комле, имеют вид

$$y_{z=0} = 0 \text{ и } y'_{z=0} = 0; \quad (EI_x y'')_{z=z_l} = 0 \text{ и } (EI_x y'')'_{z=z_l} = 0;$$

$$x_{z=0} = 0 \text{ и } x'_{z=0} = 0; \quad (EI_y x'')_{z=z_l} = 0 \text{ и } (EI_y x'')'_{z=z_l} = 0.$$

В (1) введем обозначения для кривизн лопасти в плоскостях наименьшей и наибольшей жесткости соответственно:

$$k_y = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}; \quad k_x = \frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Тогда с учетом (2) уравнения (1) примут вид

$$EI_x k_y = -P_y(z_l - z); \quad EI_y k_x = -P_x(z_l - z). \quad (3)$$

Представим уравнения (3) в матричном виде [9], для чего разобьем лопасть на n расчетных сечений, равномерно (с равным шагом друг от друга) расположенных по длине лопасти, после чего получим

$$[EI_x]\{k_y\} = \{P_y^z\}; [EI_y]\{k_x\} = \{P_x^z\}. \quad (4)$$

В уравнениях (4) обозначено: $[EI_x]$ и $[EI_y]$ – диагональные матрицы значений $EI_{x,i}$ и $EI_{y,i}$ в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$; $\{k_y\}$ и $\{k_x\}$ – столбцы кривизн (2) в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$; $\{P_y^z\}$ и $\{P_x^z\}$ – столбцы изгибающих моментов со значениями $-P_y(z_l - z_i)$ и $-P_x(z_l - z_i)$ в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$.

Решив прямую задачу для уравнений (4), получим

$$\{k_y\} = [EI_x]^{-1}\{P_y^z\}; \{k_x\} = [EI_y]^{-1}\{P_x^z\}. \quad (5)$$

Для определения значений элементов диагональных матриц (4) по известным из численного эксперимента координатам лопасти под

$$k_{y,i} = \frac{(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}))}{(z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \left[1 + \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})^2}{4(z_{i+1} - z_i)^2} \right]^{-3/2}; \quad k_{x,i} = \frac{(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}))}{(z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \left[1 + \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})^2}{4(z_{i+1} - z_i)^2} \right]^{-3/2}. \quad (8)$$

В выражениях (8) перемещения в расчетных сечениях определяются из разностей координат контрольных точек, расположенных вдоль оси лопасти, в нагруженном и ненагруженном состояниях (в индексах обозначено «н» и «бн» соответственно): $y_i = y_i^n - y_i^{bn}$, $x_i = x_i^n - x_i^{bn}$, $z_i = z_i^n$, $i = 1..n$.

Дифференциальное уравнение закручивания моделируемой лопасти имеет вид [9, 19]

$$(GI_{кр}\varphi')' = \mu. \quad (9)$$

действием сосредоточенных сил P_y и P_x , выполним замену левых частей уравнений (4) эквивалентными произведениями [9], а именно:

$$[EI_x]\{k_y\} = [k_y]\{EI_x\}; [EI_y]\{k_x\} = [k_x]\{EI_y\}. \quad (6)$$

В уравнениях (6) обозначено: $\{EI_x\}$ и $\{EI_y\}$ – столбцы значений $EI_{x,i}$ и $EI_{y,i}$ в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$; $[k_y]$ и $[k_x]$ – диагональные матрицы значений кривизн (2) в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$.

Тогда аналогично выражениям (5), учитывая (6), получим

$$\{EI_x\} = [k_y]^{-1}\{P_y^z\}; \{EI_y\} = [k_x]^{-1}\{P_x^z\}. \quad (7)$$

Элементы обратных матриц $[k_y]^{-1}$ и $[k_x]^{-1}$ имеют значения $1/k_{y,i}$ и $1/k_{x,i}$ ($i = 1, \dots, n$) соответственно. При этом значения $k_{y,i}$ и $k_{x,i}$ удобно вычислять, заменив кривизны (2) их центральными разностными аппроксимациями [17]:

Здесь $GI_{кр}$ – жесткостная характеристика лопасти на кручение; φ – угол закручивания сечений лопасти; μ – погонный крутящий момент.

Граничные условия для уравнения (9), моделирующего лопасть, консольно жестко закрепленную в комле, имеют вид

$$\varphi_{z=0} = 0 \text{ и } (GI_{кр}\varphi')_{z=z_l} = M_{кр},$$

где $M_{кр}$ – сосредоточенный крутящий момент на конце лопасти.

Проинтегрируем уравнение (9) по длине лопасти с учетом граничных условий (11), тогда получим

$$GI_{кр} \varphi' = M_{кр}. \quad (10)$$

Представим уравнение (10) в матричном виде так же, как и в случае с уравнениями изгиба, разбив лопасть на n расчетных сечений, после чего получим

$$[GI_{кр}] \{\varphi'\} = M_{кр} \{e\},$$

где $[GI_{кр}]$ – диагональная матрица значений $GI_{кр,i}$ в расчетных сечениях $i = 1, \dots, n$; $\{\varphi'\}$ – столбец относительных углов закручивания сечений лопасти; $\{e\}$ – столбец единиц размерности n .

Аналогично равенствам (6), представив относительные углы закручивания в виде диагональной матрицы, а жесткости на кручение в виде вектора-столбца, получим

$$[\varphi'] \{GI_{кр}\} = M_{кр} \{e\}.$$

Тогда вектор искомым жесткостных характеристик на кручение определяется выражением

$$\{GI_{кр}\} = M_{кр} [\varphi']^{-1} \{e\}. \quad (11)$$

Элементы обратной матрицы $[\varphi']^{-1}$ имеют значения $1/\varphi'_i$, $i = 1, \dots, n$. При этом значения φ'_i предлагается вычислять, заменив φ' центральной разностной аппроксимацией [17]:

$$\varphi'_i = \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2 \cdot (z_{i+1} - z_i)}. \quad (12)$$

Значения φ_i удобно вычислять, используя выражение для скалярного произведения, записанного для векторов образованных координатами точек «нуля» и «конца» хорд сечений лопасти (в индексах обозначено « nx » и

« kx » соответственно) в ненагруженном $\{a_i\} = \{a_{x,i}, a_{y,i}\} = \{x_i^{nx} - x_i^{kx}, y_i^{nx} - y_i^{kx}\}$ и нагруженном $\{b_i\} = \{b_{x,i}, b_{y,i}\} = \{x_i^{nx} - x_i^{kx}, y_i^{nx} - y_i^{kx}\}$ крутящим моментом состояниях, полагая $z_i = z_i^{nx} = z_i^{kx}$, $i = 1..n$:

$$\varphi_i = \arccos \left(\frac{a_{x,i} b_{x,i} + a_{y,i} b_{y,i}}{\sqrt{a_{x,i}^2 + b_{x,i}^2} \cdot \sqrt{a_{y,i}^2 + b_{y,i}^2}} \right). \quad (13)$$

Описание КЭМ лопасти

Для выполнения вычислительных экспериментов была разработана крупномасштабная конечно-элементная модель (КЭМ) композитной ЛНВ вертолета типа Ми-34 в подмодуле MSC.Laminate Modeler вычислительного комплекса MSC.Patran/Nastran с послойным моделированием пакетов композиционных элементов конструкции, включая задание их механических характеристик, с обеспечением подобия по геометрическим и массово-инерционным характеристикам. Подмодуль MSC.Laminate Modeler позволяет имитировать выкладку слоев на поверхностях разной кривизны, используя при этом различные алгоритмы локального и глобального перераспределения.

Схема построения моделей LM-пакетов из композиционных материалов представлена на рис. 1 и состоит из следующих этапов создания:

- модели однородных, преимущественно ортотропных материалов;
- LM-материалов, содержащих ссылки на созданный однородный материал, толщину слоя, алгоритм локальной драпировки и предельную деформацию сдвига в процессе драпировки;
- LM-слоев, содержащих ссылки на выбранные LM-материалы и направление выкладки;
- LM-пакетов, содержащих информацию о последовательностях укладки LM-слоев.

КЭМ ЛНВ построена с применением следующих типов конечных элементов: четы-

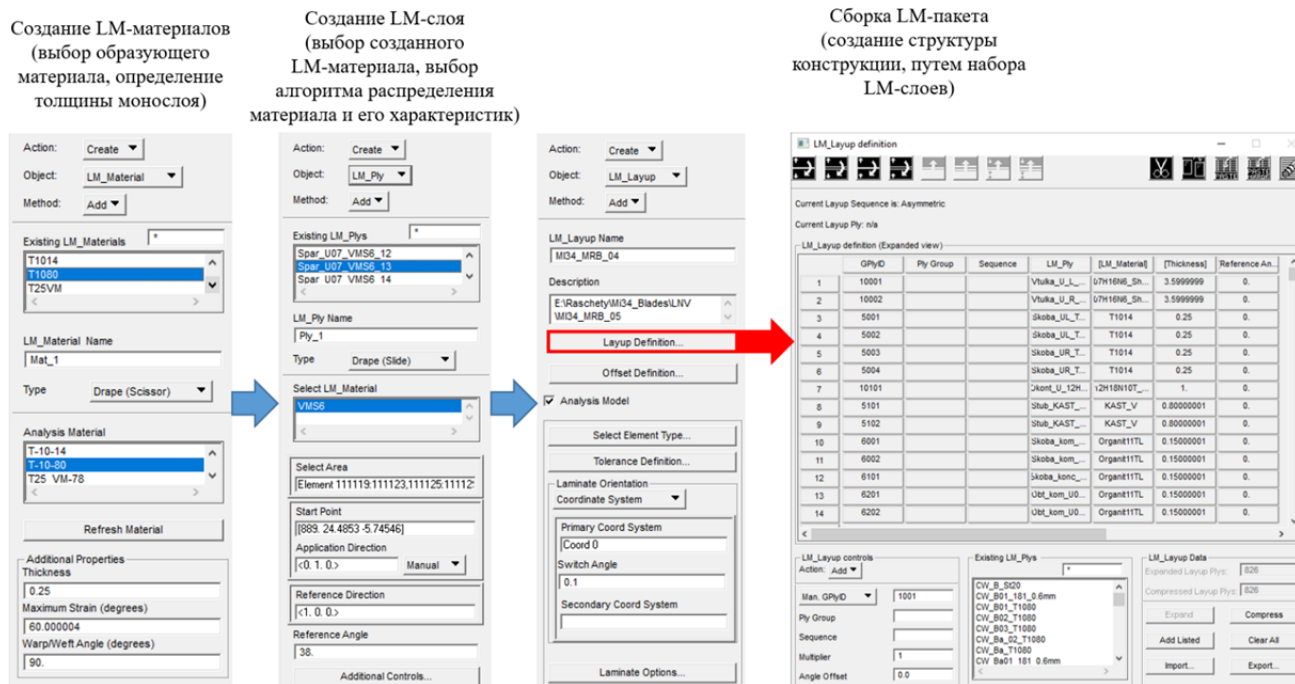


Рис. 1. Схема построения моделей LM-пакетов из композиционных материалов
Fig. 1. The scheme of building LM-packages models from composite materials

рехузовых прямоугольных (Quad) и трехузовых (Tri) элементов типа Shell для тонкостенных конструктивных элементов (лонжерон, обшивки, нервюры, оковки и др.); восьмиузовых элементов-параллелепипедов (Hex), шестиузовых (Wed) и четырехузовых элементов-тетраэдров (Tet) типа Solid для трехмерных конструктивных элементов (панопластовый наполнитель, кронштейн, противофлаттерный груз); одноузовых точечных элементов типа Point для задания масс балансировочных грузов. При этом для учета обводов теоретической поверхности лопасти при разработке КЭМ толщины пакетов Shell-элементов откладывались внутрь относительно элементов сетки. В комлевой части пакеты лонжерона лопасти по верхней и нижней поверхностям сформированы из 75 монослоев (с учетом пакетов усиления), задняя стенка лонжерона включает 9 монослоев. Далее по мере удаления от комлевой части количество монослоев в пакетах изменяется в соответствии с рис. 2 и на конце лопасти составляет 5 монослоев.

Система координат, применяемая при моделировании, выбрана следующим образом:

начало координат O расположено на верхней поверхности комлевой части лопасти между проушинами; ось Z направлена вдоль оси лопасти; ось Y направлена вверх; ось X образует правую тройку векторов с Y и Z . Распределение толщин по длине КЭМ ЛНВ и применяемая система координат представлены на рис. 2.

Методики выполнения вычислительных экспериментов

Перед началом вычислительных экспериментов по определению жесткостных характеристик ЛНВ определяется положение линии ее центров жесткости, например по методике [7]. Под центром жесткости сечения понимается точка, при приложении к которой поперечной силы не происходит поворота этого сечения относительно оси жесткости. В общем случае линия жесткости может состоять из нескольких участков прямых линий с одним или несколькими изломами.

Для определения жесткостной характеристики лопасти на кручение по результатам

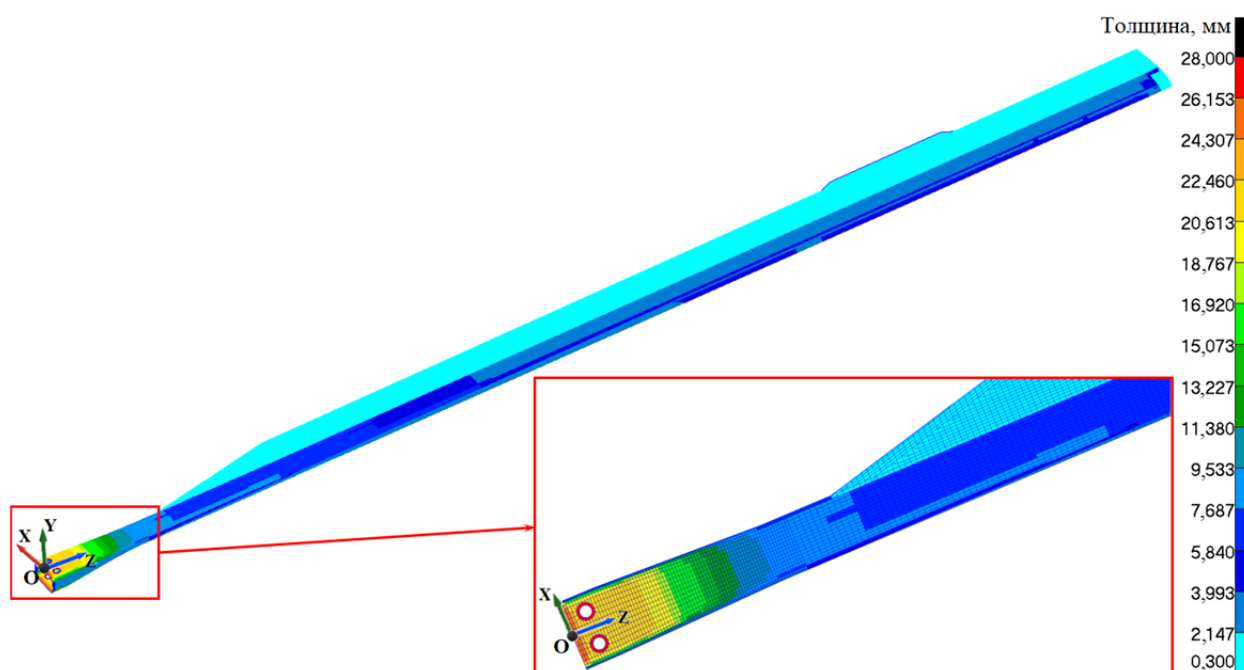


Рис. 2. Распределение толщин по длине КЭМ ЛНВ с выбранной системой координат
Fig. 2. Distribution of thicknesses along the length of the FEM MRB with the selected frame of references

вычислительного эксперимента, выполняемого на базе МКЭ, предлагается следующая последовательность операций.

1. Модель ЛНВ фиксируется через стыковочные проушины, расположенные в комле лопасти, – условия закрепления соответствуют жесткой заделке.

2. Выбираются контрольные точки на модели ЛНВ и определяются их координаты $\{x_i^{hx}, y_i^{hx}, z_i^{hx}\}$ и $\{x_i^{kx}, y_i^{kx}, z_i^{kx}\}$ («нуль» и «конец» хорд сечений) в ненагруженном состоянии лопасти, $i = 1, \dots, n$.

3. К модели ЛНВ в концевом сечении со стороны законцовки прикладывается пара сил, создающая крутящий момент относительно оси жесткости в направлении часовой стрелки при виде на лопасть от комля к законцовке. Собственная масса лопасти не учитывается.

4. Определяются координаты контрольных точек ЛНВ под действием нагрузки пункта 3.

5. Определяются дискретные значения жесткостной характеристики ЛНВ по формулам (11–13).

Для определения изгибных жесткостных характеристик ЛНВ в плоскостях наимень-

шей и наибольшей жесткости по результатам вычислительного эксперимента, выполняемого на базе МКЭ, предлагается приведенная последовательность операций.

1. Модель ЛНВ фиксируется через стыковочные проушины, расположенные в комле лопасти, – условия закрепления соответствуют жесткой заделке.

2. Выбираются контрольные точки на модели ЛНВ, расположенные вдоль оси лопасти, и определяются их координаты $\{x_i^{\delta n}, y_i^{\delta n}\}$ в ненагруженном состоянии лопасти, $i = 1, \dots, n$.

3. К модели ЛНВ в концевом сечении со стороны законцовки прикладывается перерезывающая сила в плоскости наименьшей/наибольшей жесткости. Собственная масса лопасти не учитывается.

4. Определяются координаты контрольных точек ЛНВ $\{x_i^h, y_i^h, z_i^h\}$ под действием нагрузки пункта 3.

5. Определяются дискретные значения жесткостных характеристик ЛНВ по формулам (8)–(9).

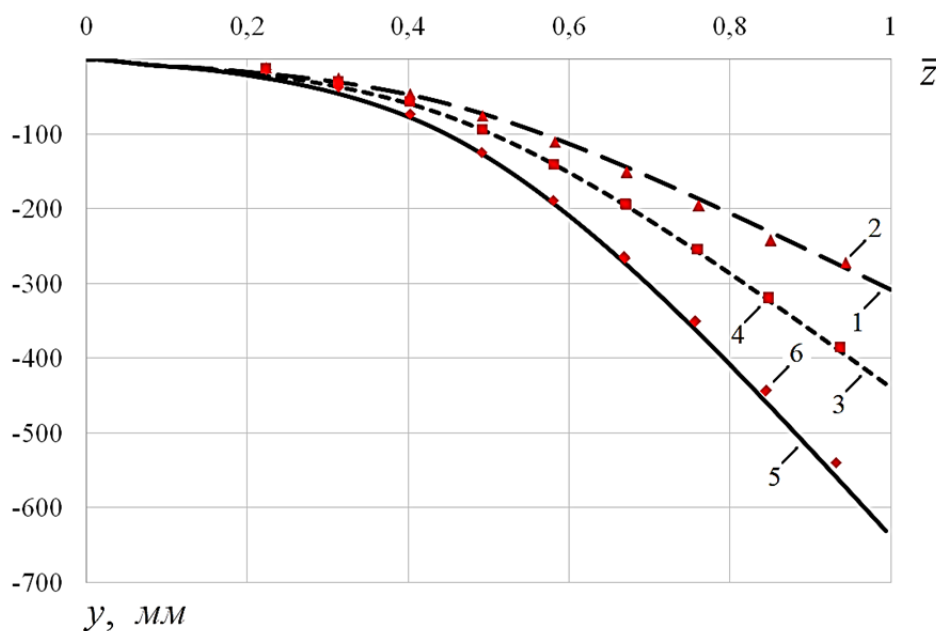


Рис. 3. Перемещения лопасти в плоскости наименьшей жесткости: 1, 3, 5 – расчет; 2, 4, 6 – эксперимент
Fig. 3. Blade deflections in the plane of least stiffness: 1, 3, 5 – estimated; 2, 4, 6 – experimental

Таблица 1
Table 1

Оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных перемещений лопасти
Quality estimates of the match between the calculated and experimental deflection of the blade

Обозначения кривых на рисунке 2	Нагружение в плоскости наименьшей жесткости ЛНВ	SSE	RMSE	R-square
1, 2	Собственная масса	0,000716	0,007726	0,991255
2, 4	Собственная масса + 2 кг в концевом сечении ЛНВ	0,000222	0,004304	0,998654
5, 6	Собственная масса + 5 кг в концевом сечении ЛНВ	0,001447	0,010980	0,995833

Результаты вычислительных экспериментов

Перед проведением вычислительных экспериментов по определению жесткостных характеристик ЛНВ вертолета типа Ми-34 выполнялась валидация КЭМ путем сравнения расчетных и экспериментальных перемещений лопасти в плоскости наименьшей жесткости под действием распределенной массы лопасти и сосредоточенной силы, действующей в соответствующей плоскости и приложенной в концевом сечении лопасти.

Расчетные и экспериментальные распределения перемещений ЛНВ по длине лопасти (в относительных величинах \bar{z}) приведены на рис. 3 (обозначения кривых в соответствии с табл. 1). Оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных перемещений, выраженные значениями критериев качества подгонки [20] SSE, RMSE, R-square, приведены в табл. 1.

Из анализа полученных (табл. 1) значений критериев SSE, RMSE, R-square для сравниваемых перемещений ЛНВ следует хорошее совпадение их расчетных и экспериментальных значений. Что в свою очередь свидетель-

Таблица 2
Table 2

Оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных жесткостных характеристик
Quality estimates of the match between calculated and experimental stiffness properties

Жесткостная характеристика	SSE	RMSE	R-square
EI_x	$1,627684 \cdot 10^{-9}$	0,000013	0,731083
EI_y	$1,804455 \cdot 10^{-7}$	0,000134	0,717295
$GI_{кр}$	$2,050299 \cdot 10^{-9}$	0,000016	0,728205

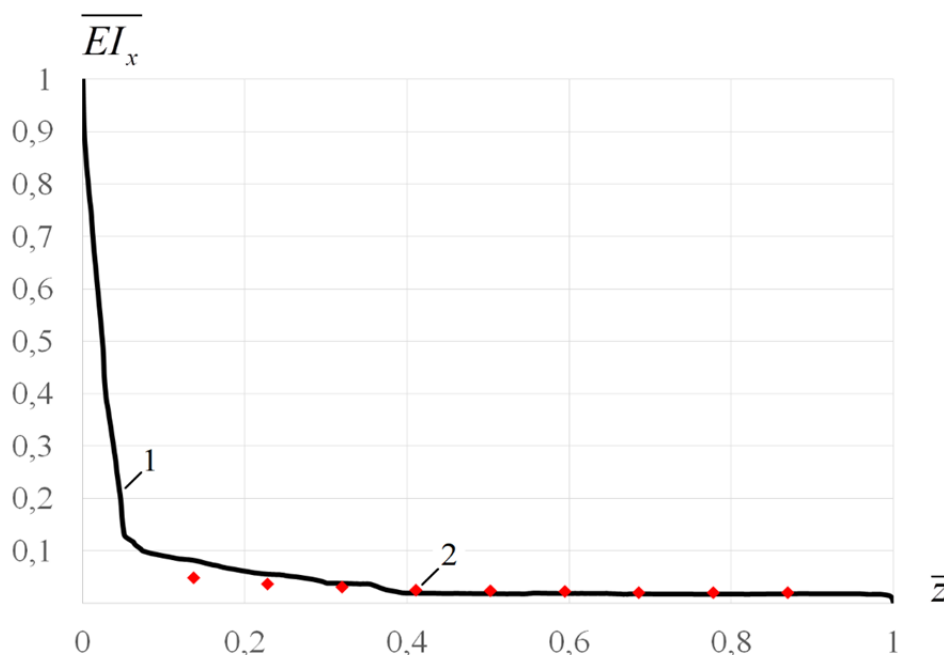


Рис. 4. Нормированные жесткостные характеристики лопасти в плоскости наименьшей жесткости:
1 – расчет; 2 – эксперимент

Fig. 4. The normalized stiffness properties of the blade in the plane of least stiffness:
1 – estimated; 2 – experimental

ствует о достаточном подобии КЭМ натурной ЛНВ.

Распределения нормированных (по максимальным величинам) изгибных ($\overline{EI_x}$ и $\overline{EI_y}$) и крутильных $\overline{GI_{кр}}$ жесткостных характеристик по длине лопасти (в относительных величинах \bar{z}), полученных в эксперименте и рассчитанных по предлагаемым в настоящей статье методикам, представлены на рис. 4–6. Оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных жесткостных характеристик, выраженные значениями кри-

териев качества подгонки [20] SSE, RMSE, R-square, приведены в табл. 2.

Из анализа полученных (табл. 2) значений критериев SSE, RMSE, R-square для сравниваемых жесткостных характеристик ЛНВ следует удовлетворительное совпадение их расчетных и экспериментальных значений. Это в совокупности главным образом обусловлено тем, что:

1) КЭМ ЛНВ не полностью соответствует натурной ЛНВ. А также условия закрепления и приложения нагрузки для КЭМ ЛНВ не идентичны таковым, имевшим место для натурной ЛНВ;

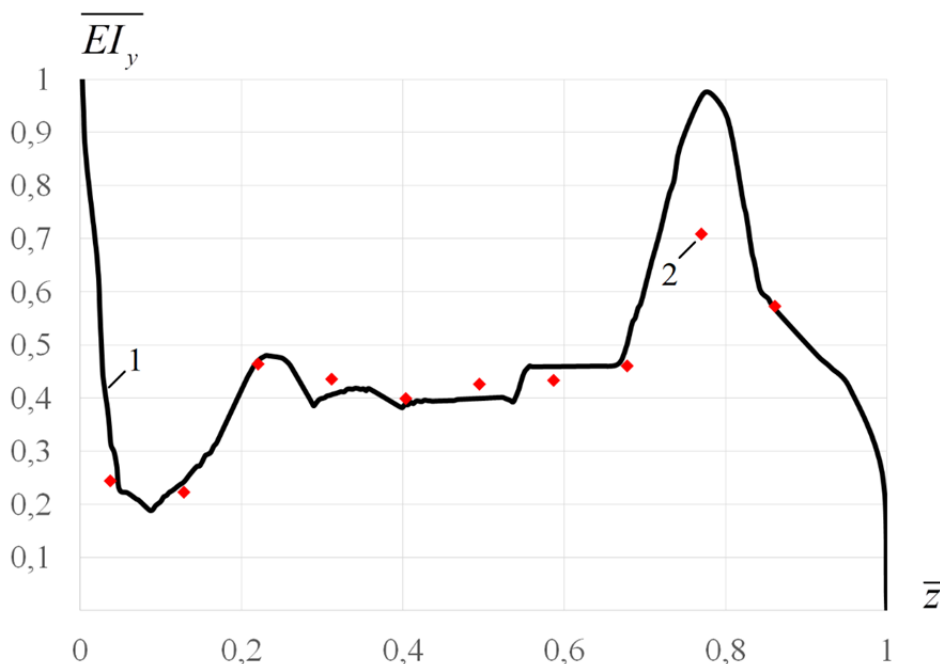


Рис. 5. Нормированные жесткостные характеристики лопасти в плоскости наибольшей жесткости:
1 – расчет; 2 – эксперимент
Fig. 5. The normalized stiffness characteristics of the blade in the plane of maximum stiffness:
1 – estimated; 2 – experimental

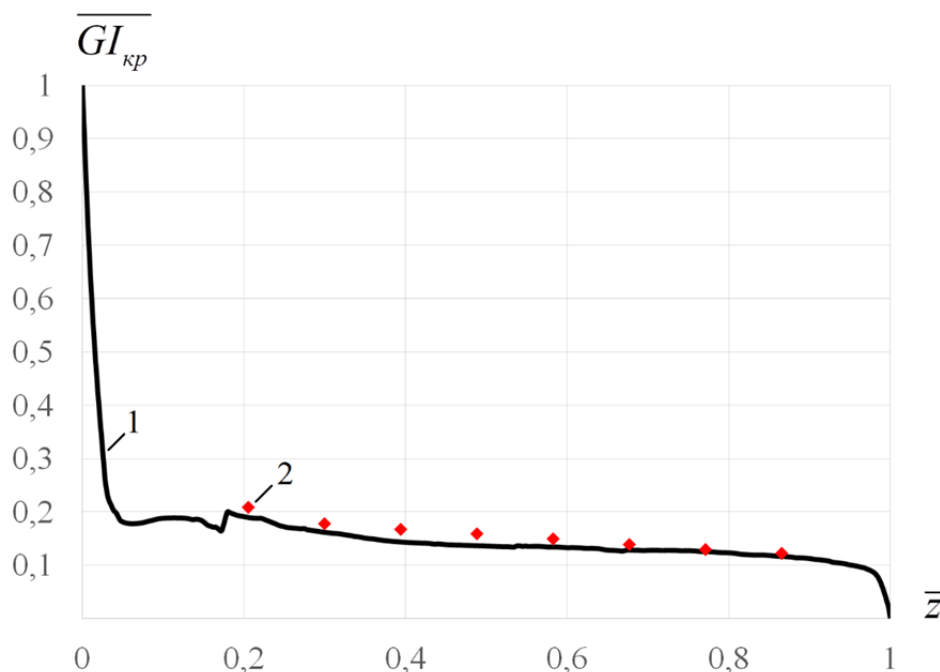


Рис. 6. Нормированные жесткостные характеристики лопасти на кручение:
1 – расчет; 2 – эксперимент
Fig. 6. The normalized torsional stiffness characteristics of the blade:
1 – estimated; 2 – experimental

2) кривизномер и дифференциальный угломер определяют средние значения соответствующих жесткостных характеристик на

контролируемом участке ЛНВ, равном расстоянию между их крайними опорами. В рассматриваемых экспериментах это расстояние

составляло 400 мм, а при расчете шаг разбиения не превышал 10 мм. Результат такого осреднения заметно проявляется на участках лопасти с резко изменяющимися жесткостными характеристиками, например на участке \bar{z} от 0,7 до 0,9 на рис. 5;

3) рассмотренные натурные ЛНВ вертолета типа Ми-34 имеют производственный допуск на разброс жесткостных характеристик в контрольных сечениях до 7 %. Поэтому принятые для валидации экспериментально полученные жесткостные характеристики могут отличаться от таковых, полученных для других натуральных лопастей в указанном диапазоне. То есть статистически возможно экспериментально получить жесткостные характеристики ЛНВ, имеющие лучшее совпадение с полученными расчетными значениями.

Заключение

В результате апробации на КЭМ ЛНВ вертолета типа Ми-34 предложенных методик определения жесткостных характеристик по результатам вычислительного эксперимента, выполняемого на базе МКЭ в подмодуле MSC.Laminate Modeler вычислительного комплекса MSC.Patran/Nastran, и численной обработки полученных деформаций, получены удовлетворительные оценки качества совпадения расчетных и экспериментальных жесткостных характеристик. Предложенные методики могут быть рекомендованы для использования на этапах проектирования и обработки конструкции ЛНВ.

Список литературы

1. **Бохоева Л.А., Пнев А.Г.** Выбор и обоснование оптимальной технологии изготовления лопасти вертолета из композиционных материалов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 5. С. 37–42.
2. **Арепьев А.Н., Громов М.С., Шапкин В.С.** Вопросы эксплуатационной живучести авиаконструкций. М.: Воздушный транспорт, 2002. 424 с.

3. **Johnson W.** Rotorcraft Aeromechanics. NY.: Cambridge University Press, 2013. 927 p.

4. **Richard L.B.** Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity. 2nd ed. Washington: AIAA, 2006. 584 p. DOI: 10.2514/4.862373

5. **Каргаев М.В.** Расчет совместных изгибно-крутильных колебаний лопасти при раскрутке и торможении несущего винта вертолета в условиях ветра // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31, № 4. С. 101–112.

6. **Амирьянц Г.А., Малютин В.А.** Об экспериментальном определении жесткостных характеристик авиационных конструкций [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2018. № 103. 29 с. URL: https://trudymai.ru/upload/iblock/88e/Amiryants_Malyutin_rus.pdf?lang=ru&issue=103 (дата обращения: 09.06.2025).

7. **Ишмуратов Ф.З., Малютин В.А., Найко Ю.А.** Расчетная схема крыла большого удлинения на основе результатов жесткостных испытаний // Труды ЦАГИ. 2013. № 2738. С. 171–182.

8. **Малютин В.А., Мамедов О.С., Поповский В.Н., Фролов А.В.** Оценка погрешностей определяемой балочной изгибной жесткости авиационных конструкций для применяемых экспериментальных методов / В.А. Малютин, О.С. Мамедов, В.Н. Поповский, А.В. Фролов // Труды ЦАГИ. 2023. № 2815. С. 3–15.

9. **Костин В.А., Валитова Н.Л., Филясова В.И.** Об одном подходе к определению жесткости крыла по заданным деформациям // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31, № 4. С. 123–130.

10. **Каменев С.В.** Основы метода конечных элементов в инженерных приложениях: учеб. пособие. Оренбург: ОГУ, 2019. 110 с.

11. **Moaveni S.** Finite element analysis: Theory and application with ANSYS. 4th ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2015. 929 p.

12. **Oñate E.** Structural analysis with the finite element method. linear statics. Volume 2: Beams, Plates and Shells. Heidelberg: Springer Netherlands, 2013. 864 p.

13. **Trivailo P.** Inverse problem of aircraft structural parameter estimation: application of

neural networks / P. Trivailo, S.D. Dulikravich, D. Sgarioto, T. Gilbert // *Inverse Problem in Science and Engineering*. 2006. Vol. 14, no. 4. Pp. 351–363. DOI: 10.1080/17415970600573411

14. Shi F. Combining finite element simulation to analyse the viscoelastic mechanical inverse problem of asphalt pavement // *Archives Des Sciences*. 2024. Vol. 74, no. 4. Pp. 57–66. DOI: 10.62227/as/74409

15. Курченко Н.С., Алексейцев А.В. Идентификация силовых воздействий на несущую систему с использованием нейросетевых технологий // *Инженерный вестник Дона*. 2023. № 9 (105). С. 258–267.

16. Скворцов Ю.В., Глушков С.В., Хромов А.И. Моделирование композитных элементов конструкций и анализ их разрушения в САЕ-системах MSC.Patran-Nastran и ANSYS: учеб. пособие. Самара: Из-во СГАУ, 2012. 148 с.

17. Вермель В.Д. Основы вычислительной (инженерной) геометрии. М.: Инновационное машиностроение, 2021. 351 с.

18. Каргаев М.В. Расчет напряжений в лопасти несущего винта вертолета на базе нелинейной модели нагружения при статическом воздействии ветра // *Вестник Московского авиационного института*. 2019. Т. 26, № 2. С. 34–42.

19. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. 16-е изд. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 544 с.

20. Тугыгин В.С. Цифровая обработка сигналов: лабораторный практикум. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. 116 с.

References

1. Bokhova, L.A., Pnev, A.G. (2011). Selection and justification of the optimal technology for manufacturing helicopter blades from composite materials. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye*, no. 5, pp. 37–42. (in Russian)

2. Arepev, A.N., Gromov, M.S., Shapkin, V.S. (2002). Issues of operational survivability of aircraft structures. Moscow: Vozdushnyy transport, 424 p. (in Russian)

3. Johnson, W. (2013). Rotorcraft Aero-mechanics. NY.: Cambridge University Press, 927 p.

4. Richard, L.B. (2006). Rotary wing structural dynamics and aeroelasticity. 2nd ed. AIAA, Washington, 584 p. DOI: 10.2514/4.862373

5. Kargaev, M.V. (2024). Blade coupled flexural-and-torsional vibrations computing while the helicopter main rotor spin-up and deceleration under wind conditions. *Aerospace MAI Journal*, vol. 31, no. 4, pp. 101–112. (in Russian)

6. Amir'yants, G.A., Malyutin, V.A. (2018). On experimental determination of aircraft structures stiffness characteristics. *Trudy MAI*, no. 103, 29 p. Available at: https://Trudy.mai.ru/upload/iblock/88e/Amiryants_Malyutin_rus.pdf?lang=ru&issue=103 (accessed: 09.06.2025). (in Russian)

7. Ishmuratov, F.Z., Malyutin, V.A., Naiko, Yu.A. (2013). Calculation scheme of a large elongation wing based on the results of stiffness tests. *Trudy TsAGI*, vol. 2738, pp. 171–182. (in Russian)

8. Malyutin, V.A., Mamedov, O.S., Popovskiy, V.N., Frolov, A.V. (2023). Estimation of errors in the determined beam bending stiffness of aircraft structures for applied experimental methods. *Trudy TsAGI*, vol. 2815, pp. 3–15. (in Russian)

9. Kostin, V.A., Valitova, N.L., Filyasova, V.I. (2024). On one approach to the wing rigidity determining by specified deformations. *Aerospace MAI Journal*, vol. 31, no. 4, pp. 123–130. (in Russian)

10. Kamenev, S.V. (2019). Fundamentals of the finite element method in engineering applications: Tutorial. Orenburg: OGU, 110 p. (in Russian)

11. Moaveni, S. (2015). Finite element analysis: Theory and application with ANSYS. 4th ed. Harlow, Pearson Education Limited, 929 p.

12. Oñate, E. (2013). Structural analysis with the finite element method. linear statics. Volume 2: Beams, Plates and Shells. Heidelberg, Springer Netherlands, 864 p.

13. Trivailo, P., Dulikravich, S.D., Sgarioto, D., Gilbert, T. (2006). Inverse problem of aircraft structural parameter estimation: applica-

tion of neural networks. *Inverse Problem in Science and Engineering*, vol. 14, no. 4, pp. 351–363. DOI: 10.1080/17415970600573411

14. **Shi, F.** (2024). Combining finite element simulation to analyse the viscoelastic mechanical inverse problem of asphalt pavement. *Archives Des Sciences*, vol. 74, no. 4, pp. 57–66. DOI: 10.62227/as/74409

15. **Kurchenko, N.S., Alekseytsev, A.V.** (2023). Identification of force loads on a bearing system using neural network technologies. *Engineering Journal of Don*, no. 9 (105), pp. 258–267. (in Russian)

16. **Skvorcov, U.V., Glushkov, S.V., Hromov, A.I.** (2012). Modeling of composite structural elements and analysis of their failure in CAE systems MSC.Patran-Nastran and ANSYS: Tuto-

rial. Samara: Izdatelstvo SGAU, 148 p. (in Russian)

17. **Vermel, V.D.** (2021). Fundamentals of computational (engineering) geometry. Moscow: Innovatsionnoye mashinostroyeniye, 352 p. (in Russian)

18. **Kargaev, M.V.** (2019). Stresses computing in the main rotor blade based on the nonlinear loading model under static wind impact. *Aerospace MAI Journal*, vol. 26, no. 2, pp. 34–42. (in Russian)

19. **Feodosev, V.I.** (2016). Resistance of materials. 16th ed. Moscow: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Baumana, 544 p. (in Russian)

20. **Turtygin V.S.** (2015). Digital Signal Processing: Lab Workshop. St. Petersburg: Izdatelstvo Politekhnicheskogo universiteta, 116 p. (in Russian)

Сведения об авторах

Каргаев Максим Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры проектирования и сертификации авиационной техники Московского авиационного института (национального исследовательского университета), руководитель группы Национального центра вертолетостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова, kargaev_mv@mail.ru.

Солодилов Илья Сергеевич, главный специалист Национального центра вертолетостроения им. М.Л. Миля и Н.И. Камова, ilya.solodilov.88@mail.ru.

Information about the authors

Maksim V. Kargaev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Design and Certification of Aviation Equipment Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), the Head of group, National Helicopter Center Mil&Kamov, kargaev_mv@mail.ru.

Ilya S. Solodilov, Chief Specialist, National Helicopter Center Mil&Kamov, ilya.solodilov.88@mail.ru.

Поступила в редакцию	11.08.2025	Received	11.08.2025
Одобрена после рецензирования	22.09.2025	Approved after reviewing	22.09.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

УДК 629.7

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-97-111

Статистическое моделирование боевого функционирования системы авиационных комплексов армейской авиации

А.Л. Тарасов¹

¹*Филиал Военного учебно-научного центра военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Сызрань, Россия*

Аннотация: Разработка математических моделей боевого функционирования авиационных комплексов является важнейшей задачей в области исследования перспектив развития авиационной техники и обоснования требований к ней. Одним из основных требований к данным моделям является их объективность и адекватность реальному боевому процессу, что достигается выбором соответствующего математического аппарата и уточнением содержания расчетных боевых задач при изучении опыта современных войн и вооруженных конфликтов. В работе предложена статистическая модель боевого функционирования системы авиационных комплексов армейской авиации (САК АА) при выполнении расчетной типовой (ударной) задачи – уничтожения одиночной малоразмерной подвижной наземной цели. Отличительной чертой разработанной модели является то, что она учитывает особенности боевого применения вертолетов в современных условиях (действия в составе боевых вертолетных групп, полет на предельно малых высотах, выполнение задач в условиях сильного противодействия средств противовоздушной обороны противника), а также элементы случайности в объеме рассматриваемой задачи. Представлено описание процедуры статистического моделирования боевого функционирования САК АА при выполнении рассмотренной расчетной задачи. Результатом моделирования явилась оценка вероятности случайного события – выполнение САК АА расчетной задачи с заданной точностью и надежностью. Предложены выражения для расчета показателей боевой эффективности и боевых свойств САК АА по результатам моделирования. На основе метода предельных точек осуществлена проверка адекватности разработанной модели. С использованием предложенной модели проведены исследования влияния значений параметров летно-технических характеристик вертолетов и комплексов их авиационного вооружения на изменение показателей боевой эффективности и боевых свойств САК АА при выполнении расчетной задачи. Разработанная модель может быть использована при построении системы моделей боевого функционирования авиационных комплексов армейской авиации с учетом современной концепции применения для проведения исследований по обоснованию тактико-технических требований к современным вертолетам военного назначения при формировании их технического облика.

Ключевые слова: статистическое моделирование, боевая эффективность, система авиационных комплексов армейской авиации.

Для цитирования: Тарасов А.Л. Статистическое моделирование боевого функционирования системы авиационных комплексов армейской авиации // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 1. С. 97–111. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-97-111

Statistical modeling of combat functioning for army aviation airborne complexes system

A.L. Tarasov¹

¹*Branch of the Military Educational and Scientific Centre of Air Force “Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy”, Syzran, Russia*

Abstract: The development of mathematical models of the combat functioning of army aviation aircraft complexes is the most important task in the field of researching the prospects for the development of aviation technology and substantiating requirements for it. One of the main requirements for these models is their objectivity and adequacy to the real combat process, which is achieved by choosing the appropriate mathematical apparatus and clarifying the content of designed combat tasks when studying the

experience of modern wars and armed conflicts. The paper proposes a statistical model for the combat functioning of the system of aircraft complexes of the army aviation (SAC AA) while performing a typical calculated strike mission – the destruction of a single small-sized mobile ground target. A distinctive feature of the developed model is that it takes into account the specifics of helicopter combat use under current conditions (operations within battle helicopter groups, flights at extremely low altitudes, carrying out missions amidst intense enemy air defense counteraction), as well as random elements within the scope of the considered task. A description of the procedure for statistical modeling of the combat functioning of the SAC AA during execution of this calculated task is provided. The result of the modeling was an assessment of the probability of a random event – execution of a calculated task with a given accuracy and reliability by the SAC AA. Expressions for calculating indicators of combat effectiveness and combat properties of SAC AA based on modeling results are proposed. Based on the method of limit points, the adequacy of the developed model has been verified. Using the proposed model, studies have been conducted on the influence of the values of the helicopter technical specifications and their air weaponry complexes on changes in the combat effectiveness and combat properties of SAC AA while executing the calculated task. The developed model can be used to construct a system of combat functioning models for the army aviation airborne complexes, taking into account the contemporary concept of application, thus enabling further investigations aimed at substantiating the tactical and technical requirements for modern military helicopters in shaping their technical design features.

Key words: statistical modeling, combat effectiveness, army aviation aircraft complexes system.

For citation: Tarasov, A.L. (2026). Statistical modeling of combat functioning for army aviation airborne complexes system. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 1, pp. 97–111. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-1-97-111

Введение

Моделирование боевого функционирования и оценка эффективности авиационных комплексов (АК) является важнейшим вопросом военно-научных исследований в области обоснования перспектив развития авиационной техники и предъявляемых к ней требований. Данный вопрос решается с использованием разработанных на едином оперативно-тактическом фоне расчетной операции систем моделей боевого функционирования АК (оперативно-тактических моделей боевых действий), описывающих выполнение ими совокупности расчетных (типовых) боевых задач в течение заданного периода времени [1–3].

Одним из основных требований к данным моделям является их объективность и адекватность реальному боевому процессу, что достигается выбором соответствующего математического аппарата моделирования и постоянным уточнением содержания расчетных боевых задач АК при изучении опыта современных войн и вооруженных конфликтов [1, 2].

Для построения моделей боевого функционирования АК используются различные методы исследования операций: линейное и динамическое программирование [2, 4, 5], марковские процессы [3], сетевое планирование [6], теория массового обслуживания [7], теория игр [2, 8, 9] и т. д. Однако наиболее

полно и объективно воспроизвести реальный боевой процесс и учесть элементы неопределенности (случайности) в объемах выполняемых АК боевых задач позволяет метод статистического моделирования [1, 10].

Опыт показывает, что современных условиях главным фактором, влияющим на изменение тактики применения вертолетов армейской авиации (АА) Вооруженных сил Российской Федерации, является насыщенная система противовоздушной обороны (ПВО) противника, обеспечиваемая разведывательной информацией о воздушной обстановке в режиме реального времени [11].

Целью исследования явилась разработка научно-методического аппарата статистического моделирования боевого функционирования системы авиационных комплексов армейской авиации (САК АА) при выполнении расчетной типовой (ударной) задачи с учетом современных условий и способов применения (использование боевых вертолетных групп, полет на предельно малых высотах, сильное противодействие средств ПВО противника различного типа).

Методы и методология исследования

Рассмотрим функционирование САК АА (боевой вертолетной группы) при выполнении расчетной типовой (ударной) задачи –

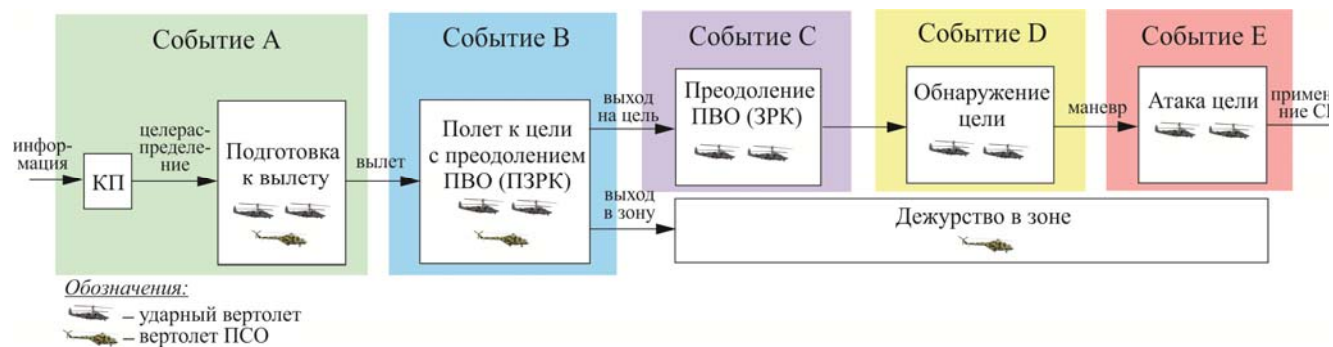


Рис. 1. Схема функционирования САК АА при выполнении расчетной типовой задачи
Fig. 1. Operation scheme of SAC AA while performing a typical calculated task

уничтожения одиночной малоразмерной подвижной наземной цели.

Состав САК АА: два ударных вертолета и один поисково-спасательный вертолет.

Способ боевых действий САК АА: удар по заданной цели с вылетом по вызову из положения дежурства на земле.

Схема функционирования САК АА представлена на рис. 1 и включает следующие последовательные этапы (события):

- получение задачи, выработка решения, целераспределение и подготовка вертолетов САК АА на площадке к боевому вылету (событие А);
- полет вертолетной группы по маршруту до рубежа поиска и обнаружения цели на предельно малой высоте $H_{пол}$ с крейсерской скоростью $V_{кр}$; противодействие со стороны противника на данном этапе выражается в возможном применении переносного зенитно-ракетного комплекса (ПЗРК) (при попадании в зону пусков ПЗРК группа выполняет разгон до максимальной скорости V_{max}) (событие В);
- в районе выполнения боевой задачи ударные вертолеты САК АА набирают высоту до $H_{обн}$ и выполняют полет со скоростью $V_{обн}$, что обеспечивает благоприятные условия для обнаружения цели и наведения управляемых ракет; противодействие со стороны противника на данном этапе выражается в применении зенитно-ракетного комплекса (ЗРК) (событие С);

- обнаружение цели ударными вертолетами при полете на высоте $H_{обн}$ со скоростью $V_{обн}$ (событие D);

- атака цели ударными вертолетами САК АА с пуском каждым по одной управляемой ракете; после применения бортовых средств поражения вертолеты выходят из зоны поражения ЗРК противника, занимая высоту $H_{пол}$ (событие E);

- поисково-спасательный вертолет САК АА при подходе к рубежу обнаружения цели занимает зону дежурства в воздухе, не входя в зону поражения ЗРК противника, оставаясь на высоте $H_{пол}$ и скорости $V_{кр}$.

Профиль полета САК АА при выполнении расчетной задачи представлен на рис. 2.

Критерием (показателем) боевой эффективности САК АА при действии по одиночной наземной цели является вероятность ее поражения $W_{пор}$. Если события, соответствующие этапам боевого функционирования САК АА, считать независимыми, то $W_{пор}$ представляется в виде произведения частных критериев эффективности [12]:

$$W_{пор} = P_0 \bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК} \bar{P}_{ПВО}^{ЗРК} P_{вых} P_{пор}, \quad (1)$$

где P_0 – вероятность своевременного вылета САК АА; $\bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК}$ – вероятность преодоления ПВО противника (ПЗРК) САК АА при полете к цели; $\bar{P}_{ПВО}^{ЗРК}$ – вероятность преодоления ПВО

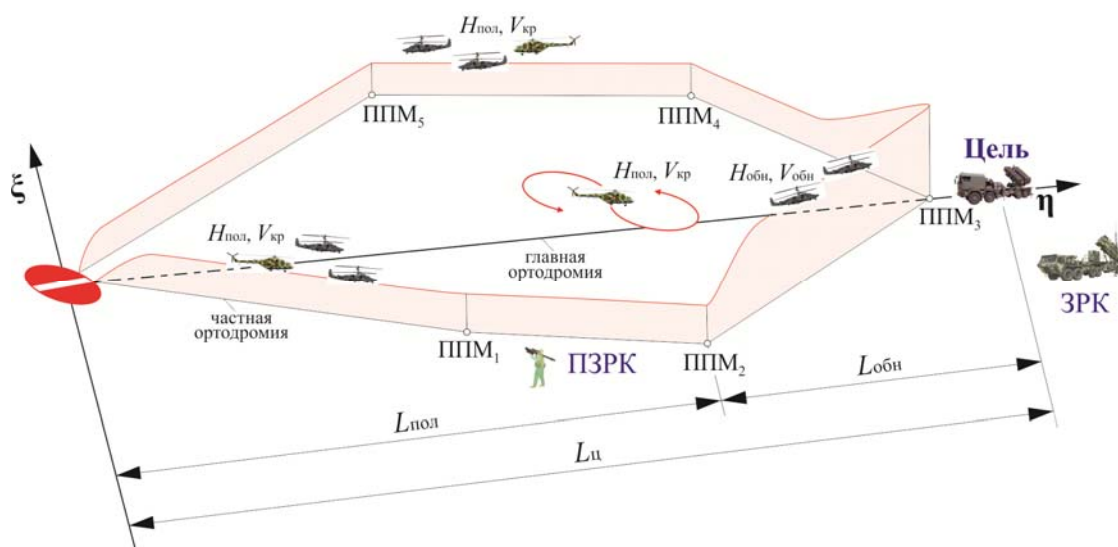


Рис. 2. Профиль полета САК АА при выполнении расчетной типовой задачи
Fig. 2. SAC AA flight profile while performing a typical designed task

противника (ЗРК) САК АА в зоне поиска и обнаружения цели; $P_{\text{вых}}$ – вероятность выхода САК АА на наземную цель; $P_{\text{пор}}$ – вероятность поражения цели бортовыми средствами поражения ударных вертолетов САК АА.

Вероятность своевременного вылета САК АА определяется по формуле [12]

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{t_y}{t_{\text{ож}}}}, \quad (2)$$

где t_y – время нанесения удара; $t_{\text{ож}}$ – время пребывания (ожидания) подвижного наземного объекта (цели) на позиции (является случайной величиной с показательным (экспоненциальным) законом распределения [13]).

$$t_y = t_{\text{су}} + t_{\text{подг}} + t_{\text{пол}}, \quad (3)$$

где $t_{\text{су}}$ – время, затрачиваемое на оценку обстановки, целераспределение и постановку боевой задачи САК АА; $t_{\text{подг}}$ – время подготовки САК АА к боевому полету в соответствии с заданием; $t_{\text{пол}}$ – время полета САК АА к цели.

$t_{\text{су}}$ и $t_{\text{подг}}$ – случайные величины с показательным законом распределения [13]; $t_{\text{пол}}$ – постоянная величина, зависящая от крейсерской скорости полета САК АА $V_{\text{кр}}$ и расстояния от площадки взлета САК АА до цели $L_{\text{ц}}$.

Вероятность преодоления ПВО (ПЗРК) каждым вертолетом САК АА (число одновременных наведений комплекса ограничивается количеством располагаемых каналов) определяется по формуле [12]

$$\bar{P}_{\text{ПВО}}^{\text{ПЗРК}} = e^{-\frac{\lambda^{\text{ПЗРК}} t^{\text{ПЗРК}} P_{\text{сб1}}^{\text{ПЗРК}}}{N_{\text{ц}}^{\text{ПЗРК}}}}, \quad (4)$$

где $\lambda^{\text{ПЗРК}}$ – средняя интенсивность пусков (число пусков в единицу времени) ПЗРК; $t^{\text{ПЗРК}}$ – время пребывания САК АА в зоне пусков ПЗРК, $N_{\text{ц}}^{\text{ПЗРК}}$ – количество целей, находящихся в зоне пусков ПЗРК (число вертолетов САК АА); $P_{\text{сб1}}^{\text{ПЗРК}}$ – вероятность сбития вертолета средством перехвата ПЗРК в одной атаке.

$$t^{\text{ПЗРК}} = \frac{l_{\text{зп}} + l_{\text{сн}}}{V_{\text{ц}}}, \quad (5)$$

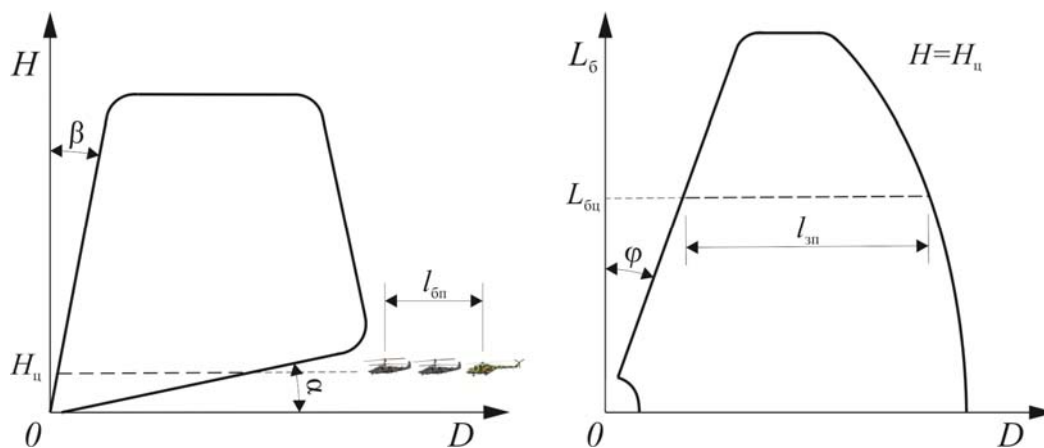


Рис. 3. Зона обстрела ПЗРК в вертикальной и горизонтальной плоскостях
Fig. 3. MANPADS engagement area in vertical and horizontal planes

где $l_{зп}$ – путь, преодолеваемый каждым вертолетом в зоне пусков ПЗРК; $l_{бп}$ – длина боевого порядка САК АА; $V_{ц}$ – скорость полета САК АА.

$$l_{зп} = \sqrt{\left(\frac{H_{пол}}{\operatorname{tg}\alpha} - H_{пол} \operatorname{tg}\beta\right)^2} - L_{бц}^2 - \frac{L_{бц}}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad (6)$$

где α , β , φ – углы, определяющие зону пусков ПЗРК (представлены на рис. 3); $L_{бц}$ – боковое отклонение САК АА от ПЗРК на плоскости земли (является случайной величиной с нормальным законом распределения [14]).

Вероятность преодоления ПВО (ЗРК) каждым вертолетом САК АА (количество каналов наведения комплекса обеспечивает одновременное наведение всех средств поражения), определяется по формуле [12]

$$\bar{P}_{ПВО}^{ЗРК} = e^{-\frac{N^{ЗРК}}{N_{ц}^{ЗРК}} P_{сб1}^{ЗРК}}, \quad (7)$$

где $N^{ЗРК}$ – количество средств поражения (перехвата) ЗРК (является случайной величиной), $N_{ц}^{ЗРК}$ – количество целей, находящихся в зоне пусков ЗРК (количество ударных вертолетов САК АА); $P_{сб1}^{ЗРК}$ – вероятность сбития вертолета средством перехвата ЗРК в одной атаке.

Поскольку возможные значения величины $N^{ЗРК}$ лежат в известных пределах и отсутствует информация о характере ее распределения (неизвестны особенности боевой работы ЗРК), то принимается, что данная случайная величина распределена равномерно [13]).

$P_{вых}$ определяется из условия, что экипажи вертолетов поиск и обнаружение цели осуществляют визуально [12]:

$$P_{вых} = P_{рц} \cdot P_{бн}, \quad (8)$$

где $P_{рц}$ – вероятность выхода одного вертолета в район цели; $P_{бн}$ – вероятность ближнего наведения вертолета.

$P_{рц}$ определяется как вероятность «попадания» вертолета на отрезок l_{Σ} , представленный на рис. 4, с размерами

$$l_{\Sigma} = 2l_{обн} + l_{ц}, \quad (9)$$

где $l_{обн}$ – дальность обнаружения малоразмерной наземной цели; $l_{ц}$ – размеры цели по оси Oz .

Дальность обнаружения малоразмерной наземной цели (типа танк, пусковая установка реактивной системы залпового огня и др.) определяется по формуле [12]

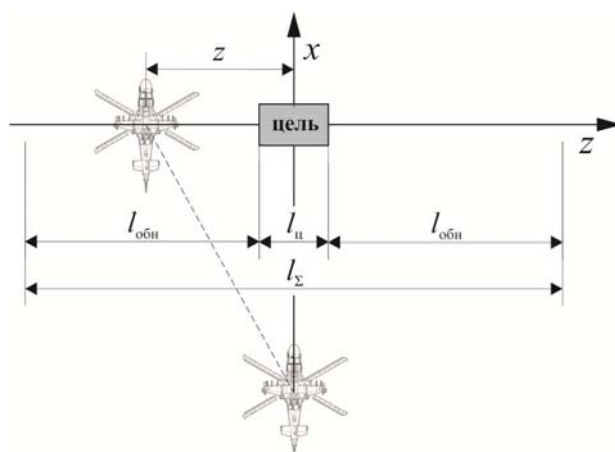


Рис. 4. К определению вероятности выхода вертолета в район цели
Fig. 4. To determine the probability of a helicopter approach to the target area

$$l_{обн} = 0,1\sqrt{H_{обн}\sqrt{D\cdot 10^3}} \cdot e^{-0,12\frac{3,6\cdot V_{обн}}{100}} + 0,78, \quad (10)$$

где D – максимально возможная дальность видимости цели (является случайной величиной с равномерным законом распределения, поскольку для заданной высоты полета вертолетов $H_{обн}$ диапазон ее возможных значений известен, а информация о характере распределения отсутствует (неизвестны особенности метеорологических условий, особенности рельефа местности и характер застроек в районе цели [13]).

При отсутствии систематических ошибок

$$P_{рц} = 2\Phi_0\left(\frac{l_{\Sigma}}{2\sigma_z}\right); \quad (11)$$

$$\sigma_z = 0,01L_{ц}, \quad (12)$$

где $L_{ц}$ – расстояние от площадки взлета вертолета до цели; σ_z – среднеквадратичное отклонение вертолета по оси Oz ; $\Phi_0\left(\frac{l_{\Sigma}}{2\sigma_z}\right)$ –

функция Лапласа – Гаусса.

В рассматриваемом случае поиск и обнаружение цели ведет пара ударных вертолетов САК АА, тогда [12]

$$P'_{рц} = 1 - (1 - P_{рц})^{N_{обн}}, \quad (13)$$

где $P'_{рц}$ – вероятность выхода ударных вертолетов САК АА в район цели; $N_{обн}$ – количество ударных вертолетов, ведущих поиск и обнаружение цели.

Исходя из того что вертолеты обладают высокими маневренными характеристиками, принимается $P_{обн} = 1$ [12]. Это означает, что если вертолеты САК АА, ведущие поиск и обнаружение, «попадают» на отрезок l_{Σ} , то цель ими будет атакована с ходу.

Таким образом:

$$P_{вых} = P'_{рц}. \quad (14)$$

Вероятность поражения цели бортовыми средствами поражения ударных вертолетов САК АА $P_{пор}$ определяется [12]:

$$P_{пор} = 1 - (1 - P_{пор1})^{N_{пор}}, \quad (15)$$

где $P_{пор1}$ – вероятность поражения цели одним ударным вертолетом при пуске одной ракеты; $N_{пор}$ – количество вертолетов, ведущих обстрел цели.

Процедура статистического моделирования боевого функционирования САК АА при выполнении рассмотренной расчетной задачи заключалась в следующем [14]:

- производился розыгрыш появления (непоявления) случайного события А – получения задачи, выработки решения, целераспределения и подготовки САК АА к боевому вылету, – зависящего от случайных параметров t_{cy} , $t_{подг}$ и $t_{ож}$: если полученное при моделировании программным способом случайное число $R_1 < P_0$, то считалось, что событие А произошло, если $R_1 \geq P_0$ – событие А не произошло;

- производился розыгрыш появления (непоявления) случайного события В – полета САК АА к цели с преодолением ПВО (ПЗРК), зависящего от случайного параметра $L_{обц}$: событие считалось произошедшим, если хотя бы один из вертолетов САК АА успешно преодолел данный этап (не был сбит); если полученное при моделировании программным способом для каждого вертолета САК АА случайное число $R_2 < \bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК}$, то считалось, что данный вертолет САК АА на рассматриваемом этапе не сбит, если $R_2 \geq \bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК}$ – вертолет сбит;

- производился розыгрыш появления (непоявления) случайного события С – полета ударных вертолетов САК АА на высоте $H_{обн}$ и со скоростью $V_{обн}$, с преодолением ПВО (ЗРК), зависящего от случайного параметра $N^{ЗРК}$: событие считалось произошедшим если хотя бы один из ударных вертолетов, преодолевших второй этап, успешно преодолел и данный этап; если полученное при моделировании программным способом для каждого ударного вертолета САК АА случайное число $R_3 < \bar{P}_{ПВО}^{ЗРК}$, то считалось, что данный ударный вертолет на рассматриваемом этапе не сбит, если $R_3 \geq \bar{P}_{ПВО}^{ЗРК}$ – вертолет сбит;

- производился розыгрыш появления (непоявления) случайного события D – обнаружения цели ударными вертолетами САК АА при полете на высоте $H_{обн}$ со скоростью $V_{обн}$, зависящего от случайного параметра D (поиск и обнаружение цели осуществляют ударные вертолеты, успешно пре-

одолевшие второй и третий этапы): если полученное при моделировании программным способом случайное число $R_4 < P_{вых}$, то считалось, что событие D произошло, если $R_4 \geq P_{вых}$ – событие D не произошло;

- производился розыгрыш появления (непоявления) случайного события E – атаки цели ударными вертолетами САК АА (успешно преодолевшими второй и третий этапы): если полученное при моделировании программным способом случайное число $R_5 < P_{пор}$, то считалось, что событие E произошло, если $R_5 \geq P_{пор}$ – событие E не произошло.

При моделировании каждый последующий этап процедуры реализовывался только в том случае, когда предыдущий был успешным. Результатом моделирования явилась оценка вероятности случайного события – выполнения САК АА типовой (ударной) расчетной боевой задачи с точностью $\varepsilon = 0,05$ при надежности (доверительной вероятности) $\gamma = 0,9$:

$$W_{пор}^* = \frac{m}{n}, \quad (16)$$

где m – число наступлений данного события; n – число реализаций (испытаний) при моделировании.

Требуемое число испытаний для получения нормальной оценки вероятности $W_{пор}^*$ с заданной точностью и надежностью определяется [14]:

$$n = \frac{u_\gamma^2 W_{пор}^* (1 - W_{пор}^*)}{\varepsilon^2}, \quad (17)$$

где $u_\gamma = \Phi_0^{-1} \left(\frac{\gamma}{2} \right)$ – обратная функция Лапласа – Гаусса.

Для последующего анализа результатов моделирования рассмотрены оценки вероятностей частных критериев эффективности САК АА, определяемые отдельно, без учета

факта успешного (неуспешного) преодоления системой предшествующих этапов (но с учетом накопления потерь вертолетов при прохождении системой второго и третьего этапов):

$$P_0^* = \frac{m_A}{n}; \quad (18)$$

$$\bar{P}_{\text{ПВО}}^{\text{ПЗРК}*} = \frac{m_B}{n}; \quad (19)$$

$$\bar{P}_{\text{ПВО}}^{\text{ЗРК}*} = \frac{m_C}{n}; \quad (20)$$

$$P_{\text{вых}}^* = \frac{m_D}{n}; \quad (21)$$

$$P_{\text{пор}}^* = \frac{m_E}{n}; \quad (22)$$

где m_A, m_B, m_C, m_D, m_E – число исходов, благоприятных событиям А, В, С, D и E соответственно; n – число реализаций при моделировании.

Исходные данные, использованные при моделировании, представлены в табл. 1 (летно-технические характеристики вертолетов, характеристики бортовых комплексов вооружения вертолетов, наземной системы управления, системы инженерно-авиационного обеспечения и систем ПВО противника отражают современный уровень их развития¹ [15–17] и не соответствуют конкретным образцам техники).

Таблица 1
Table 1

Исходные данные, используемые при моделировании
The initial data used in the modeling

Характеристика	Обозначение	Значение
Высота полета САК АА по маршруту до рубежа поиска цели, м	$H_{\text{пол}}$	20
Крейсерская скорость полета САК АА, км/ч	$V_{\text{кр}}$	250
Максимальная скорость полета САК АА, км/ч	$V_{\text{мах}}$	300
Высота полета ударных вертолетов САК АА на этапе поиска и обнаружения цели, м	$H_{\text{обн}}$	100
Скорость полета ударных вертолетов САК АА на этапе поиска и обнаружения цели, км/ч	$V_{\text{обн}}$	200
Расстояние от площадки взлета САК АА до цели, км	$L_{\text{ц}}$	150
Расстояние от площадки взлета САК АА до рубежа поиска цели, км	$L_{\text{пол}}$	80
Длина боевого порядка САК АА, м	$l_{\text{бп}}$	50
Время пребывания подвижного наземного объекта на позиции, мин (случайная величина с показательным законом распределения)	$t_{\text{ож}}$	среднее значение 120
Время оценки обстановки, целераспределения и постановки боевой задачи, мин (случайная величина с показательным законом распределения)	$t_{\text{су}}$	среднее значение 5
Время подготовки САК АА к боевому вылету, мин (случайная величина с показательным законом распределения)	$t_{\text{подг}}$	среднее значение 10
Вероятность сбития вертолета средством поражения ПЗРК	$P_{\text{сбл}}^{\text{ПЗРК}}$	0,4
Средняя интенсивность пусков ПЗРК, 1/с	$\lambda^{\text{ПЗРК}}$	0,04

¹ Вертолеты и беспилотные летательные аппараты России. М.: Студия Этника, 2020. 512 с.

Окончание таблицы 1
Continuation of Table 1

Характеристика	Обозначение	Значение
Боковое отклонение САК АА от ПЗРК на плоскости земли (случайная величина с нормальным законом распределения) математическое ожидание (курс САК АА на ПЗРК) $m_z = 0$, среднеквадратичное отклонение $\sigma_z = 1\ 500$ м	$L_{\text{бц}}$	
Углы, определяющие зону обстрела ПЗРК, градусы	$\alpha; \beta; \varphi$	0,3; 10; 10
Вероятность сбития вертолета средством поражения ЗРК	$P_{\text{сб1}}^{\text{ЗРК}}$	0,8
Количество средств перехвата ЗРК (случайная величина с равномерным законом распределения)	$N^{\text{ЗРК}}$	[0, 1]
Максимально возможная дальность видимости цели, км (случайная величина с равномерным законом распределения)	D	[4, 10]
Вероятность поражения цели одной ракетой ударного вертолета САК АА	$P_{\text{пор1}}$	0,9

В военно-научных исследованиях, связанных с оценкой боевой эффективности АК (систем АК), используются показатели их боевой эффективности (боевой потенциал (возможности), вероятность поражения цели) и боевых свойств (боевая мощь, мобильность, выживаемость) [1, 18]. Предлагаются выражения для расчета данных показателей по результатам моделирования боевого функционирования САК АА с использованием разработанной статистической модели.

Под боевой мощью САК АА понимается ее способность выполнить боевую задачу без учета противодействия противника (конкретной работы по своему предназначению) [1, 18]. Оценка боевой мощи САК АА определяется:

$$\Phi_S^* = \frac{m_\Phi}{n}, \quad (23)$$

где m_Φ – число наступлений события $\Phi = D \cdot E$; n – число реализаций при моделировании.

Выживаемость САК АА – способность САК АА сохранять возможность выполнения боевой задачи в условиях противодействия противника [1, 19]:

$$\Omega_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_{\Omega}}{n}, \quad (24)$$

где m_{Ω} – количество несбитых ударных вертолетов в каждой реализации; n – число реализаций при моделировании.

Мобильность САК АА – способность САК АА выполнить поставленную боевую задачу за требуемое (планируемое) время и подготовиться к выполнению следующей задачи (время цикла выполнения боевой задачи) [1, 18]:

$$\Psi_S = \frac{1}{t_{\text{cy}} + t_{\text{подг}} + 2t_{\text{пол}}}. \quad (25)$$

Оценка вероятности поражения цели (оценка вероятности выполнения САК АА боевой задачи) определяется по формуле (16).

Коэффициент боевых возможностей САК АА (интегральный показатель по отношению к боевой мощи, выживаемости и мобильности [1, 19]) определяется:

$$\chi = \frac{\Phi_S^* \cdot P_0^*}{N_{\text{уд.в}} - \Omega_S}, \quad (26)$$

где $N_{\text{уд.в}}$ – количество ударных вертолетов САК АА.

Таблица 2
Table 2

Результаты моделирования боевого функционирования САК АА
Modeling results of the combat functioning of the SAC AA

Событие		Оценка вероятности	
Обозначение	Описание	Обозначение	Значение
A	Своевременный вылет САК АА	P_0^*	0,7
B	Преодоление каждым вертолетом САК АА ПВО противника (ПЗРК) при полете к цели	$\bar{P}_{\text{ПВО}}^{\text{ПЗРК}*}$	0,96
C	Преодоление каждым ударным вертолетом САК АА ПВО противника (ЗРК) в зоне обнаружения цели	$\bar{P}_{\text{ПВО}}^{\text{ЗРК}*}$	0,84
D	Выход ударных вертолетов САК АА на наземную цель	$P_{\text{вых}}^*$	0,93
E	Поражение цели бортовыми средствами поражения ударных вертолетов САК АА	$P_{\text{пор}}^*$	0,8
Показатели боевой эффективности и боевых свойств САК АА			
Название		Обозначение	Значение
Оценка вероятности выполнения САК АА боевой задачи (оценка вероятности поражения цели)		$W_{\text{пор}}^*$	0,55
Оценка боевой мощи САК АА		Φ_S^*	0,78
Выживаемость САК АА		Ω_S	1,32
Мобильность САК АА, 1/час		Ψ_S	0,67
Коэффициент боевых возможностей САК АА		χ	0,32

Результаты исследования и обсуждение полученных результатов

В табл. 2 представлены полученные при моделировании оценки вероятностей случайных событий, соответствующих этапам боевого функционирования САК АА при выполнении расчетной типовой (ударной) задачи, значения показателей боевых возможностей и боевых свойств САК АА.

Поскольку результаты моделирования боевого функционирования САК АА при выполнении рассмотренной расчетной задачи невозможно сопоставить с результатами реальных боевых действий, то для проверки адекватности предложенной модели использовался метод предельных точек [19, 20].

В соответствии с данным методом на основе ряда предположений было обеспечено функционирование разработанной модели на режимах, при которых промежуточные и ко-

нечный результаты моделирования являются ожидаемыми.

Принятые предположения, ожидаемые и полученные результаты модельных экспериментов представлены в табл. 3. Анализ таблицы демонстрирует адекватность разработанной модели.

С использованием разработанной модели проведены исследования влияния значений параметров летно-технических характеристик вертолетов (максимальной и крейсерской скорости полета) и комплексов их авиационного вооружения (вероятности поражения цели) на изменение показателей боевой эффективности и боевых свойств САК АА при выполнении рассмотренной расчетной задачи.

Результаты исследований представлены на рис. 5. Точкой на графиках отмечены значения параметров летно-технических характеристик вертолетов, комплексов их авиационного вооружения, показатели боевой эффективности и боевых свойств САК АА, соответствующие исходным данным (табл. 1 и 2).

Таблица 3
Table 3

Исследование адекватности модели
Investigation of the model adequacy

Предположения			Результаты моделирования					
Описание	Реализация в модели	Ожидаемый результат	P_0^*	$\bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК^*}$	$\bar{P}_{ПВО}^{ЗРК^*}$	$P_{вых}^*$	$P_{пор}^*$	$W_{пор}^*$
С командного пункта представлена ложная информация о цели	$t_{ож} = 0$	$P_0^* = 0,$ $W_{пор}^* = 0$	0	0,96	0,84	0,93	0,8	0
Отсутствует противодействие ПЗРК противника	$\lambda^{ПЗРК} = 0$	$\bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК^*} = 1,$ $\bar{P}_{ПВО}^{ЗРК^*} \uparrow, P_{вых}^* \uparrow,$ $P_{пор}^* \uparrow, W_{пор}^* \uparrow$	0,7	1	0,95	0,99	0,92	0,64
Отсутствует противодействие ЗРК противника	$N^{ЗРК} = 0$	$\bar{P}_{ПВО}^{ЗРК^*} = 1, P_{вых}^* \uparrow,$ $P_{пор}^* \uparrow, W_{пор}^* \uparrow$	0,7	0,96	1	0,94	0,92	0,63
Цель идеально замаскирована	$D = 0$	$P_{вых}^* = 0,$ $W_{пор}^* = 0$	0,7	0,96	0,84	0	0,8	0
Средства поражения САК АА являются некондиционными	$P_{пор1} = 0$	$P_{пор}^* = 0,$ $W_{пор}^* = 0$	0,7	0,96	0,84	0,93	0	0

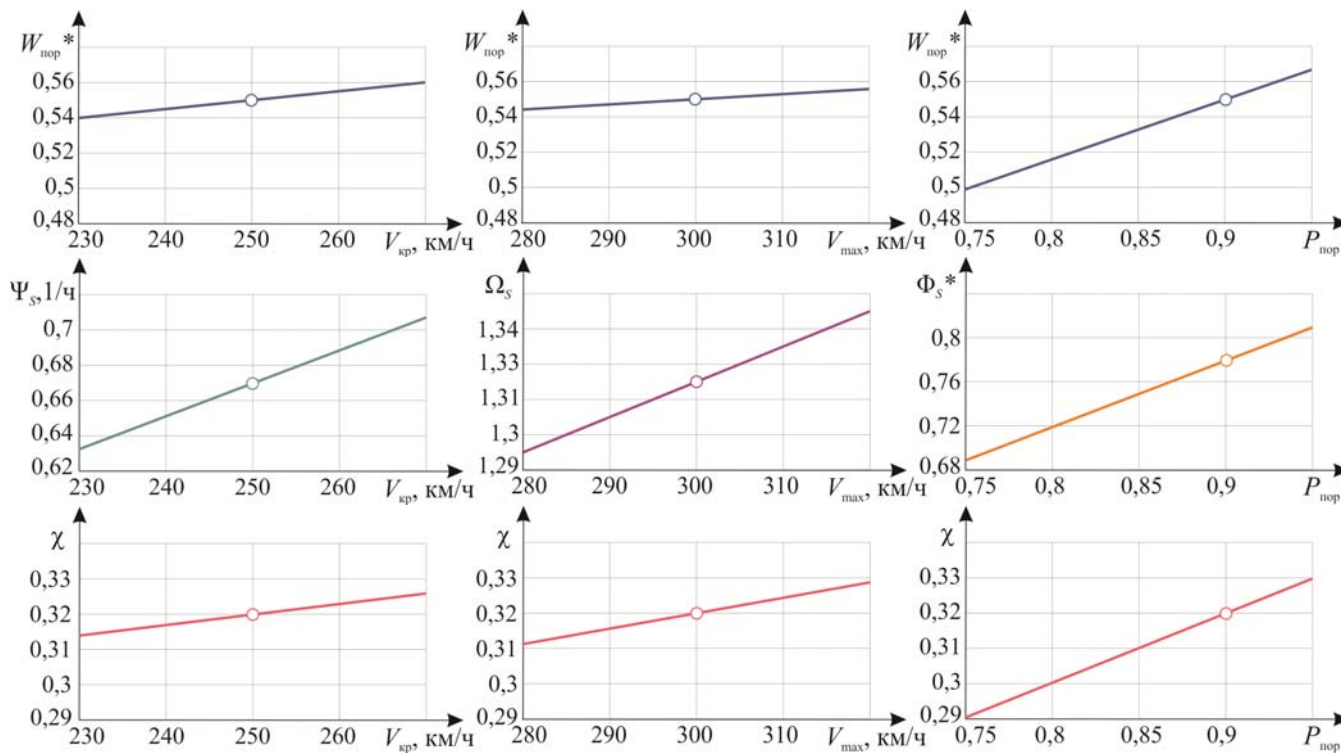


Рис. 5. Результаты параметрических исследований
Fig. 5. The results of parametric studies

Анализ полученных зависимостей показывает:

- увеличение $V_{кр}$, V_{max} и $P_{пор1}$ приводит к росту оценки вероятности выполнения САК АА расчетной боевой задачи (вероятности поражения цели) $W_{пор}^*$ (связано с увеличением P_0^* вследствие уменьшения времени полета к цели $t_{пол}$; увеличением $\bar{P}_{ПВО}^{ПЗРК^*}$ вследствие уменьшения времени нахождения в зоне пусков ПЗРК $t^{ПЗРК}$ и увеличением $P_{пор}^*$ соответственно);
- увеличение $V_{кр}$ приводит к росту мобильности САК АА Ψ_S вследствие уменьшения $t_{пол}$;
- увеличение V_{max} приводит к росту выживаемости САК АА Ω_S вследствие уменьшения потерь вертолетов при преодолении зоны поражения ПЗРК;
- увеличение $P_{пор1}$ приводит к росту боевой мощи САК АА Φ_S^* вследствие увеличения оценки $P_{пор}^*$;
- увеличение $V_{кр}$, V_{max} и $P_{пор1}$ приводит к росту коэффициента боевых возможностей САК АА χ вследствие роста Φ_S^* , P_0^* и Ω_S ;
- разработанная модель демонстрирует «непрерывность» реакции на изменение исходных данных ($V_{кр}$, V_{max} и $P_{пор1}$) в диапазоне возможных значений.

Заключение

Таким образом, в работе предложена статистическая модель боевого функционирования САК АА при выполнении расчетной типовой (ударной) задачи – уничтожения одиночной малоразмерной подвижной наземной цели с заданной точностью и надежностью. Данная модель учитывает особенности боевого применения вертолетов АА в современных условиях (действия в составе боевых вертолетных групп, полет на предельно малых высотах, выполнение задач в условиях сильного противодействия средств ПВО про-

тивника) и элементы случайности в объеме рассмотренной задачи.

Предложены выражения для определения показателей боевой эффективности (в том числе частных критериев, соответствующих этапам боевого функционирования системы) и боевых свойств САК АА по результатам моделирования.

На основе метода предельных точек подтверждена адекватность предложенной модели.

Для заданных исходных данных произведен расчет показателей боевой эффективности и боевых свойств САК АА при выполнении рассмотренной расчетной задачи.

С использованием разработанной модели проведены исследования влияния значений параметров летно-технических характеристик вертолетов и комплексов их авиационного вооружения на изменение показателей боевой эффективности и боевых свойств САК АА. Улучшение параметров летно-технических характеристик вертолетов и комплексов их авиационного вооружения приводит к росту данных показателей.

Предполагается, что предложенная модель будет использована при построении системы моделей боевого функционирования авиационных комплексов АА с учетом современной концепции применения.

Результаты работы могут быть использованы для обоснования тактико-технических требований к вертолетам военного назначения при формировании их технического облика.

Список литературы

1. Платунов В.С. Методология системных военно-научных исследований авиационных комплексов. М.: Дельта, 2005. 344 с.
2. Авербух Ю.В., Афонин И.Е., Васин А.А. и др. Модели военных, боевых и специальных действий / Под ред. Д.А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2025. 528 с.
3. Попов И.С. Основы моделирования и системный анализ эффективности авиаци-

онных комплексов. М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1991. 478 с.

4. **Мао У.** A novel adaptive heuristic dynamic programming-based algorithm for aircraft confrontation games / У. Мао, З. Чен, У. Янг, У. Ху // *Fundamental Research*. 2021. No. 1. Pp. 792–799. DOI: 10.1016/j.fmre.2021.08.004

5. **Макаренко С.И., Афонин И.Е.** Моделирование боевых действий авиации и оценки их эффективности – анализ работ, моделей, актуальных направлений исследований // *Системы управления, связи и безопасности*. 2024. № 3. С. 78–125. DOI: 10.24412/2410-9916-2024-3-078-125

6. **Лён В.Л.** Сетевая модель работы полного боевого расчета командного пункта армии военно-воздушных сил и противовоздушной обороны, алгоритм его работы на этапе принятия решения на боевые действия // *Воздушно-космические силы. Теория и практика*. 2019. № 12. С. 36–43.

7. **Алексян А.Р., Ицкович А.А., Файнбург И.А.** Построение математической модели процессов технической эксплуатации авиационной техники как замкнутой системы массового обслуживания // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2015. № 219 (9). С. 46–52.

8. **Баль М.А.** Разработка модели и алгоритма оценки эффективности преодоления гиперзвуковым летательным аппаратом противоракетной обороны с учетом противодействия авиационного комплекса [Электронный ресурс] // *Труды МАИ*. 2020. № 109. С. 26. DOI: 10.34759/trd-2019-109-26 (дата обращения: 15.06.2025).

9. **Ramteke V.** A game-theoretic model for one-on-one air combat / V. Ramteke, V. Commandur, V.R. Makapati, M.A. Kothari // *IFAC-PapersOnLine*. 2022. Vol. 55, iss. 22. Pp. 261–267. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.03.044

10. **Венцель Е.С.** Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 389 с.

11. **Ананьев А.В.** Разведывательно-ударный комплекс с беспилотными летательными аппаратами FPV-типа для поддержки действий экипажей армейской авиации / А.В. Ананьев, К.С. Иванников, Т.В. Шайдуллин, Н.Ф. Кузья-

ров // *Воздушно-космические силы. Теория и практика*. 2024. № 32. С. 54–74.

12. **Арбузов И.В., Болховитинов О.В., Волочаев О.В. и др.** Боевые авиационные комплексы и их эффективность / Под ред. О.В. Болховитинова. М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008. 224 с.

13. **Болховитинов О.В., Вольнов И.И., Михалев Г.Е. и др.** Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. О.В. Болховитинова. М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1991. 195 с.

14. **Монсик В.Б.** Статистические основы авиационного вооружения. М.: Издание ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2003. 484 с.

15. **Тарасов А.Л., Прозоров М.А.** Оценка взлетной массы боевого вертолета с заданными летно-техническими характеристиками на основе уравнения существования // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2024. Т. 27, № 5. С. 90–102. DOI: 10.26467/2079-0619-2024-27-5-90-102

16. **Киселев А.В., Макаренко С.И.** Анализ боевого потенциала сторон в конфликте средств огневого поражения противника и средств войсковой противовоздушной обороны // *Системы управления, связи и безопасности*. 2022. № 1. С. 8–48. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-1-8-48

17. **Макаренко С.И., Старостин А.В.** Противовоздушная оборона страны от ударов беспилотных летательных аппаратов и крылатых ракет: новые угрозы, проблемные вопросы, технико-экономический анализ вариантов архитектуры // *Системы управления, связи и безопасности*. 2024. № 2. С. 86–148. DOI: 10.24412/2410-9916-2024-2-086-148

18. **Бонин А.С., Фомин М.В.** Основные принципы и методический подход к обоснованию уровневых значений показателей боевых свойств перспективных авиационных комплексов военного назначения // *Военная мысль*. 2005. № 1. С. 65–68.

19. **Сирота А.А.** Компьютерное моделирование и оценка эффективности сложных систем. М.: Техносфера, 2006. 280 с.

20. **Городнов В.П.** Моделирование боевых действий частей, соединений и объеди-

нений войск ПВО. Харьков: ВИРТА ПВО им. маршала Советского Союза Л.А. Говорова, 1987. 379 с.

References

1. **Platunov, V.S.** (2005). Methodology of systematic military scientific research of aviation complexes. Moscow: Delta, 344 p. (in Russian)
2. **Averbuh, Yu.V., Afonin, I.E., Vasin, A.A. et al.** (2025). Models of military, combat and special operations, in Novikov D.A. (Ed.). Moscow: LENAND, 528 p. (in Russian)
3. **Popov, I.S.** (1991). Fundamentals of modeling and systems analysis of the efficiency of aviation systems. Moscow: VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 478 p. (in Russian)
4. **Mao, Y., Chen, Z., Yang, Y., Hu, Y.** (2021). A novel adaptive heuristic dynamic programming-based algorithm for aircraft confrontation games. *Fundamental Research*, no. 1, pp. 792–799. DOI: 10.1016/j.fmre.2021.08.004
5. **Makarenko, S.I., Afonin, I.E.** (2024). Modeling of aviation combat operations and evaluation of their effectiveness – analysis of papers, models and actual research directions. *Systems of control, communication and security*, no. 3, pp. 78–125. DOI: 10.24412/2410-9916-2024-3-078-125 (in Russian)
6. **Len, V.L.** (2019). Network model of the full combat calculation work of the army air force and air defense command post, the algorithm of its work at the decision-making stage on the battle action. *Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i praktika*, no. 12, pp. 36–43. (in Russian)
7. **Aleksanyan, A.R., Itskovich, A.A., Faynburg, I.A.** (2015). The construction of mathematical model of processes of maintenance of aircraft engineering as a closed service system. *Nauchnyy Vestnik MGTU GA*, no. 219 (9), pp. 46–52. (in Russian)
8. **Bal, M.** (2020). Model and algorithm developing for efficiency assessment of anti-missile defense overpowering by hypersonic flying vehicle with regard for counteraction of aviation complex. *Trudy MAI*, no. 109, p. 26. DOI: 10.34759/trd-2019-109-26 (accessed: 15.06.2025). (in Russian)
9. **Ramteke, V., Comandur, V., Makapati, V.R., Kothari, M.A.** (2022). A game-theoretic model for one-on-one air combat. *IFAC-PapersOnLine*, vol. 55, issue 22, pp. 261–267. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.03.044
10. **Ventsel, E.S.** (1964). Introduction to operations research. Moscow: Sovetskoye radio, 389 p. (in Russian)
11. **Ananyev, A.V., Ivannikov, K.S., Shaydullin, T.V., Kuziyarov, N.F.** (2024). Reconnaissance-strike complex with first-person view drones to support the army aviation crews actions. *Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i praktika*, no. 32, pp. 54–74. (in Russian)
12. **Arbuzov, I.V., Bolkhovitinov, O.V., Volochaev, O.V. et al.** (2008). Combat aviation systems and their effectiveness, in Bolkhovitinov O.V. (Ed.). Moscow: VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 224 p. (in Russian)
13. **Bolkhovitinov, O.V., Volnov, I.I., Mihalev, G.E. et al.** (1991). Probability theory and mathematical statistics, in Bolkhovitinov O.V. (Ed.). Moscow: VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 195 p. (in Russian)
14. **Monsik, V.B.** (2003). Statistical principles of aircraft armament. Moscow: VVIA im. prof. N.Ye. Zhukovskogo, 484 p. (in Russian)
15. **Tarasov, A.L., Prozorov, M.A.** (2024). Estimation of the take-off weight of a combat helicopter with specified performance on the basis of the existence equation. *Civil Aviation High Technologies*, vol. 27, no. 5, pp. 90–102. DOI: 10.26467/2079-0619-2024-27-5-90-102 (in Russian)
16. **Kiselev, A.V., Makarenko, S.I.** (2022). Analysis of the combat potential of the parties to the conflict of the fire destruction means of the enemy and the air defense means of army. *Systems of control, communication and security*, no. 1, pp. 8–48. DOI: 10.24412/2410-9916-2022-1-8-48 (in Russian)
17. **Makarenko, S.I., Starostin, A.V.** (2024). Country's air defense system against strikes with unmanned aerial vehicles and cruise missiles: new threats, problematic issues, technical and economic analysis of architecture variants. *Systems of control, communication and se-*

curity, no. 2, pp. 86–148. DOI: 10.24412/2410-9916-2024-2-086-148 (in Russian)

18. Bonin, A.S., Fomin, M.V. (2005). Basic principles and methodological approach to substantiating the level values of combat performance indicators of promising military aviation systems. *Voyennaya Mysl*, no. 1, pp. 65–68. (in Russian)

19. Sirota, A.A. (2006). Computer modeling and performance evaluation of complex systems. Moscow: Tekhnosfera, 280 p. (in Russian)

20. Gorodnov, V.P. (1987). Simulation of combat operations of air defense units, formations and large units. Kharkov: VIRTА PVO im. marshala Sovetskogo Soyuza L.A. Govorova, 379 p. (in Russian)

Сведения об авторе

Тарасов Андрей Леонидович, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры конструкции и эксплуатации вертолетов и двигателей филиала Военного учебно-научного центра военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» в г. Сызрани, Andreyt4884@mail.ru.

Information about the author

Andrey L. Tarasov, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, the Head of the Helicopter and Engine Design and Operation Chair, branch of the Military Educational and Scientific Centre of the Air Force “Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy”, Syzran, Andreyt4884@mail.ru.

Поступила в редакцию	21.07.2025	Received	21.07.2025
Одобрена после рецензирования	08.09.2025	Approved after reviewing	08.09.2025
Принята в печать	22.01.2026	Accepted for publication	22.01.2026

ББК 05
Н 34
Св. план 2026

Научный Вестник МГТУ ГА
Том 29, № 01, 2026
Civil Aviation High TECHNOLOGIES
Vol. 29, No. 01, 2026

Свидетельство о регистрации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-47989 от 27 декабря 2011 г.

Оформить подписку на печатную версию журнала можно на сайте Объединенного каталога «Пресса России» www.pressa-rf.ru. Подписной индекс 84254.

Подписано в печать 25.02.2026.

Печать цифровая

Формат 60×90/8

14,0 усл. печ. л.

Заказ № 2049/29

Тираж 50 экз.

Московский государственный технический университет ГА
125993, Москва, Кронштадтский бульвар, д. 20
Изготовлено в ИД Академии имени Н. Е. Жуковского
125167, Москва, 8-го Марта 4-я ул., дом 6А
Тел.: (495) 973-45-68
E-mail: artpress@mail.ru