

УДК 621.396.6:82.629.004

## ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗЕРВИРУЕМЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПОЛЕТОВ С ДВУМЯ ТИПАМИ ОТКАЗОВ

В.Е. ЕМЕЛЬЯНОВ, А.П. КРУГЛОВ

В работе проводятся оценки процесса восстановления радиотехнических средств обеспечения полетов с двумя типами отказов при описании самого процесса восстановления путем использования свойств введенного полумарковского случайного процесса. Получены соотношения для среднего времени отказа систем в случае их резервирования, позволяющие вычислить значения вероятностей устойчивых состояний.

**Ключевые слова:** распределение времени безотказной работы, различные отказы, восстановление, среднее время простоя.

Средства радиотехнического обеспечения полетов (РТОП) и электросвязи являются основными источниками информационного обеспечения диспетчерского состава службы движения. От надежности, достоверности и точности этой информации в значительной степени зависит уровень безопасности полетов, пропускная способность зон УВД.

Отраслевые нормативно-регламентирующие документы строго ограничивают временные интервалы отсутствия тех или иных информационных сообщений. В связи с этим актуальной становится задача априорной оценки этих временных интервалов.

Не останавливаясь на уточнении высказываемого предположения об экспоненциальности закона распределения времени безотказной работы, будем считать возможным и другие законы распределения, в частности, нормальный. Вместе с тем отметим, что одним из доминирующих способов повышения эксплуатационной надежности средств РТПО является резервирование основных функциональных узлов радиотехнических систем (РТС).

Будем считать, что каждый из компонентов РТС в любой момент времени может находиться в одном из следующих состояний: 0 – рабочее; S – резервное;  $r_1$  – восстановление 1-го типа;  $r_2$  – восстановление 2-го типа;  $r_{1a}$  – продолжающиеся восстановление 1-го типа;  $r_{2a}$  – продолжающиеся восстановление 2-го типа;  $v_1$  – ожидание восстановления 1-го типа;  $v_2$  – ожидание восстановления 2-го типа. Различные типы восстановлений обусловлены возможностью проведения соответствующих работ либо силами оперативного инженерно-технического персонала объектов, либо силами специальных ремонтных бригад.

Очевидно, что для модели состояний рассматриваемой РТС будут:

$$\begin{aligned} S_0: (0, s); & \quad S_1: (0, r_1); & \quad S_2: (0, r_2); \\ S_3: (r_{1a}, v_1); & \quad S_4: (r_{1a}, v_2); & \quad S_5: (r_{2a}, v_1); \\ S_6: (r_{2a}, v_2). \end{aligned}$$

Переходы между состояниями иллюстрируем с помощью рис. 1.

Моменты, когда РТС вступают в состояния  $S_0, S_1, S_2$ , являются точками восстановления, в то время как моменты, когда наступают состояния  $S_3, S_4, S_5$  и  $S_6$ , являются точками невосстановления.

Поведение системы на интервале времени  $(0, \infty)$  может быть описано СП  $Z(t)$ , где пространство состояний  $D = \{\overline{0, 6}\}$ , а  $Z(t)$  означает состояние системы в момент времени  $t$ . Типичная реализация этого процесса представлена на рис. 2. Отметим, что этот процесс не является полумарковским (моменты времени, при которых наступают невосстанавливаемые состояния  $S_3, S_4, S_5$  и  $S_6$ ). Наряду с этим он обладает свойствами введенного полумарковского процесса с пространством рабочих состояний  $U = \{0, 1, 2\}$ .

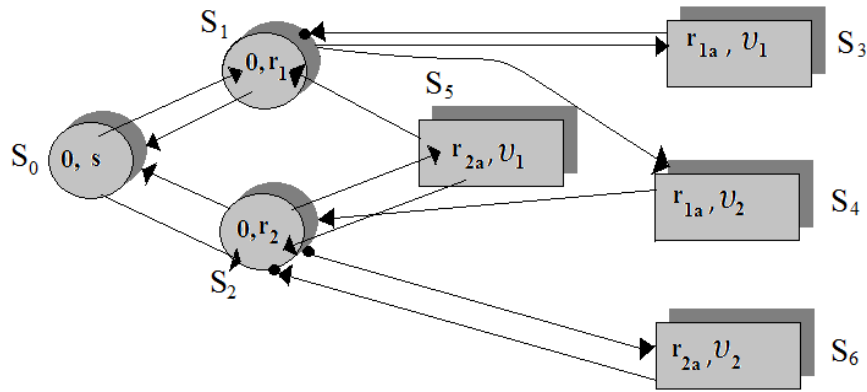


Рис. 1. Переходы между состояниями для резервируемой РЭС:

● – рабочие состояния; □ – состояние отказа; ● – точка восстановления

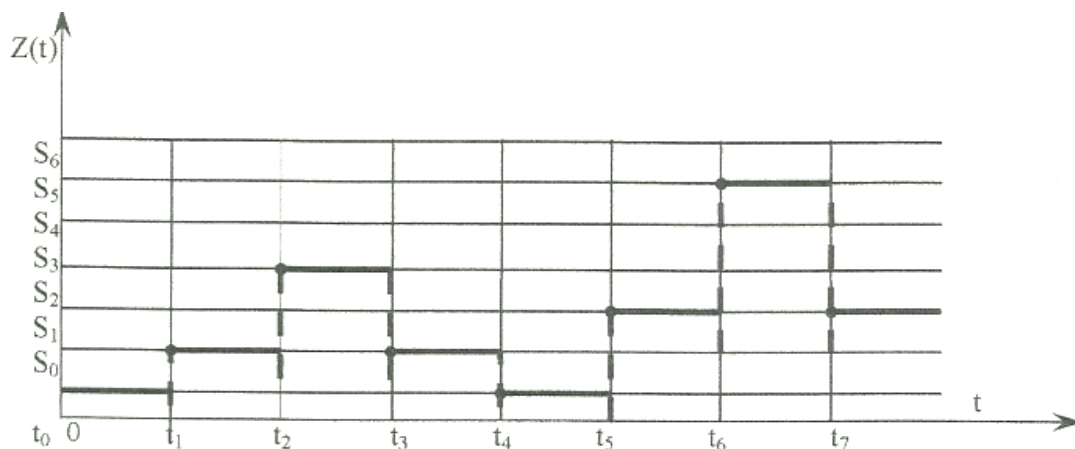


Рис. 2. Процесс восстановления резервируемой РЭС с двумя типами отказов:  
 $t_i$  – моменты времени переходов к состоянию восстановления;  
 переходами являются  $S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_6 \rightarrow S_2 \rightarrow \dots$

Введем обозначения:  $\lambda_0$  и  $\lambda_p$  – интенсивности отказов основного и резервного комплектов и  $\lambda_p/\lambda_0 = \rho$ ;  $G_1(t)$  и  $G_2(t)$  – ФРВ времени восстановления для отказов 1-го и 2-го типов соответственно;  $u_1, u_2$  – средние времена для восстановления и для отказов 1-го и 2-го типов;  $B_i = \lambda \tau_i^*$ ,  $i^* = 1, 2$ ;  $\mu_i$  – среднее время нахождения РЭС в состоянии  $S_i$ ;  $x_1$  – время до отказа основного комплекса;  $x_2$  – время до отказа резервного комплекта;  $Y_1$  – время до полного восстановления по отказу 1-го типа;  $Y_2$  – время до полного восстановления по отказу 2-го типа;  $\mu^*$  – диагональ  $(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ ;  $E$  – единичный вектор-столбец;  $N_{ij}$  – полное время, затраченное в переходном состоянии  $S_i$ ;  $N^{(1)} = (N_{ij})$ ;  $t_i$  – полное время, затраченное в рабочем состоянии, показывающее, что РЭС начинает функционировать в  $S_i$ ;  $W_i = D(t_i)$ ;  $W^{(1)} = \lambda_1 W_i$ ;  $W^{(1)}$  – вектор-столбец  $(W_0, W_1, W_2)$ ;  $g_i(s)$  – преобразование Лапласа-Стилтьеса  $g(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Проанализируем рассматриваемую модель с помощью введенного полумарковского процесса  $u = \{0, 1, 2\}$ . Пусть  $t_0 = t_{n-1} - t_n$  ( $t_0 = 0 < t_1 < t_2$ ) будет последовательностью следующих один за одним интервалов вступления в состояние  $U$ . Считая, что  $L_n = Z(t_{n+0})$ ,  $n \geq 0$ , можно отметить, что пара случайных переменных  $\{t_n, L_n\}$  образует марковскую цепь с характеристиками

$$P(\tau_n < x, I_{n+1} = j \mid \tau_{n-1}, I_n = i) = P_{ij} F_{ij}(x), \quad (i, j \in U), \tag{1}$$

где  $P_{ij} = P(I_{n+1} = j \mid I_n = i)$ ;  $F_{ij} = P(\tau_n < x \mid I_n = i, I_{n+1} = j)$ .

Обозначим: 
$$\Delta_{ij} = \int_0^{\infty} x dF_{ij}(x); \quad (2)$$

$$\Delta_i = M(\tau_n | l_n = i) = \sum_{j \in U} P_{ij} \Delta_{ij}, \quad (i \in U). \quad (3)$$

Кроме того, мы имеем  $P(\tau_0 < x, l_1 = 0 | l_0 = i) = P_{ij} F_{ij}(x)$ .

Определим переходные вероятности и вероятности времени пребывания  $\{P_{ij}(i, j \in U)\}$  в состоянии  $S_i (i \in U)$ , введя предварительно следующие обозначения:  $\pi_i$  – предельная вероятность того, что марковская цепь  $\{t_n, L_n\}$  существует в состоянии  $S_i$ ;  $L$  – вектор строки предельных вероятностей  $\pi_i$ ;  $H = 1 - P$ ;  $h_i$  – минор  $H$ , образованный вычеркиванием  $i$ -й строки  $i$ -го столбца  $H$ ;  $\Psi_i$  – предельная вероятность того, что система находится в состоянии  $S_i$ .

Очевидно, что  $\tilde{\pi}$  является решением уравнения  $\tilde{\pi}P = \tilde{\pi}$  при  $\sum_{i=1} \pi = 1$  и  $\pi = \frac{h_i}{\sum_i h_i}$ ,  $i \in U$ .

Отметим, что  $\Psi_i = \frac{\pi_i \mu_i}{\sum_i \pi_i \mu_i}$ ,  $i \in U$ .

С учетом вышесказанного искомые вероятности определяются в соответствии со следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_{01} &= pP_r(X_1 < X_2) + P_r(X_1 > X_2) = p \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} e^{\lambda p t} dt + \int \lambda_{1p} e^{\lambda_1 p t} dt = 2p/(1+p); \\ P_{02} &= p\bar{P}_r(X_1 < X_2) = \bar{p} \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} e_0^{\lambda t} dt = p/(1+p); \\ P_{10} &= P_r(Y_1 < X_1) = p \int (1 - e_0^{-\lambda t}) dG_1(t) = g_1(\lambda_0); \\ P_{11} &= pP_r(Y_1 > X_1) = p \int (1 - e_0^{-\lambda t}) dG_1(t) = p\bar{g}_1(\lambda_0); \\ P_{12} &= \bar{p}P_r(Y_1 > X_1) = \bar{p} \int (1 - e_0^{-\lambda t}) dG_1(t) = \bar{p}\bar{g}_1(\lambda_0); \\ P_{20} &= P_r(Y_2 < X_1) = p \int e_0^{-\lambda t} dG_2(t) = g_2(\lambda_0); \\ P_{21} &= pP_r(Y_2 > X_1) = p \int (1 - e_0^{-\lambda t}) dG_2(t) = p\bar{g}_2(\lambda_0); \\ P_{22} &= \bar{p}P_r(Y_2 > X_1) = \bar{p} \int (1 - e_0^{-\lambda t}) dG_2(t) = \bar{p}\bar{g}_2(\lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $p$  – вероятность возникновения отказа 1-го типа.

Матрицу  $H$  найдем по формуле

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & 1 - P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & 1 - P_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (5)$$

Итак,  $h_i$  определяется путем решения соответствующих миноров, а именно:

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 1 - \bar{p}\bar{g}_1 - \bar{p}\bar{g}_2; \\ h_1 &= (p + p(1 - \bar{p}\bar{g}_2))/(1 + p); \\ h_2 &= \bar{p}(1 + p * \bar{p}\bar{g}_1)/(1 + p) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= M\{\min(X_1, X_2)\} = 1/\lambda_0(1+p); \\ \mu_1 &= M\{\min(X_1, X_2)\} = P_{10}M\{Y_1|Y_1 < X_1\} + P_{11}M\{X_1|X_1 < Y_1\} + P_{12}M\{X_1|X_1 < Y_1\} = \\ &= \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\bar{G}_1(t) dt + \int t e_0^{-\lambda t} d\bar{G}_1(t) dt = g_1/\lambda'; \\ \mu_2 &= M\{\min(X_1, Y_2)\} = g_2/\lambda'; \\ \Delta_0 &= M\{\min(X_1, X_2)\} = \mu_0 = 1/\lambda_0(1+p); \\ \Delta_1 &= M\{Y_1\} = g_1/\lambda_0; \\ \Delta_2 &= M\{Y_2\} = g_2/\lambda_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для вычисления стационарного состояния определяем вероятности  $\psi_i$ , используя выражение

$$\Psi_i = \pi \sum_i \pi_i \Delta_i = H_i \mu_i / \sum_i h_i \Delta_i, \quad i \in U. \quad (8)$$

Следовательно, подставляя требуемые значения в (8) и упрощая, получаем

$$A = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 = X/V, \quad (9)$$

где

$$x \equiv 1 + \overline{pg}_1; \quad (10)$$

$$V = 1 + pg_1 - pg_2 + (p + p(1 - \overline{pg}_2))B_1 + \bar{p}(1 + \overline{pg}_1)B_2. \quad (11)$$

В соответствии с [1] среднее время возвращения в состояние  $S_i$  определяется соотношением

$$\gamma_{ii} = \sum_i \pi_i \Delta_i / \mu_i, \quad i \in U. \quad (12)$$

С учетом (12) ожидаемое число вхождений в состояние

$$\delta_i = 1/\gamma_{ii}, \quad i \in U.$$

Следовательно, мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= \lambda'(1 - \overline{pg}_1 - \overline{pg}_2)(1 + p)/V \\ \delta_1 &= \lambda'(p + p(1 - \overline{pg}_2))(1 + p)/V \\ \delta_2 &= \lambda\bar{p}(1 + \overline{pg}_1)(1 + p)/W \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $V$  определяется уравнением (11).

Предположим, что состояние процесса  $Z(t)$  изменяется в случайные моменты  $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < y_3 \dots$ . Случайные переменные  $Z_n = Z(y_n + 0)$  образуют введенную однородную марковскую цепь [2].

Чтобы найти среднее время до отказа системы, преобразуем состояния отказа системы в поглощающие состояния так, что вероятности перехода введенной однородной марковской цепи будут равны:

$$\left. \begin{aligned} P'_{01} &= p \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} e_{1p}^{\lambda t} dt + \int \lambda_{1p} e_{1p}^{-\lambda t} e_0^{-\lambda t} = (p + p)/(1 + p); \\ P'_{02} &= \bar{p} \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} e_{1p}^{\lambda t} dt = \bar{p}/(1 + p); \\ P'_{10} &= p \int e_0^{-\lambda t} dG_1(t) = g_1; \\ P'_{13} &= p \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\overline{G}_1(t) = p\overline{g}_1; \\ P'_{14} &= \bar{p} \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\overline{G}_1(t) = \bar{p}\overline{g}_1; \\ P'_{20} &= p \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\overline{G}_2(t) = g_2; \\ P'_{25} &= p \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\overline{G}_2(t) = p\overline{g}_2; \\ P'_{26} &= \bar{p} \int \lambda_0 e_0^{-\lambda t} d\overline{G}_1(t) = \bar{p}\overline{g}_2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В матричной записи выражение (14) имеет вид

$$P_i = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (15)$$

причем

$$(I - Q) - 1 = \frac{1}{1 - p'_{01}p'_{10} - p'_{02}p'_{20}} \times \begin{bmatrix} 1 & P'_{10} & P'_{10} \\ P'_{10} & 1 - P'_{10}P'_{10} & P'_{10}P'_{10} \\ P'_{10} & P'_{10}P'_{10} & 1 - P'_{10}P'_{10} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Приведенная выше матрица вероятностей перехода позволит определить среднее время отказа системы. Далее находим:

$$N_1 = (I - Q)^{-1}B_1; \quad (17)$$

$$W_1 = N_1 E. \quad (18)$$

Матрица  $N_1$  позволяет вычислить интервалы времени переходных состояний.

Среднее время отказа системы определяется с помощью элементов  $W_1$ . Подставляя требуемые значения в (17) и (18), мы получаем:

$$N_1 = \frac{1}{1 - p'_{01}p'_{10} - p'_{02}p'_{20}} \times \begin{Bmatrix} \mu_0 & P'_{01}\mu_1 & P'_{02}\mu_2 \\ P'_{10}\mu_0 & (1 - P'_{02}P'_{20})\mu_1 & P'_{10}P'_{02}\mu_2 \\ P'_{20}\mu_0 & P'_{20}P'_{01} & (1 - P'_{01}P'_{10})\mu_2 \end{Bmatrix}; \quad (19)$$

$$W_1 = \frac{1}{1 - p'_{01}p'_{10} - p'_{02}p'_{20}} \times \begin{Bmatrix} \mu_0 & P'_{01}\mu_1 & P'_{02}\mu_2 \\ P'_{10}\mu_0 & (1 - P'_{02}P'_{20})\mu_1 & P'_{10}P'_{02}\mu_2 \\ P'_{20}\mu_0 & P'_{20}P'_{01} & (1 - P'_{01}P'_{10})\mu_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

или

$$\left. \begin{aligned} w'_0 &= X_0/Y; \\ w'_1 &= X_1/Y; \\ w'_2 &= X_2/Y; \\ X_0 &\equiv 1 + (1 + p) - (\bar{p} + p)g_1 - pg_2; \\ X_1 &\equiv (1 + p) - (\bar{p} - p)g_1 - pg_2; \\ X_2 &\equiv (1 + p) - (\bar{p} + p)g_1 - pg_2; \\ Y &\equiv (1 + p) - (\bar{p} + p)g_1 - pg_2. \end{aligned} \right\}. \quad (21)$$

Окончательно, вероятности того, что процесс начинается с  $S_i$  ( $i \in U$ ) и включает поглощающее состояние  $S_j$  ( $j \in U$ ), определяются в виде матрицы  $A$

$$A = (I - Q)^{-1}R = \frac{1}{1 - p'_{01}p'_{10} - p'_{02}p'_{20}} \times \begin{bmatrix} P'_{01} & P'_{01}P'_{14} & P'_{02}P'_{25} & P'_{02}P'_{26} \\ (1 - P'_{02}P'_{20})P'_{13} & (1 - P'_{02}P'_{20})P'_{14} & P'_{10}P'_{02}P'_{25} & P'_{10}P'_{02}P'_{26} \\ P'_{20}P'_{01}P'_{13} & P'_{20}P'_{01}P'_{14} & (1 - P'_{01}P'_{10})P'_{25} & (1 - P'_{01}P'_{10})P'_{26} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Метод приводит к простому вычислению вероятностей наличия работоспособного устойчивого состояния благодаря предположению о том, что поведение РЭС между двумя соседними точками описывается введенным полумарковским процессом, что позволяет просто вычислить параметры  $\mu_i$ ,  $\Delta_i$  и  $\pi_i$  ( $i \in V$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. - М.: Наука, 1975.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977.

#### CHARACTERISTICS ASSESSMENT OF THE REDUNTANT RADIO SYSTEMS FOR FLIGHTS WITH TWO TYPES OF FAILURES

Emelyanov V.E., Cruglov A.P.

The work presents the assessment of the recovery process of radio equipment for flights with two types of failures in the description of the recovery process by using the properties of the injected semi-Markov random process. The relations for the average time for systems failure in case of their reservation, which allows to calculate the value of probability of stable states were obtained.

**Key words:** distribution of uptime, various failures, restoration, average waiting time.

#### **Сведения об авторах**

**Емельянов Владимир Евгеньевич**, 1951 г.р., окончил КИИГА (1974), доцент, доктор технических наук, профессор кафедры основ радиотехники и защиты информации МГТУ ГА, автор более 100 научных работ, область научных интересов – техническая эксплуатация радиоэлектронных систем, функционирующих в сложной электромагнитной обстановке.

**Круглов Алексей Петрович**, 1959 г.р., окончил МИИГА (1981), начальник отдела «Евроазия», автор 4 научных работ, область научных интересов – безопасность и достоверность информационного обеспечения УВД.