

УДК 629.735

## ИНДУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИЗОГНУТЫХ ВИХРЕВЫХ ШНУРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ ВИХРЕВОГО СЛЕДА НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА

В.И. ШАЙДАКОВ

В статье представлены сведения об индуктивных свойствах искривленных вихрей, способных под действием самоиндукции перемещаться со скоростью, зависящей от циркуляции  $\Gamma$ , размера ядра и локальной кривизны отдельных участков вихревой трубки. Для численных расчетов предложен метод учета самоиндукции в узловых точках усеченных участков вихревой трубки. Получены формулы и даны рекомендации по построению модели свободного вихревого следа в лопастных теориях несущего винта.

**Ключевые слова:** вертолет, несущий винт, вихревой след, индукция, численные расчеты.

Вихревым шнуром называют вихревую трубку, заполненную содержащимися в ней вихревыми нитями малой интенсивности, определяемой величиной циркуляции  $d\Gamma = 2\omega d\sigma$ . Поэтому мощность вихря в соответствии с теоремой Стокса принято определять его циркуляцией  $\Gamma$ . Площадь сечения вихря  $\sigma$  называют ядром, внутри которого скорость вращения жидкости обусловлена законом распределения завихренности  $\omega$  по радиусу ядра. Этот закон устанавливается физическими условиями, при которых образовался вихревой шнур. Условия существования вихрей определены теоремами Гельмгольца. В общем случае вихревые шнуры криволинейны и под действием самоиндукции могут двигаться, изменяя свою форму. Несмотря на сложность движения, они подчиняются простым законам: циркуляция скорости вокруг вихревого шнура остается постоянной по всей его длине; вихревой шнур все время остается вихревым шнуром (теорема о неунуничтожимости); циркуляция скорости вокруг вихря по времени остается постоянной.

Таким образом, в соответствии с первой теоремой, толщина вихря (размер ядра) по его длине может изменяться вместе с изменением завихренности  $\omega$ , то есть для  $\omega$  должно выполняться условие постоянства "расходов" по длине вихревой трубки так же, как для скоростной трубки тока.

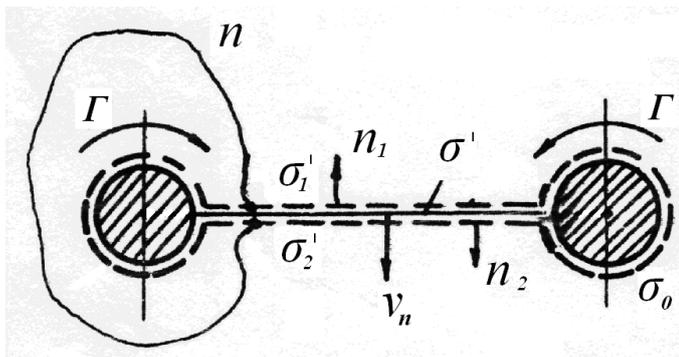
Поскольку вся завихренность заключена внутри вихревой трубки, то циркуляция по любому замкнутому контуру во внешнем пространстве  $\Gamma = 0$  и, следовательно, вихревой поток управляется потенциалом  $\varphi$ . При этом разность потенциалов между произвольными точками пространства А и В равна циркуляции  $\Gamma_{AB}$  по любой дуге, соединяющей эти точки. Отсюда, циркуляция скорости по произвольному контуру, охватывающему вихревой шнур ( $A = B$ ), равна  $\Gamma$ . При многократном обходе контура циркуляция увеличивается соответственно числу обходов и потенциал  $\varphi_B - \varphi_A$  будет многозначной функцией. В этом случае мы имеем двухсвязное пространство. Для исключения многозначности потенциала следует провести "жесткую" виртуальную стенку, примыкающую к вихревому жгуту, которая превращает внешнее пространство в односвязное, и тогда возможен только один обход вокруг вихря (рис. 1). Индукция от вихревого жгута в точке А внешнего пространства определяется по формуле Био-Савара.

### ИНДУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

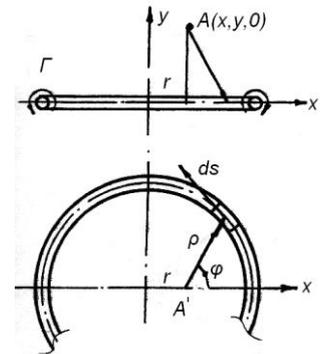
Рассмотрим частный случай искривленного вихря – круглое вихревое кольцо радиуса  $R$  с ядром относительного радиуса  $\bar{r}_j = r_j/R$  (рис. 2). Индуктивные скорости во внешнем пространстве могут вычисляться, как от вихревой нити с конечной циркуляцией  $\Gamma$ . В этом случае для компонент скоростей  $v_y$  и  $v_r$  получаются известные формулы [1], из которых определяется

средняя по площади круга радиуса  $\bar{r}$  осевая скорость  $v_{\text{уср}}$  на расстоянии  $\bar{y}$  от плоскости вихревого кольца. Тогда по уравнению расходов можно определить картину его линий тока. Опуская вывод формул, окончательно получим:

$$v_{\text{уср}} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{2}{\bar{r}^2 \sqrt{(1+\bar{r})^2 + \bar{y}^2}} \left\{ (1+\bar{r}^2 + \bar{y}^2) \mathbf{K}(k) - [(1+\bar{r})^2 + \bar{y}^2] \mathbf{E}(k) \right\}; \quad k = \frac{2\sqrt{\bar{r}}}{\sqrt{(1+\bar{r})^2 + \bar{y}^2}}. \quad (1)$$



**Рис. 1.** Граничная поверхность интегрирования при вычислении кинетической энергии идеальной жидкости, приводимой в движение вихревым жгутом на одном шаге винтовой линии, приближенно замкнутой в вихревое кольцо



**Рис. 2.** Круглое вихревое кольцо радиуса R с ядром радиуса  $r_{\text{я}}$

В плоскости вихревого кольца ( $\bar{y} = 0$ ) получим формулу, выраженную через полный эллиптический интеграл D [2]:

$$v_{\text{уср}} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{4}{\bar{r}^2} [\mathbf{K}(\bar{r}) - \mathbf{E}(\bar{r})] = \frac{\Gamma}{2\pi R} 4\mathbf{D}(\bar{r}); \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1 - \bar{r}_{\text{я}}; \quad (2)$$

$$v_{\text{уср}} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{4}{\bar{r}} \left[ \mathbf{K}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right) \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{4}{\bar{r}^3} \mathbf{D}\left(\frac{1}{\bar{r}}\right); \quad \infty > \bar{r} > 1 + \bar{r}_{\text{я}}.$$

В центре ядра наводятся индуктивные скорости, которые перемещают вихревое кольцо вдоль его оси в направлении действующей циркуляции. Исследования свободной вихревой системы за несущим винтом с помощью метода дымовой визуализации, выполненные в ЦАГИ В.Г. Колковым, показали, что область завихренности внутри ядра не смешивается с внешним потенциальным потоком ([3], рис. 9.4). Это означает, что вихревая трубка переносится воздушным потоком как жесткое тело, что соответствует второй теореме Гельмгольца о вихрях в идеальной жидкости. Очевидно, что в этом случае в относительном движении (когда вихрь остановлен, а поток движется навстречу) скорость на граничной поверхности тока вихревой трубки должна быть направлена по касательной к ее поверхности, т.е. должна быть равна нулю нормальная компонента скорости на границе ядра вихря  $v_n = 0$ .

Обозначим скорость перемещения вихревого кольца через  $v_{\text{вк}}$ . Тогда

$$v_{\text{вк}} = v_y(1, \bar{r}_{\text{я}}) = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{4 + \bar{r}_{\text{я}}^2}} \left[ \mathbf{K}\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \bar{r}_{\text{я}}^2}}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{2}{\sqrt{4 + \bar{r}_{\text{я}}^2}}\right) \right]. \quad (3)$$

При малых относительных размерах радиуса ядра вихря модуль полных эллиптических интегралов близок к единице. Как известно, в этом случае их вычисление затруднено. Вычис-

лим эти интегралы путем разложения в ряд по степеням дополнительного модуля так, как это делается в [1]:

$$k_1^2 = 1 - k^2 = 1 - \frac{4}{4 + \bar{r}_я^2} \approx \frac{\bar{r}_я^2}{4}; \quad \lambda = \ln \frac{4}{k_1} = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \approx \ln \frac{8}{\bar{r}_я}; \quad K = \lambda - \frac{1}{4}(\lambda - 1)k_1^2 + \dots; \quad E = 1 + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)k_1^2 + \dots$$

Отсюда, пренебрегая по малости  $k_1^2$ , с учетом (3) получим:

$$K \approx \lambda = \ln \frac{8}{\bar{r}_я}; \quad E \approx 1; \quad v_{BK} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8}{\bar{r}_я} - 1 \right). \quad (4)$$

Скорость  $v_{BK}$  можно вычислить и другим путем. Из формул (3) получим скорости  $v_y$  при  $\bar{y} = 0$  внутри и снаружи ядра вихревого кольца:

$$v_y(1 - \bar{r}_я, 0) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8}{\bar{r}_я} - 1 + \frac{2}{\bar{r}_я} \right); \quad v_y(1 + \bar{r}_я, 0) = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8}{\bar{r}_я} - 1 - \frac{2}{\bar{r}_я} \right).$$

Отсюда видно, что  $v_{BK}$  есть среднее арифметическое между этими скоростями. Это значит, что окружные скорости внутри ядра изменяются по линейному закону и жидкость внутри ядра вращается как твердое тело ( $\omega = \text{const}$ ). Эта модель соответствует вихрю Ранкина. Формула (4) получена Томсоном и приводится в книге Ламба [4].

В работе Уиднела [5] рассматриваются решения, полученные различными авторами. В частности, рассматривается случай для однородного потока внутри ядра ( $v_r = \text{const}$ ), что соответствует распределению завихренности внутри ядра по закону  $\frac{1}{r}$ . В этом случае скорость перемещения кольца в установившемся движении будет больше и определяется другой формулой:

$$v_{BK} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \ln \frac{8}{\bar{r}_я} - \frac{1}{4} \right). \quad (5)$$

Уиднел считает формулу (4) неверной, поэтому возникла необходимость ее проверки путем сравнения размеров вихревого кольца с экспериментом.

На рис. 3 изображена в подвижных координатах картина линий тока при установившемся движении кольцевой вихревой трубки со скоростью  $v_{BK}$  (относительное движение). Объем переносимой массы жидкости определяется габаритными размерами  $u_{BK}$  и  $x_{BK}$ .

Относительный осевой размер  $\bar{y}_{BK}$  соответствует критической точке, в которой индуцируемая скорость равна скорости перемещения кольца. Исходя из формулы (4), найдем связь между  $\bar{y}_{BK}$  и  $\bar{x}_{BK}$ :

$$\bar{y}_{BK} = \sqrt{\frac{2\pi^{2/3}}{\ln \frac{8}{\bar{r}_я} - 1} - 1}; \quad \bar{r}_я = \frac{8}{\exp \left[ \frac{2\pi}{(1 + \bar{y}_{BK}^2)^{3/2}} + 1 \right]}; \quad \bar{y}_{BK} = \sqrt{\frac{(\pi \bar{x}_{BK})^{2/3}}{\left\{ 4 \left[ K \left( \frac{1}{\bar{x}_{BK}} \right) - E \left( \frac{1}{\bar{x}_{BK}} \right) \right] \right\}^{2/3}} - 1}. \quad (6)$$

Как видим, само соотношение между  $\bar{u}_{\text{ВК}}$  и  $\bar{x}_{\text{ВК}}$  не зависит от циркуляции вихревого кольца и скорости его перемещения. Однако каждой конфигурации переносимого объема жидкости соответствует свой размер относительного радиуса ядра в зависимости от принятой формулы для скорости перемещения вихревого кольца.

Для оценки полученных результатов проведено сопоставление расчетных параметров вихревых колец с экспериментальными. С этой целью выполнены обмеры габаритных размеров переносимых масс жидкости и видимых размеров сечений вихревых трубок на фотографиях вихревых колец, полученных различными методами визуализации ([6], раздел 4. Вихри.). Обмеры проведены по оригиналам фотографий.

Здесь приводятся результаты для одного метода визуализации. На рис. 4 показано формирование вихревого кольца при истечении из сопла. Вода вытекает из круглого сопла диаметром 5 см с острыми кромками в бассейн, заполненный водой. Истечение происходит под действием поршня, движущегося с постоянной скоростью 4,6 м/с после ускорения в течение 0,3 с. Краска, введенная на кромке сопла, показывает процесс сворачивания вихревой пелены, отрывающейся от этой кромки. Поршень останавливается через 1,6 с. К этому моменту вихревое кольцо полностью сформировалось.

Результаты измерений и расчетные параметры, полученные для экспериментального значения  $\bar{u}_{\text{ВК}} = 0,63$ , представлены в табл. 1.

Таблица 1

Вычисленные параметры			Замеренные параметры		
$\bar{u}_{\text{ВК}}$	$\bar{x}_{\text{ВК}}$	$\bar{r}_я$	$\bar{u}_{\text{ВК}}$	$\bar{x}_{\text{ВК}}$	$\bar{r}_я$
0,63	1,31	0,065	0,63	1,27	0,063

Из сравнения расчетных и экспериментальных данных следует, что формула (4) близко отражает действительную скорость перемещения вихревых колец. Формула (5) дает большие размеры ядра вихря. Рассчитанная по ней скорость перемещения вихревых колец выше действительной. Поэтому в дальнейших расчетах для  $v_{\text{ВК}}$  будем использовать формулу (4), отражающую модель вихря Ранкина.

### СТРУКТУРА ВИХРЕВОГО СЛЕДА НЕСУЩЕГО ВИНТА ВЕРТОЛЕТА НА РЕЖИМЕ ВИСЕНИЯ

Первые детальные исследования вихревого следа с помощью дымовой визуализации проведены в середине пятидесятых годов Грэм [7]. Им установлено, что след от лопасти состоит из мощного концевой вихря и внутренней вихревой пелены с обратной завихренностью.

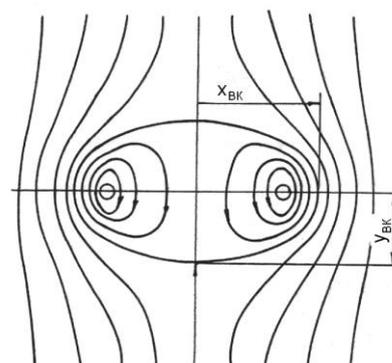


Рис. 3. Картина линий тока при установившемся движении кольцевой вихревой трубки со скоростью  $v_{\text{ВК}}$

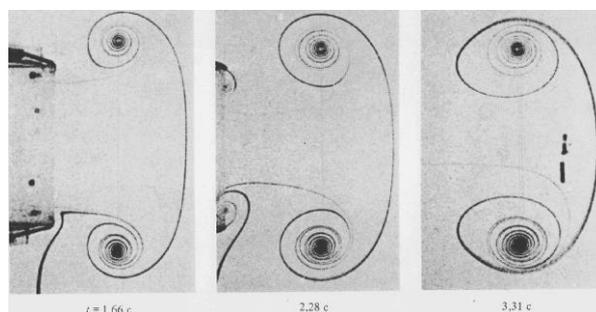


Рис. 4. Формирование вихревого кольца при истечении из сопла

На рис. 5 дана фотография движения вихревого следа на режиме осевого обтекания, взятая из [6]. Как видим, на фотографии четко прослеживаются центральные участки вихревой пелены, а также концевые и комлевые вихри. На режиме висения эта картина становится еще более отчетливой (например, рис. 3.33 в [7]). Эти же выводы позднее были получены Греем, Лэндгрибом, Танглером и др. на основе систематических исследований несущих винтов с различным числом лопастей и различной их геометрией. Результатом этих исследований явилась известная расчетная модель вихревого следа с концевым вихрем, построенная Лэндгрибом.



Рис. 5. Движение вихревого следа от лопастей на режиме осевого обтекания винта

В режимах висения и осевого обтекания винта картина течения носит осесимметричный характер, что существенно упрощает исследование, поскольку изучать течение можно в одной из радиальных плоскостей. Основное влияние на поле индуктивных скоростей оказывают концевые вихревые жгуты, появляющиеся в результате сворачивания края свободной вихревой пелены, сходящей с лопасти в процессе ее движения. Предполагается, что вся завихренность свернувшихся участков вихревой пелены сосредоточена внутри вихревой трубки, которую будем называть ядром вихря. Считается, что вне ядра течение всюду потенциально. Участки внутренней вихревой пелены можно отбросить, как не оказывающие решающего влияния на характер движения концевых вихрей.

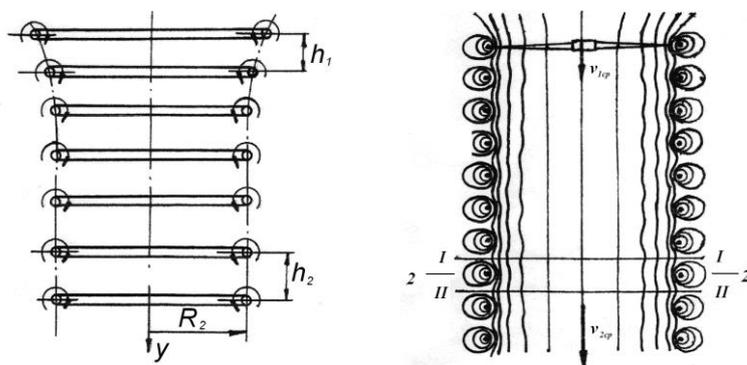
Очевидно, что циркуляцию концевых вихревых жгутов  $\Gamma_{ВЖ}$  в этом случае следует принять равной средней по лопасти циркуляции присоединенных вихрей, исходя из формулы тяги несущего винта:

$$\Gamma_{ВЖ} = \frac{2T}{\kappa \kappa_{л} \rho \omega R^2} \quad \text{или} \quad \bar{\Gamma}_{ВЖ} = \frac{\Gamma_{ВЖ}}{\omega R^2} = \frac{\pi C_T}{\kappa \kappa_{л}}, \quad (7)$$

где  $\kappa_{л}$  – число лопастей,  $\kappa$  – коэффициент, учитывающий закон  $\Gamma_r = f(r)$ . В частности, для прямоголопастной лопасти с кривкой, обеспечивающей условие  $C_y(\bar{r}) = \text{const}$ ,  $\kappa \approx 2/3$ .

Определенная таким образом циркуляция  $\Gamma_{ВЖ}$  равносильна вихревой модели винта Н.Е. Жуковского.

Если пренебречь тангенциальными компонентами индуктивной скорости, то концевые вихри, оси которых представляют собой винтовые линии переменного шага и радиуса, можно заменить системой вихревых колец, сходящих с краев диска винта с периодом времени  $\Delta t = 2\pi/\kappa_{л}\omega$ . Задача сводится к изучению движения дорожки вихревых колец в поле собственных индуктивных скоростей. В нелинейной постановке эта задача рассматривалась В.Э. Баскиным (рис. 6,а). В квазилинейной постановке (без учета поджатия струи), картина течения, представленная этой моделью, показана на рис. 6,б [8].



а – в нелинейной постановке      б – в квазилинейной постановке

Рис. 6. Модели вихревого следа с кольцевыми вихрями

Полученные в предыдущих разделах формулы позволяют изучить индукцию от дорожки кольцевых вихрей и установить размер ядра вихревых жгутов.

Определим сначала кинетическую энергию  $E_0$  идеальной жидкости, приводимой в движение вихревым жгутом на одном шаге винтовой линии, приближенно замкнутой в вихревое кольцо. Для потенциального течения во внешней области используем известную формулу кинетической энергии

$$E_0 = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} v^2 d\tau = -\frac{\rho}{2} \int_{\sigma} \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma. \quad (8)$$

Здесь  $\tau$  – объем жидкости, на который распространяется интегрирование,  $\sigma$  – граничная поверхность этого объема,  $\varphi$  – однозначный потенциал течения жидкости.

В нашем случае (рис. 1) граничной поверхностью интегрирования является сама поверхность кольцевой вихревой трубки, совпадающая с поверхностью тока, на которой  $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ , а потенциал  $\varphi$  – многозначен.

Чтобы использовать формулу (8), необходимо объем жидкости  $\tau$  разделить граничной поверхностью таким образом, чтобы вся область течения была односвязной, а потенциал однозначен. Для этого внутри вихревого кольца проведем поверхность  $\sigma'$ , примыкающую к кольцевой вихревой трубке (граничная поверхность изображена на рис. 1 пунктиром). Тогда интеграл (8) распространяется не только на поверхность  $\sigma_0$  вихревой трубки, но и на обе стороны ( $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$ ) поверхности  $\sigma'$ . В этом случае область объема  $\tau$  является внешней по отношению к поверхностям  $\sigma_0$  и  $\sigma'$ , а потенциал  $\varphi$  однозначен.

При обходе контура интегрирования  $\sigma$  следует иметь в виду, что направление нормалей на поверхностях  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  взаимно противоположное и тогда разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma$ .

На поверхности  $\sigma'$ :  $\frac{d\varphi}{dn} = v_n$ , на поверхности  $\sigma_0$ :  $\frac{d\varphi}{dn} = 0$ . В итоге получим:

$$E_0 = \frac{\rho}{2} \int_{\sigma'} (\varphi_2 - \varphi_1) v_n d\sigma = \frac{\rho\Gamma}{2} \int_{\sigma'} v_n d\sigma = \frac{1}{2} \rho\Gamma Q, \quad (9)$$

где  $Q$  – расход жидкости через внутреннюю плоскость вихревого кольца в потенциальной области течения (вне ядра).

Если рассматривается течение, вызванное дорожкой кольцевых вихрей или любой другой совокупностью замкнутых вихревых колец, то потенциал  $\varphi$  представится как сумма потенциалов от самого кольца  $\varphi_0$  и всех других вихревых колец  $\varphi_{\Sigma}$ . На поверхности  $\sigma'$  претерпевает разрыв только потенциал  $\varphi_0$ . Влияние же потенциала  $\varphi_{\Sigma}$  сказывается только на нормальной компоненте скорости  $v_n$ . Поэтому вид формулы для кинетической энергии от дорожки вихревых колец остается прежним с той разницей, что расход жидкости через плоскость вихревого кольца следует вычислять для течения, управляемого суммарным потенциалом, т.е. с учетом индуктивного воздействия всей совокупности вихревых колец [8].

Вычислим теперь кинетическую энергию  $E_1$  внутренней области течения вихревой трубки (в ядре вихря). Будем исходить из предположения, что размеры ядра малы по сравнению с радиусом вихревого кольца. Тогда элементарный участок вихревой трубки длиной  $dl$  может рассматриваться как участок прямолинейного вихревого шнура той же длины.

Рассмотрим вихрь Ранкина, когда завихренность в ядре прямолинейного вихревого шнура распределена равномерно, а скорость внутри ядра изменяется по линейному закону.

Внутренняя кинетическая энергия прямолинейного вихревого шнура единичной длины ( $E'_1$ ) и кольца радиуса  $R$  ( $E_1$ ), определится формулами:

$$E'_1 = \frac{\rho}{2} \int_0^{r_я} v^2 2\pi r dr = \frac{\rho \Gamma^2}{16\pi} \quad \text{и} \quad E_1 = 2\pi R E'_1 = \frac{1}{8} \rho \Gamma^2 R .$$

Таким образом, суммарная кинетическая энергия на шаге вихревой дорожки (сечение 2, рис. 6,б) определяется, как сумма внешней энергии от дорожки кольцевых вихрей и внутренней энергии кольцевого вихря:

$$E = E_0 + E_1 = \frac{1}{2} \rho \Gamma \left( Q + \frac{1}{4} \Gamma R_2 \right), \quad (10)$$

где  $R_2$  – радиус вихревых колец дорожки в сечении 2 – 2.

Расход жидкости через вихревое кольцо находится по формуле:

$$Q = \pi(R_2 - r_я)^2 v_{cp}, \quad (11)$$

где  $v_{cp}$  – средняя на шаге скорость в струе, образованной дорожкой вихревых колец.

В [8] установлено, что средняя по оси  $y$  скорость внутри дорожки равна  $\gamma = \frac{\Gamma}{h} = v_2$ , что дает право вместо дискретной вихревой модели следа рассматривать струйную модель течения. Тогда в формуле (11) следует принять  $v_{cp} = v_2$ .

Исходя из закона сохранения энергии, мощность, потребляемая винтом, идет на преодоление индуктивного сопротивления лопасти и в идеальной среде расходуется на образование свободного вихревого следа, который является носителем полученной энергии. Формула (10) определяет эту энергию.

За время  $\Delta t$  с краев диска винта сходит очередное вихревое кольцо. Прирост кинетической энергии среды за время  $\Delta t$  будет равен:

$$E = T v_1 \Delta t = \frac{m v_2^2}{2} \Delta t = \frac{\rho \pi R^2}{2} \Gamma v_2. \quad (12)$$

Приравнивая формулы (10) и (12), после сокращений получим уравнение, из которого найдем:

$$\bar{r}_я \approx \frac{\bar{h}}{8\pi}. \quad (13)$$

Формула (13) справедлива для малых значений шага дорожки, не превышающих  $h = 0,3R$ . Угол наклона вихревого жгута  $\beta_{ВЖ}$  к плоскости диска винта определяется по формуле:

$$\beta_{ВЖ} = \arctg \frac{k_l \bar{h}}{2\pi}. \quad (14)$$

Например, для четырехлопастного винта при  $\bar{h} = 0,3$ ,  $\beta_{ВЖ} = 10,8^\circ$ . Заметим, что  $\beta_{ВЖ}$  следует определять не по углу притекания потока в концевом сечении лопасти, как это обычно

принято в дисковой теории несущего винта, а по скорости перемещения кольцевых вихрей в дорожке с учетом формулы (4). В этом случае угол  $\beta_{ВЖ}$  получается существенно меньше. Этот фактор отслеживается в модели вихревого следа Лэндгриба [7].

Для самолетных воздушных винтов, имеющих большой угол наклона концевых вихря, при расчете  $r_a$  следует учитывать энергию, идущую на закручивание потока в струе от винта, которая существенно больше осевых индуктивных потерь мощности.

Следует также отметить, что рассмотрение модели вихревого следа применяется в теориях несущего винта с заранее заданным "жестким" вихревым следом. В нелинейных теориях, в которых рассматривается формирование вихревого следа в динамике, следует учитывать самоиндукцию вихревых элементов в узловых точках искривленного концевых вихря. В реальной (вязкой) жидкости картина течения вокруг кольцевого вихря изображена на рис. 7.

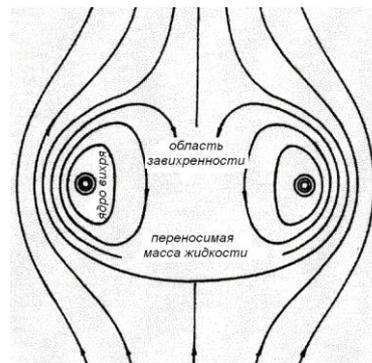


Рис. 7. Картина течения, возникающая в реальной жидкости

## ВЫВОДЫ

Проведенное исследование вихревого следа несущего винта на режимах висения и вертикального взлета вертолета на базе дискретной модели в виде дорожки вихревых колец позволяет установить, что главными параметрами, определяющими скорость движения концевых вихрей в удаленном следе, являются шаг вихревой линии и размер ядра вихря.

Полученные результаты могут быть положены в основу построения вихревых моделей свободного следа за винтом в лопастных теориях несущего винта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кюхеман Д., Вебер И. Аэродинамика авиационных двигателей: пер. с англ. – М.: Иностранная литература. 1956. – 388 с.
2. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука. 1981. – 797 с.
3. Баскин В.Э., Вильдгрубе Л.С., Вожаев Е.С., Майкапар Г.И. Теория несущего винта. – М.: Машиностроение. 1973. – 364 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: ОГИЗ. 1947. – 929 с.
5. Уиднел Ш. Структура и динамика вихревых нитей. В кн: Механика, выпуск 21, Вихревые движения жидкости. – М.: Мир. 1979. – 328 с.
6. Ван Дайк М. Альбом течения жидкости и газа. – М.: Мир. 1985. – 180 с.
7. Брамвелл А.Р.С. Динамика вертолетов: Пер. с англ. – М.: Машиностроение. 1982. – 368 с.
8. Шайдаков В.И. Вертолеты // Труды ОКБ МВЗ им. М.Л. Миля. Вып. 2. – М.: Машиностроение. 2012. – С. 314 – 328.

## INDUCTIVE PROPERTIES OF BENT VORTEX CORDS AND THEIR APPLICATION TO CONSTRUCTING A MODEL OF WAKE VORTEX HELICOPTER ROTOR

Shaydakov V.I.

This article provides information about the properties of BENT inductive vortices capable of under the influence of self-induction to move at a speed independent of circulating  $\Gamma$ , the size of the nucleus and the local curvature of the indi-

vidual sections of vortex tube. For numerical calculations the method of accounting for the self-induction at the nodal point of the vortex tube segments. Formulas and recommendations for the construction of models the free-vortex wake in the rotor blade theories.

**Key words:** helicopter, rotor, wake vortex induction, numerical calculations.

## REFERENCES

1. **Kyukheman D., Veber I.** Aehrodinamika aviacionnihkh dvigateleyj [Aerodynamics of aircraft engines]: Per. s angl. Moscow. Inostrannaya literatura. 1956. 388 p.
2. **Prudnikov A.P. i dr.** Integralih i ryadih. T. 1. Ehlementarniye funktsii. [The integrals and series. V. 1. Elementary functions] Moscow. Nauka. 1981. 797 p.
3. **Baskin V.Eh., Viljdgrube L.S., Vozhdaev E.S., Mayjkapar G.I.** Teoriya nesuthego vinta. [The theory of the rotor] Moscow. Mashino-stroenie. 1973. 364 p.
4. **Lamb G.** Gidrodinamika. [Hydrodynamics] Moscow. OGIZ. 1947. 929 p.
5. **Uidnel Sh.** Struktura i dinamika vikhrevihkh nitey. V kn: Mekhanika. Vihpusk 21. Vikhreviye dvizheniya zhid-kosti. [Structure and dynamics of vortex filaments. In the book: Manual, Release 21, the fluid vortex motion] Moscow. Mir. 1979. 328 p.
6. **Van Dayjk M.** Aljbom techeniya zhidkosti i gaza. [Collection of fluid and gas flow] Moscow. Mir. 1985. 180 p.
7. **Bramvell A.R.S.** Dinamika vertoletov [Dynamics of helicopters]: Per. s angl. Moscow. Mashinostroenie. 1982. 368 p.
8. **Shayjdakov V.I.** Vertoletih [Helicopters] Trudih OKB MVZ im. M.L. Milya. Vihpusk 2. Moscow. Mashinostroenie. 2012. PP. 314 – 328.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Шайдаков Владимир Иванович**, 1930 г.р., окончил МАИ (1954), доктор технических наук, профессор кафедры проектирования вертолетов МАИ, автор более 170 научных работ, область научных интересов – аэродинамика вертолета, электронный адрес: k102@mai.ru.