

УДК 531.1

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СТРУКТУРУ ВИХРЕЙ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА-ТЭЙЛОРА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

СУАНЬ ЗОАНЬ ДО, М.И. ЛИПАТОВ, ТУАН ВИНЬ ФАМ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Дудиным Г.Н.

Исследованы течения Куэтта-Тэйлора сжимаемого газа при больших числах Рейнольдса. Сформулирована постановка задачи на основе системы дифференциальных уравнений (система уравнений Навье-Стокса) для сжимаемого газа в цилиндрических координатах. На основе физической модели, построенной в CFD-пакете, получены численные результаты для различных температур поверхностей и угловых скоростей цилиндров. Построена зависимость размеров вихрей от температуры поверхностей и угловых скоростей цилиндров.

Ключевые слова: течения Куэтта Тэйлора, влияние сжимаемости, структура течения.

Устойчивость течений Куэтта-Тэйлора изучалась в течение более чем 70 лет. Это течение возникает между двумя коаксиальными цилиндрами в случае, когда оба или один цилиндр вращаются. Если параметры вращения превосходят критические значения, течение Куэтта-Тэйлора становится неустойчивым, так что появляется вторичное течение с ненулевыми радиальной и осевой компонентами скорости; это новое течение, называемое течением Тейлора-Куэтта, может иметь форму противоположных тороидальных вихрей, расположенных рядом друг с другом в осевом направлении.

Как известно, первая успешная оценка устойчивости вязкого течения между вращающимися цилиндрами принадлежит Тейлору. Эксперименты, которыми Тэйлор продемонстрировал возникновение неустойчивости, проводились с устройством, в котором разница в радиусах двух цилиндров была небольшой по сравнению со средним радиусом. Условия, при которых течение переходит к неустойчивости, могут быть выражены через характеристическое число, известное как число Тейлора. Позже Мексин решил проблему математическим методом, который отличается от метода Тейлора. На основе отдельных асимптотических решений ему удалось вывести условие устойчивости в замкнутой форме.

Исследованию течений несжимаемой жидкости посвящено много работ. В то же время с точки зрения технологических приложений и фундаментальной науки анализ течений сжимаемого газа имеет несомненный интерес. Обычно основным методом исследований являются численные методы анализа. В ряде статей были представлены результаты решения уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа [1; 2].

На практике могут реализовываться и течения с конечными числами Рейнольдса. Течение в таком случае описывается обычными уравнениями Навье-Стокса нелинейными или линейными в зависимости от рассматриваемых задач (описания среднего течения или исследования устойчивости). Понятно, что для решения таких задач единственным способом является применение численных методов, основанных на использовании конечных разностей или представлениями в виде разложений в ряды.

При анализе течений с большими числами Рейнольдса возникает вопрос о сосуществовании инерционного и вязкого течений. Под вязким понимается течение, описываемое только диссипативной частью уравнений Навье-Стокса. На самом деле даже без предположения об отсутствии инерционности, только принимая условие одномерности течения, можно получить описание с диссипативными членами (как в случае несжимаемой жидкости [3-4]).

При преимущественном влиянии инерционных эффектов уравнения не содержат диссипативных членов вообще, поэтому обычной является схема рассмотрения задач, для которых (при

любых числах Рейнольдса) на основное течение, описываемое диффузионными членами, накладывается возмущение, описываемое инерционными членами. Таким образом, можно исследовать линейные и нелинейные режимы.

Ситуация с большой величиной параметра (пропорционального отношению величин инерционных членов к диффузионным) приводит так и для течений открытого типа к локальным задачам, описывающим квадратные вихри с асимптотически одинаковыми размерами в направлениях y и z .

Можно показать, что возмущенное течение описывается в этом случае параболизированными уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с локальными термодинамическими величинами, соответствующими местоположению вихря (расположенному около одной из стенок или всплывшему).

Более интересными оказываются течения, в которых действительно сказывается влияние вязкости, а именно в таких, для которых размер вихря в направлении y сравним с величиной зазора.

В настоящей работе приведены результаты расчетов, показывающих влияние температуры поверхностей цилиндров и вращательных скоростей на плотности вихрей.

1. Постановка задачи

Исследуется течение между двумя концентрическими цилиндрами бесконечной длины, которые вращаются с различными угловыми скоростями. Предполагается, что поверхности цилиндров имеют различные температуры.

1.1. Система координат

Вводится цилиндрическая система координат. На рис. 1 показан эскиз системы координат для установившегося потока сжимаемой вязкой жидкости. Течение газа между двумя коаксиальными цилиндрами поддерживается за счет постоянной угловой скорости одного или обоих цилиндров, при этом в среднем течение в осевом направлении отсутствует [осредненный поток в осевом направлении равен нулю]. Внутренний цилиндр имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью Ω_1 , а внешний – радиус R_2 и вращается с угловой скоростью Ω_2 . Звездочкой обозначены размерные величины.

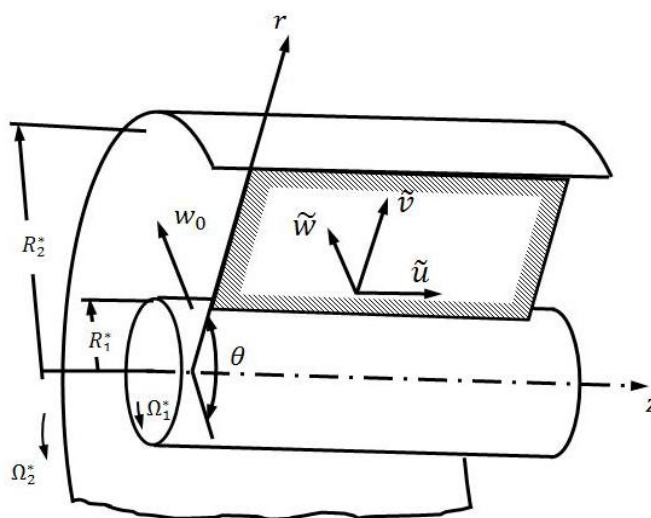


Рис. 1. Система цилиндрических координат

1.2. Определяющие уравнения в цилиндрической системе координат

Уравнения Навье-Стокса для сжимаемого газа состоят из уравнения сохранения массы, момента импульса и уравнения сохранения полной энергии. Поток считается идеальным газом с постоянным коэффициентом теплоемкости. Все величины сделаны безразмерными с использованием параметров относительно опорного местоположения в потоке; здесь используется модель безграничного набегающего потока/притока. Радиус тела выбран в качестве опорной длины. Безразмерные результаты приводят к следующим безразмерным параметрам:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^* r^*}{\mu_{\infty}^*}, \quad M = \frac{u_{\infty}^*}{a_{\infty}^*}, \quad \text{Pr} = \frac{u_{\infty}^* c_p^*}{\kappa_{\infty}^*}.$$

С помощью z, r, θ обозначают направление по потоку, радиальное и азимутальное направление, соответственно, и u, v, w обозначают компоненты скоростей в z, r, θ направлениях, соответственно, безразмерные уравнения Навье-Стокса для сжимаемого газа в цилиндрической системе координат [5]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{1}{r} D = 0; \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{zz} \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho u H + q_z - u \tau_{zz} - v \tau_{rz} - w \tau_{\theta z} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v + p - \tau_{rr} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \tau_{rr} - w \tau_{\theta r} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{\theta z} \\ \rho v w - \tau_{\theta r} \\ \rho w w + p - \tau_{\theta \theta} \\ \rho w H + q_{\theta} - u \tau_{\theta z} - v \tau_{\theta r} - w \tau_{\theta \theta} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{rz} \\ \rho v v - \rho w w - \tau_{rr} + \tau_{\theta \theta} \\ 2 \rho v w - 2 \tau_{\theta r} \\ \rho v H + q_r - u \tau_{rz} - v \tau_{rr} - w \tau_{\theta r} \end{pmatrix}$$

где полная энергия есть $E = T / [\gamma \gamma - 1 M^2] + 1/2 u_i u_i$, с $\gamma = 1.4$ и полная энтальпия $H = E + p / \rho$.

Молекулярные компоненты тензора напряжений:

$$\tau_{zz} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[2 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right]; \quad (3)$$

$$\tau_{rr} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right]; \quad (4)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{3\text{Re}} \left[-\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right]; \quad (5)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \quad (6)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]; \quad (7)$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \right]. \quad (8)$$

Вектор компонент теплового потока:

$$q_z = \frac{-\mu}{Pr \gamma - 1 M^2 Re} \frac{\partial T}{\partial z}; \tag{9}$$

$$q_r = \frac{-\mu}{Pr \gamma - 1 M^2 Re} \frac{\partial T}{\partial r}; \tag{10}$$

$$q_\theta = \frac{-\mu}{Pr \gamma - 1 M^2 Re} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \tag{11}$$

где число Прандтля предполагается постоянным $Pr = 0,72$. Молекулярная вязкость μ вычисляется с использованием закона Сазерленда (С.Ф. Уайт, 1991), причем константа Сазерленда берется равной 0,36867. Для замыкания системы уравнений, давление получается из безразмерного уравнения состояния $p = \rho T / \gamma M^2$.

1.3. Численный метод

При аналитическом решении задачи рассматривается бесконечный цилиндр. Однако при численном моделировании необходимо ограничивать длину цилиндров, соблюдая условие $h \gg \Delta = |R_2 - R_1|$ ($h = 0.1m$, $R_1 = 0.100m$ и $R_2 = 0.101m$) (рис. 2а).

При достаточно малых угловых скоростях цилиндров вихри имеют равномерное распределение, постоянное вдоль оси Oz . Поэтому достаточно рассмотреть двумерную задачу. В расчете рассматривался круговой сектор с углом 1° (рис. 2б). При $R_1 \approx R_2$ данный круговой сектор можно приближенно рассматривать как прямоугольный параллелепипед с размерами $0.000175m \times 0.001m \times 0.1m$.

Характерная длина: радиус внутреннего цилиндра $R_1 = 0.100m$, безразмерные величины указаны в табл. 1.

Сетка была построена с помощью программы ANSYS ICEM CFD. Сетка является структурированной, содержит более 2 миллионов ячеек (рис. 3).

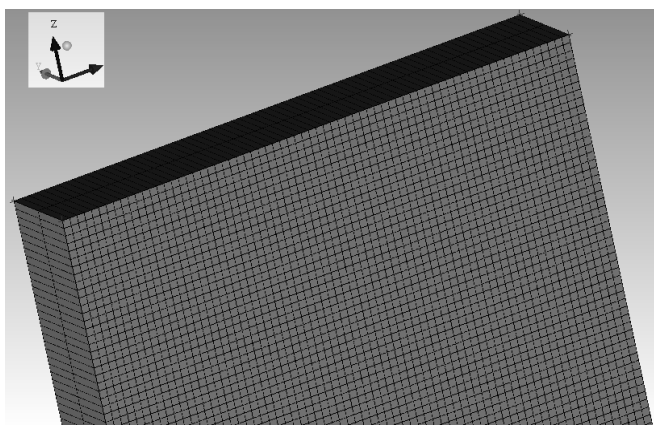


Рис. 3. Сетка в рассматриваемой зоне

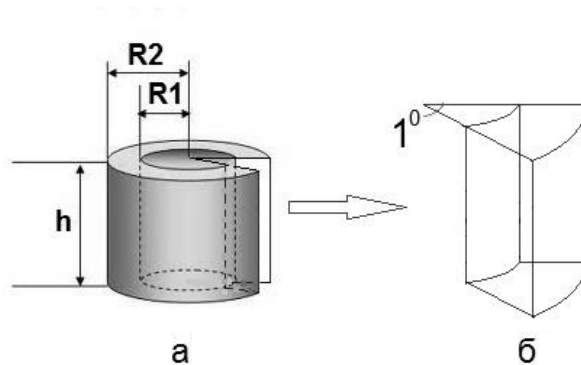


Рис. 2

а - коаксиальные цилиндры;
б - рассматриваемый сектор из цилиндра

Таблица 1

	Безразмерная величина
R_2 / R_1	1,01
$ R_2 - R_1 / R_1$	0,01
h / R_1	1

В задаче проводятся расчеты с применением коммерческой программы ANSYS CFX (лицензия МФТИ). Рассматриваемые течения моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрических координатах. Для расчета использовалась модель турбулентности SST (Shear Stress Transport), и предполагалось, что газ является идеальным.

2. Результаты

2.1. Случай $\Omega_2 = 0, \Omega_1 = 20$ об./с и $T_1 = T_2 = T_{\text{газ}} = 293^\circ\text{К}$

Результат: появилась 61 пара одинаковых вихрей, имеющих равномерное распределение. Одна пара состоит из двух осесимметричных вихрей. В сечении Oxz размер каждого вихря $\Delta \times d$ где $\Delta = |R_2 - R_1|, d = h / (61 \times 2) \approx 0.8196721 \text{ мм}$ (рис. 4).

Распределения компонентов вектора скорости представлены на рис. 5.

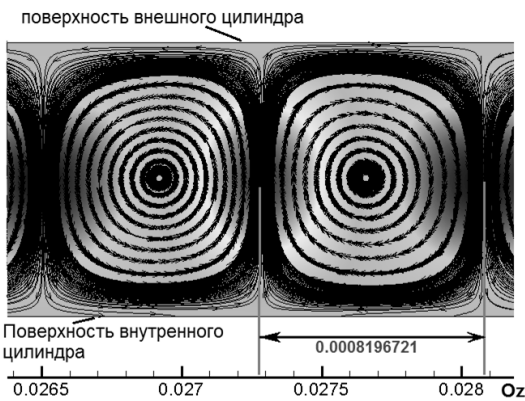


Рис. 4. Пара оси симметричного вихря

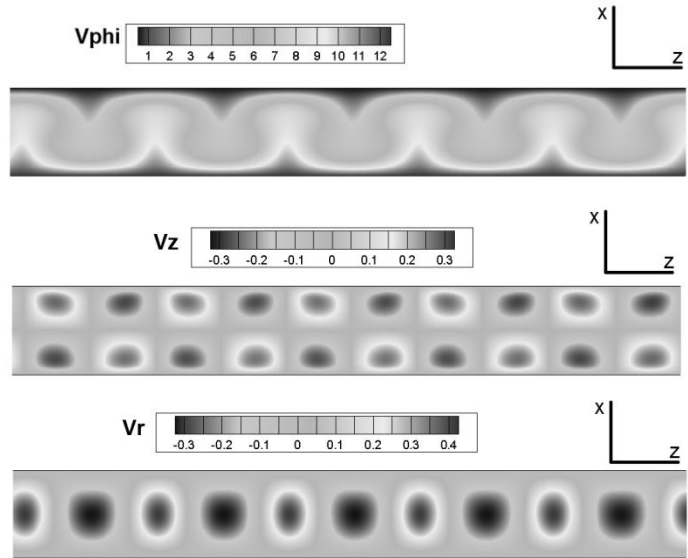


Рис. 5. Распределения поля скорости вихря

2.2. Температуры цилиндров $T_1 = T_2 = T_{\text{газ}} = 293^\circ\text{К}$ и $\Omega_2 = 0$. Изменение Re от $4 \cdot 10^4$ до $4 \cdot 10^5$ (Ω_1 от 10 об/с до 100 об/с)

Характерная угловая скорость: линейная скорость внутреннего цилиндра при угловой скорости $\Omega_1^* = 20 \text{ об/с} : V_1^* = 2\pi\Omega_1^*R_1 = 6,2832 \text{ м/с}$. Безразмерная скорость $\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_1^*} = \frac{2\pi\Omega_1 R_1}{2\pi\Omega_1^* R_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_1^*}$

принимает безразмерные значения, указанные в табл. 2.

Таблица 2

Ω_1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
\bar{V}_1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0

Число Рейнольдса $Re = \frac{VD}{\eta}$, где

$D = R_1 = 0,100 \text{ м}; V = 2\pi\Omega_1 R_1; \eta = 15,11 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с},$

поэтому $Re = \frac{2\pi\Omega_1 R_1^2}{\eta}$ и принимает значения, показанные в табл. 3.

Таблица 3

Ω_1 об/с	10	20	30	40	50
Re	41583,05	83166,11	124749,17	166332,23	207915,29
Ω_1 об/с	60	70	80	90	100
Re	249498,25	291081,40	332664,46	374427,52	415830,58

Анализ полученных результатов показывает, что при изменении числа Рейнольдса от 4×10^4 до 4×10^5 (угловой скорости Ω_1 от 10 об/с до 100 об/с) количество пар вихрей изменяется в соответствии с кривой, показанной на рис. 6. При числе Рейнольдса $Re = 41583,05$ ($\Omega_1 = 10$ об/с) поле является стационарным и не со-

держит вихрей. Из графика видно, что при числе Рейнольдса $Re < 20 \times 10^4$ ($\Omega_1 < 50$) количество пар вихрей монотонно возрастает с увеличением числа Рейнольдса (т.е. угловой скорости). В диапазоне изменения числа Рейнольдса от 20×10^4 до 30×10^4 (т.е. $\Omega_1 \in [50, 70]$) количество вихрей быстро уменьшается при увеличении Ω_1 . После этого оно почти остается постоянным, хотя угловая скорость продолжает увеличиваться. При $\Omega_1 \geq 50$ вихри переходят в нестационарные состояния. Пары вихрей изменяют свою форму и становятся разными (рис. 7).

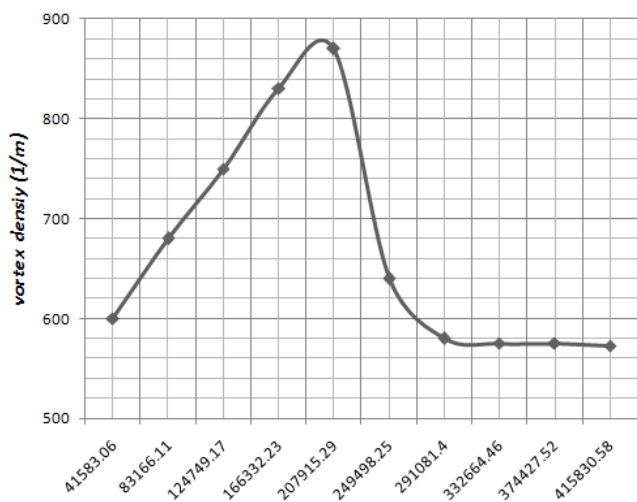


Рис. 6. Зависимость плотности пар вихрей от вращательной скорости внутреннего цилиндра

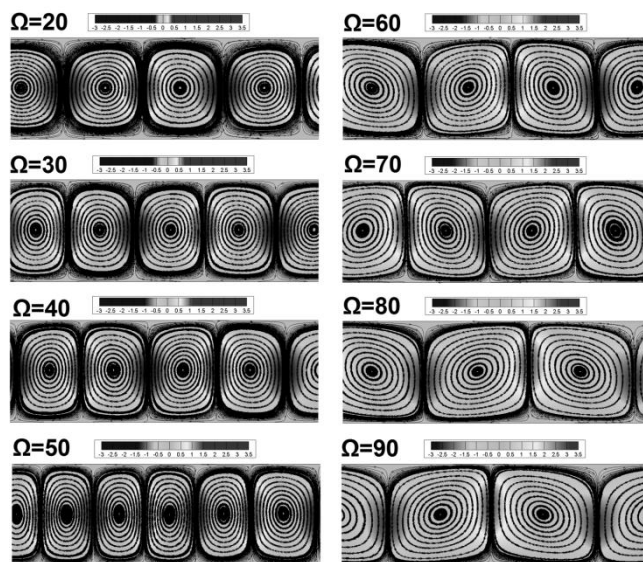


Рис. 7. Изменение поля вихрей при увеличении вращательной скорости

2.3. Фиксированное число Рейнольдса $Re = 8 \times 10^4$ ($\Omega_1 = 20$ об/с, $\Omega_2 = 0$), $T_1 = T_{газ} = 293^\circ K$ при изменении температуры $T_2 = (400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400)^\circ K$

Температура торможения $C_p T_0 = C_p T_1 + V_1^2/2$, где $V_1 = 6,2832$ м/с; $T_1 = 293^\circ K$; $C_p = 7/2 \cdot R = 3,5 \times 287 = 1004,5$ Дж/(кг·°K), поэтому $T_0 = T_1 + \frac{V_1^2}{2C_p} = 293 + \frac{6,2832^2}{2 \cdot 1004,5} = 293,0786(K)$.

Характерная температура $\bar{T} = \frac{T_2}{T_0}$ представлена в табл. 4.

Результат: при изменении температуры внешнего цилиндра поле скоростей является стационарным. Пары вихрей образуют периодическую структуру. Плотность пар вихрей (количество пар вихрей в размере одного метра цилиндра) незначительно изменяется (рис. 8). Сначала, при $\bar{T} \leq 4$ или $T_2 < 1200^\circ K$ количество пар монотонно увеличивается с повышением температуры. После этого оно уменьшается и, наконец, стабилизируется при $\bar{T} \geq 7$ или $T_2 > 2000^\circ K$.

Таблица 4

T_2	400	800	1200	1600	2000	2400
\bar{T}	1,3648	2,7296	4,0944	5,4592	6,8241	8,1889

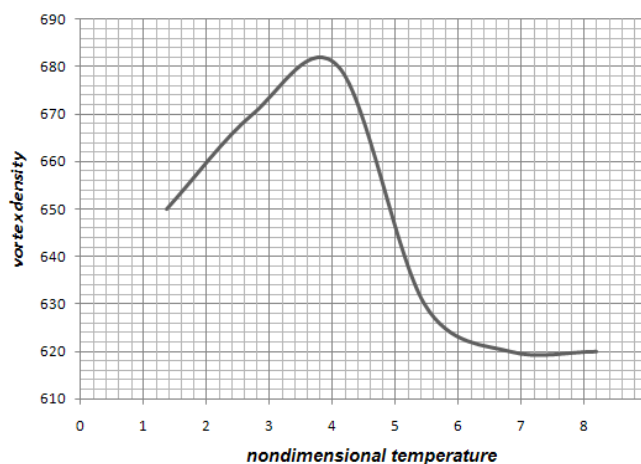


Рис. 8. Зависимость плотности пар вихрей от температуры внешнего цилиндра

Выводы

Численными методами исследовано течение Куэтта-Тейлора вязкого сжимаемого газа. На основе физической модели получены численные результаты для разных температур поверхностей и угловых скоростей цилиндров. Исследовано влияние данных параметров на плотность и структуру вихрей в течении. Выявлены немонотонные зависимости числа вихрей (или размеров вихрей в окружном направлении) от числа Рейнольдса и от температуры поверхности внешнего цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Као К.Н., Chow C.Y. Linear stability of compressible Taylor–Couette flow // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. - V.4, V5. - P. 984–996.
2. Боголепов В.В., Липатов И.И. Влияние сжимаемости на структуру вихрей Гертлера // *Механика жидкости и газа*. - 1997. - Т. 1. - С. 36 – 47.
3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. - М.: Физматлит, 1963.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика // *Гидромеханика*. - М.: Наука, 1986. - Т. 6.
5. Richard D. Sandberg Governing equations for a new Navier-Stokes Solver in general cylindrical coordinates // Report No. AFM-07/07, University of Southampton, 2007.

THE INFLUENCE OF CHARACTERISTIC PARAMETERS ON THE VORTEX STRUCTURE OF THE TAYLOR-COUETTE FLOW OF COMPRESSIBLE GAS

Do Suan Zoan, Lipatov M.I., Pham Tuan Vinh

The Couette-Taylor flow of compressible gas at high Reynolds numbers is studied. Problem statement is formulated on the basis of the differential equation system (the Navier-Stockes equations) for compressible gas in cylindrical coordinates. On the basis of physical model built in CFD, the numerical results for various temperatures of the cylinder's surfaces and rotational speed are obtained. The relation between vortice dimensions and surface temperatures and rotational speed is established.

Key words: Couette-Taylor flow, compressibility influence, flow structure.

Сведения об авторах

До Суань Зоань, 1983 г.р., окончил МФТИ (2010), аспирант МФТИ, автор 2 научных работ, область научных интересов – динамика вязкого газа, гидродинамическая устойчивость.

Липатов Михаил Игоревич, 1986 г.р., окончил МФТИ (2009), аспирант МФТИ, автор 2 научных работ, область научных интересов – динамика вязкого газа, гидродинамическая устойчивость, гиперзвуковые течения.

Фам Туан Винь, 1985 г.р., окончил МФТИ (2012), аспирант МФТИ, автор 2 научных работ, область научных интересов - компьютерное моделирование газодинамики.