

УДК 514.7

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-114-121

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН УРАВНЕНИЯ КДВ-БЮРГЕРСА В ДИССИПАТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А.В. САМОХИН^{1,2}, Ю.И. ДЕМЕНТЬЕВ¹

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия

²Институт проблем управления Российской академии наук, г. Москва, Россия

Работа является продолжением исследования, начатого в предшествующих работах авторов. В настоящее время теория нелинейных волн переживает бурное развитие, и ее результаты находят многочисленные практические применения. Можно упомянуть направление, связанное с изучением возникновения и эволюции ударных волн, уединенные волны, кинки, периодические и квазипериодические колебания (например – кноидальные волны) и многое другое. В этом ряду малоизученными остаются вопросы с движением солитонов в неоднородной среде; в настоящей статье рассматривается вопрос о простейшей модели такой среды: слоисто-неоднородной. Рассматривается поведение решений типа одиночной волны для уравнения КдВ-Бюргерса при различных видах диссипативной неоднородности среды. В работе исследованы разнообразные виды финитных препятствий, а также переход из диссипативной среды в свободную. Получены численные модели поведения решения. Моделирование проводилось при помощи математической программы Maple с использованием пакета PDETools. Рассмотренные задачи вычислительно очень трудоемки и требуют больших затрат машинного времени. Особо интересен случай увеличения высоты препятствия при сохранении ширины. При анализе численных экспериментов наблюдается неожиданный эффект увеличения высоты волны при увеличении высоты препятствия, что может являться предметом дальнейшего исследования. Вместе с этим при увеличении высоты препятствия увеличивается рябь, бегущая впереди волны. Отметим, что в предыдущих работах авторов была описана другая ситуация, связанная с возникновением ряби. Если же при сохранении высоты препятствия снова увеличим ширину, то ожидаемо наблюдается существенное уменьшение амплитуды волны, что продемонстрировано на модельных графиках. Таким образом, в работе, имеющей экспериментальный характер, продемонстрированы новые интересные свойства движения квазисолитонов в зависимости от вида и размера диссипативных препятствий на основе численного моделирования.

Ключевые слова: уравнение КдВ-Бюргерса, солитон, неоднородная диссипативная среда.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория нелинейных волн переживает бурное развитие, и ее результаты находят многочисленные практические применения. Можно упомянуть направление, связанное с изучением возникновения и эволюции ударных волн [2–4, 10–12], уединенные волны [1, 5], кинки, периодические и квазипериодические колебания (например – кноидальные волны [6–8]) и многое другое. В этом ряду малоизученными остаются вопросы, связанные с движением солитонов в неоднородной среде. В настоящей статье рассматривается вопрос о простейшей модели такой среды: слоисто-неоднородной.

Будем рассматривать уравнение Кортевега – де Фриза – Бюргерса (КдВ-Б)

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} + 2uu_x + \lambda u_{xxx},$$

описывающее волны в среде с дисперсией и диссипацией. При $\varepsilon = 0$ диссипация отсутствует и получившееся уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t = 2uu_x + \lambda u_{xxx}$$

в качестве решения дает уединенные волны (солитоны).

На рис. 1 изображен квазисолитон (солитон, сдвинутый по высоте), заданный формулой $-0,375 \tanh^2(0,25x + 3,75) - 0,25$. Коэффициент λ в уравнении взят единицей. Переменную x рассмотрели на отрезке $[-40;10]$. Подробнее о понятии солитонов и принципах их движения см. в работе [1].

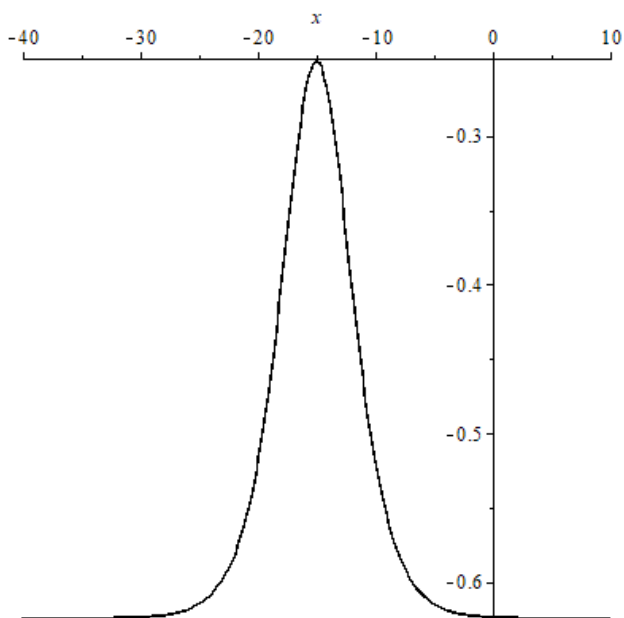


Рис. 1. Солитонное решение уравнения КдВ-Б
Fig. 1. Soliton solution of the KdV-B equation

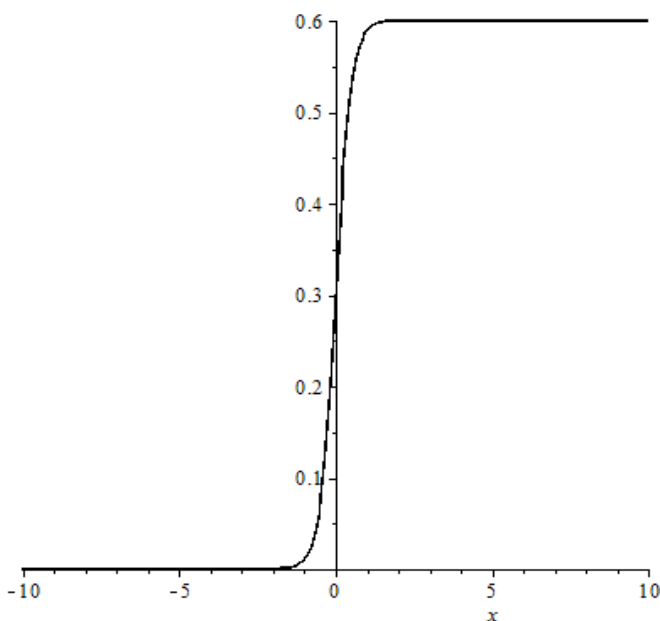


Рис. 2. График коэффициента диссипации
Fig. 2. Graph of the dissipation coefficient

Целью настоящего исследования является изучение поведения (квази) солитонов, которые при движении по недиссипативной среде встречаются финитные препятствия с постоянной диссипацией, разные по высоте и толщине, а также переход волны из диссипативной среды в недиссипативную. Физически это можно представить, как луч света, встречающий на своем пути частично поглощающий слой разной формы или свет, пробивающийся через стекло или лед.

Предлагаемая работа является продолжением исследований авторов [2, 4, 5] и работы [3]. Расчеты выполнялись в среде Maple с использованием пакета PDETools.

Ситуация, когда сначала диссипации нет, а затем диссипация равна константе, описывается уравнением

$$u_t = 0,3 \cdot (1 + \tanh(2x)) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

В этом случае для диссипативного коэффициента $0,3 \cdot (1 + \tanh(2x))$ (рис. 2) при переходе через ноль получаем смену типа уравнения с уравнения КдВ на уравнение КдВ – Бюргерса (см. [5]).

На рис. 3 показано движение квазисолитона при изменении типа уравнения для следующих начально-граничных условий:

$$u(x, 0) = -0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) - 0,25 \Big|_{t=0};$$

$$u(-20, t) = -0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) - 0,25 \Big|_{x=-20};$$

$$u'_x(45, t) = 0; \quad u'_x(-20, t) = \left(-0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) - 0,25 \right)'_x \Big|_{x=-20}.$$

До препятствия квазисолитон движется слева направо, практически не меняя формы и размера. Затем волна начинает экспоненциально затухать [5].

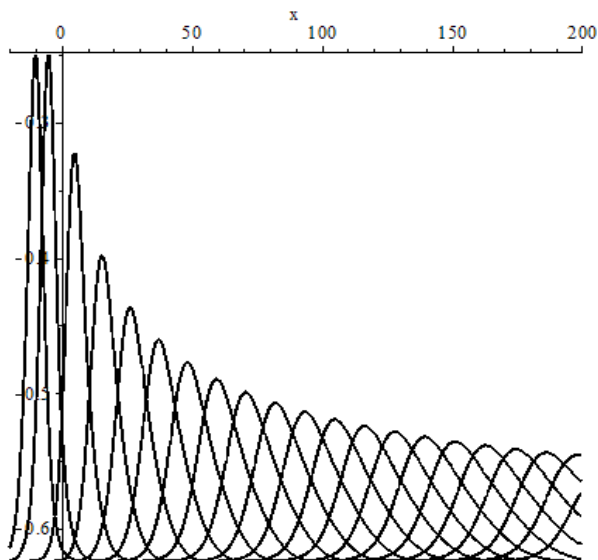


Рис. 3. Решения при $t = 5$
и от 10 до 200 с шагом 10
Fig. 3. Solutions at $t = 5$
and $t = 10$ to 200 by step 10

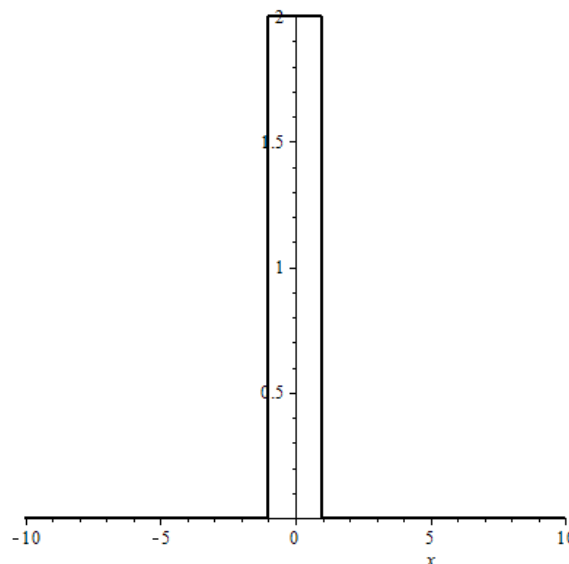


Рис. 4. График коэффициента диссипации
Fig. 4. Graph of the dissipation coefficient

ЗАВИСИМОСТЬ ВОЛНЫ ОТ ФИНИТНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Рассмотрим, как меняется поведение волны после встречи с финитным диссипативным препятствием в зависимости от ширины и высоты препятствия.

Как показано в [5] для уравнения

$$u_t = \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}$$

с диссипативным коэффициентом $\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|}$ (рис. 4) и с начально-граничными условиями

$$u(x, 0) = 0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{t=0};$$

$$u(-20, t) = 0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{x=-20};$$

$$u'_x(200, t) = 0; \quad u'_x(-20, t) = \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t + x) + 3,75) + 0,25 \right)'_x \Big|_{x=-20},$$

после прохождения препятствия волна сначала уменьшает амплитуду, а затем происходит небольшое ее увеличение и стабилизация.

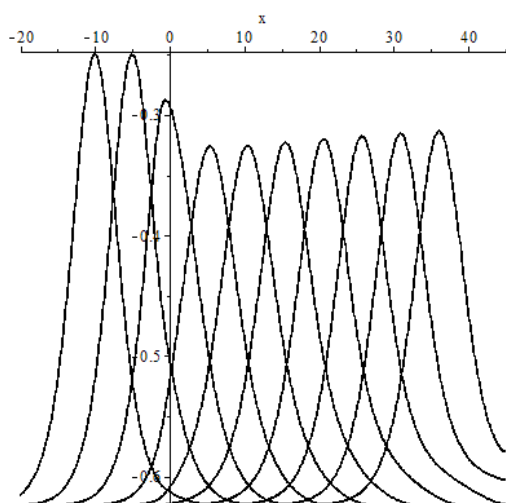


Рис. 5. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 5. Solutions at t = 5 to 50 by step 5

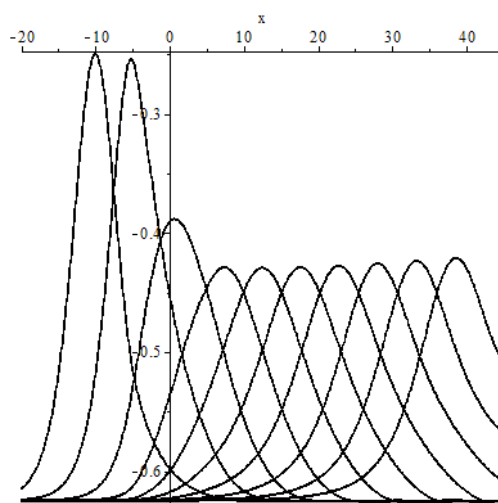


Рис. 6. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

Изменим теперь ширину диссипативного препятствия. Для уравнения

$$u_t = \left(\frac{x+5}{|x+5|} - \frac{x-5}{|x-5|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}$$

движение волны показано на рис. 6, а для уравнения показано на рис. 7. Прослеживается явная зависимость степени затухания волны от ширины препятствия.

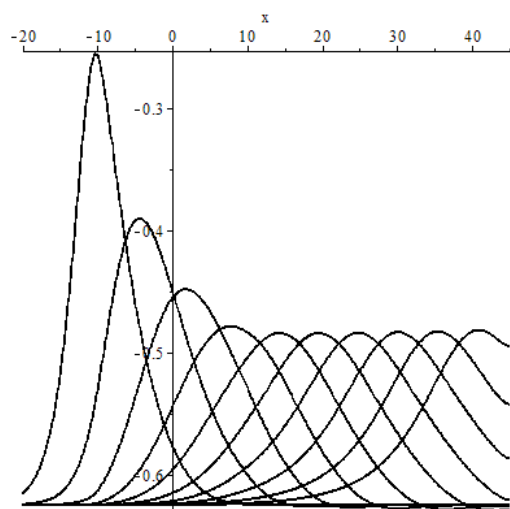


Рис. 7. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 7. Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

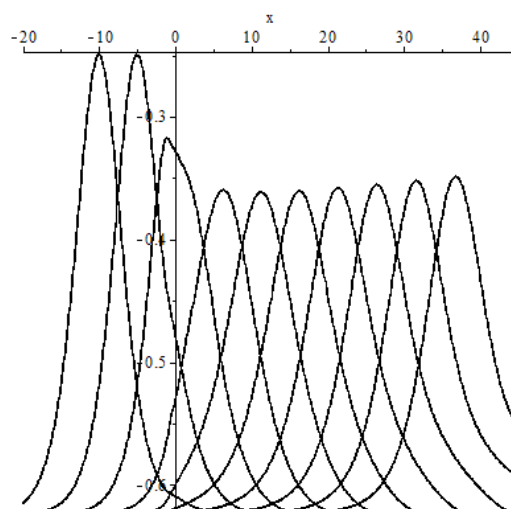


Рис. 8. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

$$u_t = \left(\frac{x+10}{|x+10|} - \frac{x-10}{|x-10|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}$$

Интересен также случай увеличения высоты препятствия при сохранении ширины. На рис. 8, 9, 10 приведены графики поведения волн соответственно для следующих трех уравнений:

$$u_t = 20 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx},$$

$$u_t = 200 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx},$$

$$u_t = 2000 \cdot \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

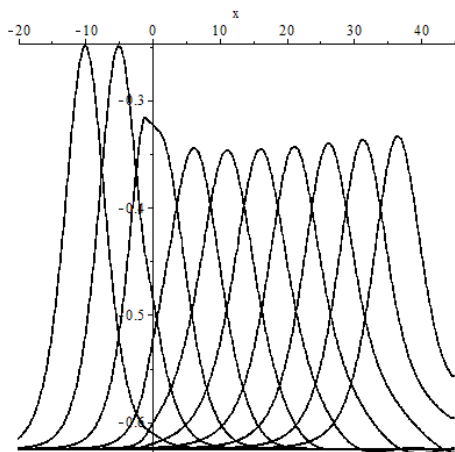


Рис. 9. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 9. Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

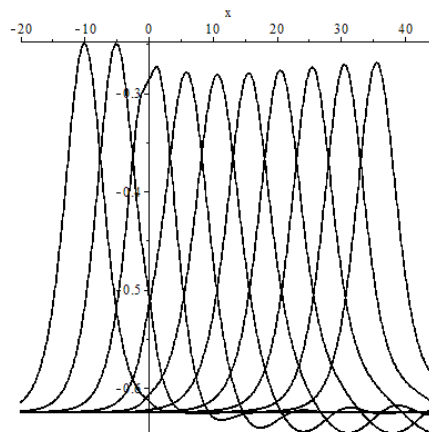


Рис. 10. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 10. Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

Наблюдается неожиданный эффект увеличения высоты волны при увеличении высоты препятствия, что может являться предметом дальнейшего исследования. Вместе с этим, при увеличении высоты препятствия увеличивается рябь, бегущая впереди волны. В работе [5] была описана другая ситуация, связанная с возникновением ряби. Если же при сохранении высоты препятствия снова увеличим ширину, то ожидаемо наблюдается существенное уменьшение амплитуды волны, что продемонстрировано на рис. 11, 12 соответственно для уравнений

$$u_t = 20 \cdot \left(\frac{x+5}{|x+5|} - \frac{x-5}{|x-5|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}, \quad u_t = 20 \cdot \left(\frac{x+10}{|x+10|} - \frac{x-10}{|x-10|} \right) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

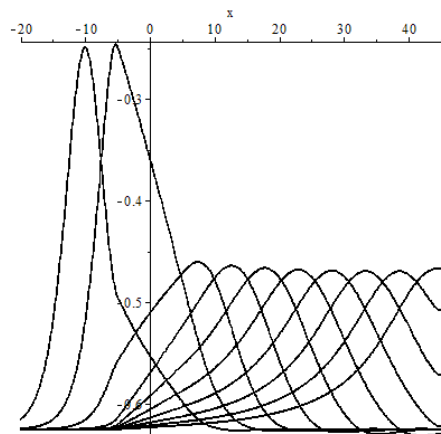


Рис. 11. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 11. Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

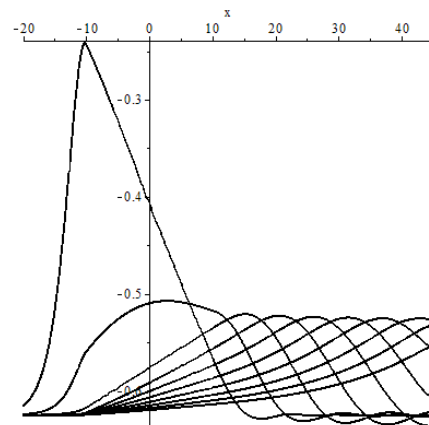


Рис. 12. Решения при t от 5 до 50 с шагом 5
Fig. 12. Solutions at t = 5 from 5 to 50 with step 5

ПЕРЕХОД ИЗ ДИССИПАТИВНОГО СЛОЯ В НЕДИССИПАТИВНЫЙ

Теперь рассмотрим случай перехода волны из диссипативного слоя в недиссипативный. Такую ситуацию можно описать уравнением

$$u_t = 0,3 \cdot (1 + \tanh(-2x)) \cdot u_{xx} + 2uu_x + u_{xxx}.$$

Начальные и граничные условия такие же, как в предыдущем пункте.

После выхода из диссипативного слоя амплитуда волны начинает увеличиваться и одновременно с этим увеличивается рябь, бегущая перед волной. Данная ситуация хорошо иллюстрируется приведенным примером в два различных момента времени (рис. 13, 14).

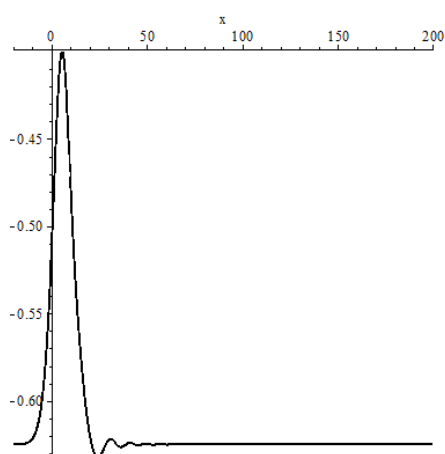


Рис. 13. Решение при $t = 15$
Fig. 13. Solutions at $t = 15$

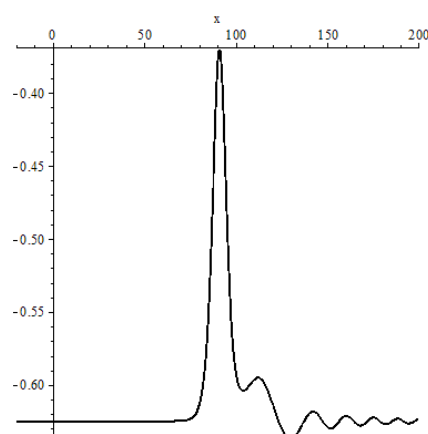


Рис. 14. Решение при $t = 100$
Fig. 14. Solutions at $t = 100$

Таким образом, в работе продемонстрированы новые интересные свойства движения квазисолитонов в зависимости от вида и размера диссипативных препятствий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны: учебное пособие для вузов. М.: Физматлит, 2000. 272 с.
2. Самохин А.В. Решения уравнения Бюргера с периодическим возмущением на границе // Научный Вестник МГТУ ГА. 2015. № 220. С. 82–87.
3. Dubrovin B., Elieva M. On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1301.7216v1.pdf> (accessed 30.01.2013).
4. Самохин А.В., Дементьев Ю.И. Галилеево-инвариантные решения уравнения КдВ-Бюргера и нелинейная суперпозиция ударных волн // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 224. С. 24–33.
5. Самохин А.В., Дементьев Ю.И. Моделирование решений уравнения КдВ-Бюргера в неоднородной среде // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 02. С. 100–108.
6. Bleher P., Its A. Asymptotics of the partition function of a random matrix model // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 2005. Vol. 55. Pp. 1943–2000.
7. Brézin E., Marinari E., Parisi G. A non-perturbative ambiguity free solution of a string model. Volume 242, Issue 1, 31 May 1990, Pp. 35–38.

8. Claeys T., Grava T. Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann-Hilbert approach // *Comm. Math. Phys.* Volume 286. 2009. Pp. 979–1009.

9. Dedecker P., Tulczyjev W.M. Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Geometry, Topology, and Mathematical Physics* // *Lecture Notes in Math.* Vol. 836. New York: Springer, 1980. Pp. 498–503.

10. Dubrovin B. On universality of critical behavior in Hamiltonian PDEs // *Amer. Math. Soc. Transl.* Volume 224. Providence, RI, 2008. Pp. 59–109.

11. Bakholdin B. Non-dissipative and low-dissipative shocks with regular and stochastic structures in non-linear media with dispersion, in *Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence* / eds. A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, M.A. Sokolovskiy // *IUTAM Bookseries 6.* New York: Springer, 2008.

12. Bakholdin B., П'ичев А. Radiation and modulational instability described by the fifth order Korteweg–DeVries equation, in *Mathematical Problems in the Theory of Water Waves* / eds. F. Dias, J.-M. Ghidaglia, J.-C. Saut // *Contemp. Math.* Volume 200. AMS. Providence, RI, 1996.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Самохин Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, a.samohin@mstuca.aero.

Дементьев Юрий Игоревич, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики МГТУ ГА, ju.dementev@mstuca.aero.

MODELLING OF THE KdV-BURGERS EQUATION SOLITARY WAVES IN DISSIPATIVE NONHOMOGENEOUS MEDIA

Alexey V. Samokhin^{1,2}, Yuri I. Dementyev¹

¹*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

²*Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The work is a continuation of the research begun in previous works of the authors. At present, the theory of nonlinear waves is experiencing rapid development, and its results find numerous practical applications. One can mention the direction associated with the study of the origin and evolution of shock waves, solitary waves, kinks, periodic and quasiperiodic oscillations (for example, cnoidal waves) and many others. In this series, problems with the motion of solitons in a nonhomogeneous medium remain insufficiently studied; in this paper we consider the simplest model of such a medium: layered-inhomogeneous. The behavior of solutions of the single-wave type for the KdV-Burgers equation at various dissipative medium nonhomogeneities is considered. Various kinds of finite obstacles, as well as the transition from a dissipative medium to a free one are scrutinized. Numerical models of the solution behavior are obtained. The simulation was carried out using the Maple mathematical program through the PDETools package. The tasks considered in the paper are computationally-intensive and require a great deal of computer time. Of particular interest is the case of increasing the height of the obstacle while maintaining its width. When analyzing numerical experiments, the unexpected effect of increasing the wave height with increasing obstacle height is observed, and this may be the subject of further research. Along with this, as the height of the obstacle increases, ripples run ahead of the wave. It should be noted that in the previous work of the authors, another situation related to the appearance of a ripple was described. If, however, when the height of the obstacle remains constant, we again increase the width, then we observe an appreciable decrease in the wave amplitude, as demonstrated in the model charts. Thus, by this work of an experimental nature some new interesting properties of quasi-soliton motion are demonstrated on the basis of numerical simulation; they depend on the type and size of the dissipative obstacles.

Key words: Korteweg-de Vries-Burgers equation, soliton, nonhomogeneous dissipation medium.

REFERENCES

1. **Ryskin N.M., Trubetskov D.I.** *Nelineinnye volny* [Nonlinear waves]. A text-book for Higher Educational Institutions. M.: Fizmatlit publ., 2000, 272 p. (in Russian)
2. **Samokhin A.V.** *Resheniya uravneniya Burgersa s periodicheskim vozmuscshtniyem na granitse* [Solutions to the Burgers equation with periodic perturbation on boundary]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2015, No. 220, pp. 82–87. (in Russian)
3. **Dubrovин B., Elaeva M.** On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1301.7216v1.pdf> (accessed 30.01.2013).
4. **Dementyev Y.I., Samokhin A.V.** *Galilyeyevo-invariantniye resheniya uravneniya Burgersa i nelineinaya superpositsiya udarnykh voln* [Galilean symmetry invariant solutions to the KDV-Burgers equation and the nonlinear superposition of shock waves]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2016, No. 224, pp. 24–33. (in Russian)
5. **Dementyev Y.I., Samokhin A.V.** *Modelirovaniye resheniy uravneniya Burgersa v neodnorodnoy srede* [Modelling solutions to the KDV-Burgers equation in the case of nonhomogeneous dissipative media]. Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation, 2017. vol. 20, no. 2, pp. 100–108. (in Russian)
6. **Bleher P., Its A.** Asymptotics of the partition function of a random matrix model // Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 2005, vol. 55, pp. 1943–2000.
7. **Brézin E., Marinari E., Parisi G.** A non-perturbative ambiguity free solution of a string model., vol. 242, issue 1, 31 May 1990, pp. 35–38.
8. **Claeys T., Grava T.** Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann-Hilbert approach. Comm. Math. Phys, vol. 286, 2009, pp. 979–1009.
9. **Dedecker P., Tulczyjev W.M.** Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, Geometry, Topology, and Mathematical Physics. Lecture Notes in Math. vol. 836. New York: Springer, 1980, pp. 498–503.
10. **Dubrovин B.** On universality of critical behavior in Hamiltonian PDEs. Amer. Math. Soc. Transl., 2008, vol. 224, Providence, RI, pp. 59–109.
11. **Bakholdin B.** Non-dissipative and low-dissipative shocks with regular and stochastic structures in non-linear media with dispersion, in Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence / eds. A.V. Borisov, V.V. Kozlov, I.S. Mamaev, M.A. Sokolovskiy. IUTAM Bookseries 6. New York: Springer, 2008.
12. **Bakholdin B., Il'ichev A.** Radiation and modulational instability described by the fifth order Korteweg-DeVries equation, in Mathematical Problems in the Theory of Water Waves / eds. F. Dias, J.-M. Ghidaglia, J.-C. Saut. Contemp. Math. Volume 200. AMS. Providence, RI, 1996.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexey V. Samokhin, Doctor of Technical Sciences, Professor of Higher Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, a.samokhin@mstuca.aero.

Yury I. Dementyev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Chair of Higher Mathematics, Moscow State Technical University of Civil Aviation, ju.dementev@mstuca.aero.

Поступила в редакцию
Принята в печать

18.10.2017
14.03.2018

Received
Accepted for publication

18.10.2017
14.03.2018