

УДК 517.957

DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-51-58

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. ГОРИНОВ¹

¹Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, Россия

Исследования поддержаны грантом Российского фонда фундаментальных исследований,
проект № 15-08-08698

Проводится анализ применимости метода «ручного» интегрирования В.В. Лычагина к системам двух квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t, x и двумя неизвестными функциями $u = u(t, x)$ и $v = v(t, x)$. Рассматриваемые системы являются частным случаем систем Якоби, для которых В.В. Лычагиным был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи. Каждому из уравнений системы ставится в соответствие дифференциальная 2-форма на четырехмерном пространстве. Эта пара форм однозначно определяет поле линейных операторов, которое для гиперболических уравнений порождает структуру почти произведения. Это означает, что касательное пространство четырехмерного пространства в каждой точке является прямой суммой двумерных собственных подпространств данного оператора и, таким образом, определены два двумерных распределения. Если хотя бы одно из этих распределений вполне интегрируемо, то можно построить векторное поле, сдвиги вдоль которого сохраняют решение исходной системы уравнений. Таким образом, решение начально-краевой задачи для рассматриваемой системы может быть получено аналитически с помощью сдвига начальной кривой вдоль траекторий данного векторного поля. В качестве примера рассмотрена система уравнений Бакли – Леверетта, описывающая процесс нелинейной одномерной двухфазной фильтрации в пористой среде. Для построения решения задачи Коши выбирается кривая начальных данных; график решения системы Бакли – Леверетта получается сдвигом этой кривой вдоль траекторий векторного поля (это векторное поле определено с точностью до умножения на функцию). Сечения компоненты этого графика для различных моментов времени представлены на рисунке. На графике видно, что в какой-то момент времени решение перестает быть однозначным. В этот момент у решения происходит разрыв и возникает ударная волна.

Ключевые слова: интегрируемые распределения, теорема Фробениуса, гиперболические уравнения.

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t, x и двумя неизвестными функциями $u = u(t, x)$ и $v = v(t, x)$:

$$\begin{cases} A_1 u_x + B_1 v_x + C_1 = 0, \\ A_2 v_x + B_2 u_x + C_2 = v_t. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь A_i, B_i, C_i – известные функции от переменных x, u, v ($i = 1, 2$). Будем считать, что эти функции класса C^∞ .

Система (1) является частным случаем систем Якоби, для которых В.В. Лычагиным был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи [5] (см. также [3]). Опишем суть этого метода применительно к системам типа (1).

Введем пространство $N = \mathbb{R}^4$ с координатами t, x, u_0, v_0 и пространство $M = \mathbb{R}^2$ с координатами t, x . На пространстве N построим две дифференциальные 2-формы

$$\begin{cases} \omega_1 = A_1 dt \wedge du_0 + B_1 dt \wedge dv_0 + C_1 dt \wedge dx, \\ \omega_2 = B_2 dt \wedge du_0 + A_2 dt \wedge dv_0 + C_2 dt \wedge dx + dx \wedge dv_0. \end{cases}$$

С этими дифференциальными формами свяжем дифференциальные операторы

$$\Delta_i: C_{\text{loc}}^\infty(M) \times C_{\text{loc}}^\infty(M) \rightarrow \Omega^2(M) \quad (i = 1, 2),$$

действующие по правилу

$$\Delta_i(u, v) = \omega_i|_{\Gamma_{u,v}} \quad (i = 1, 2).$$

Здесь $C_{\text{loc}}^\infty(M)$ – кольцо локально гладких функций на M , т. е. функций, гладких в своей области определения, $\Omega^2(M)$ – модуль дифференциальных 2-форм на M ,

$$\Gamma_{u,v} = \{u_0 = u(t, x), v_0 = v(t, x)\}$$

– график вектор-функции (u, v) и $\omega|_{\Gamma_{u,v}}$ – ограничение дифференциальной 2-формы ω на этот график. Области определения функций u и v должны совпадать.

Теорема 1. Пара функций (u, v) является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\Delta_1(u, v) = 0, \Delta_2(u, v) = 0.$$

Введем понятие гиперболичности для систем (1). Пусть $\mu \in \Omega^4(N)$ – фиксированная дифференциальная форма объема на N , например,

$$\mu = dt \wedge dx \wedge du_0 \wedge dv_0.$$

Для пары дифференциальных 2-форм $\alpha, \beta \in \Omega^2(N)$ определим симметрическую билинейную форму

$$q: \Omega^2(N) \times \Omega^2(N) \rightarrow C^\infty(N)$$

следующим равенством:

$$\alpha \wedge \beta = q(\alpha, \beta)\mu.$$

Матрица Грамма этой билинейной формы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q(\omega_1, \omega_1) & q(\omega_1, \omega_2) \\ q(\omega_2, \omega_1) & q(\omega_2, \omega_2) \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Система дифференциальных уравнений (1) называется *гиперболической*, если $\det Q < 0$ для всех точек пространства N .

Следующая теорема дает критерий гиперболичности систем (1).

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений (1) является гиперболической тогда и только тогда, когда функция A_1 не обращается в нуль.

В справедливости этой теоремы можно убедиться прямыми вычислениями. Далее считаем, что условие гиперболичности выполняется.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Заметим, что дифференциальные 2-формы $a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2$ и $a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2$, где a_{ij} – функции на N , для которых матрица $\|a_{i,j}\|_{i,j=1,2}$ невырождена, определяют ту же самую систему дифференциальных уравнений (1).

Таким образом, вместо 2-форм ω_1 и ω_2 можно рассматривать дифференциальные 2-формы, являющиеся их линейными комбинациями. В частности, для гиперболических систем коэффициенты a_{ij} можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$$

и

$$\omega_1 \wedge \omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_2.$$

Например, следующие дифференциальные 2-формы удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (3B_2C_1 - A_1C_2)dt \wedge dx + 2A_1B_2dt \wedge du_0 + (3B_2B_1 - A_1A_2)dt \wedge dv_0 - A_1dx \wedge dv_0, \\ \omega_2 &= (B_2C_1 + A_1C_2)dt \wedge dx + 2A_1B_2dt \wedge du_0 + (B_2B_1 + A_1A_2)dt \wedge dv_0 + A_1dx \wedge dv_0. \end{aligned}$$

Построим поле \mathcal{A} линейных операторов на N , определив его равенством

$$X \rfloor \omega_2 = \mathcal{A}X \rfloor \omega_1.$$

Здесь \rfloor – оператор внутреннего умножения, а X – произвольное векторное поле на пространстве \mathbb{R}^4 . В базисе

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial}{\partial v_0}$$

матрица этого линейного оператора имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \frac{B_2B_1 - A_1A_2}{A_1} & -1 & 0 & 0 \\ 2 \frac{A_2C_1 - B_1C_2}{A_1} & 2 \frac{C_1}{A_1} & 1 & 2 \frac{B_1}{A_1} \\ 2 \frac{C_2A_1 - C_1B_2}{A_1} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные подпространства оператора \mathcal{A} определяют два двумерных распределения на пространстве N : распределение V^+ , которое порождено парой векторных полей

$$X^+ = A_1 \frac{\partial}{\partial t} + (B_2B_1 - A_1A_2) \frac{\partial}{\partial x} + (C_2A_1 - C_1B_2) \frac{\partial}{\partial v_0}$$

и

$$Y^+ = \frac{\partial}{\partial u_0},$$

и распределение V^- , порожденное парой векторных полей

$$X^- = -B_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial v_0}$$

и

$$Y^- = -A_1 \frac{\partial}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial u_0}.$$

Определение 2. Распределения V^+ и V^- будем называть *характеристическими*.

Характеристические распределения обладают одним замечательным свойством: касательная плоскость в точке a к графику решения $\Gamma_{u,v}$ пересекает каждую из характеристических плоскостей $V^+(a)$ и $V^-(a)$. Поэтому на графике решения лежат интегральные кривые характеристических распределений. Эти кривые называются *характеристиками*. Это наблюдение лежит в основе описываемого метода аналитического интегрирования.

А именно, допустим, что одно из характеристических распределений, например, V^+ , вполне интегрируемо и кривая \mathcal{K} лежит на нулевой поверхности уровня интеграла распределения V^+ . Для построения решения, график которого содержит кривую \mathcal{K} , достаточно построить векторное поле Z из распределения V^- , трансверсальное кривой начальных данных \mathcal{K} , и сдвинуть эту кривую вдоль его траекторий. В результате сдвига получится поверхность, которая и будет представлять собой график искомого решения [3].

Характеристические распределения можно также задать дифференциальными 1-формами

$$\begin{aligned} \theta_1^+ &= \frac{A_2 C_1 - B_1 C_2}{A_1} dt + \frac{C_1}{A_1} dx + du + \frac{B_1}{A_1} dv, \\ \theta_2^+ &= \frac{A_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1} dt, \\ \theta_1^- &= \frac{B_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1} dt + dv, \\ \theta_2^- &= \frac{B_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1} dt - \frac{C_1}{A_1} dx - \frac{B_1}{A_1} dv. \end{aligned}$$

Теорема 3. 1. Характеристическое распределение V^+ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial u} A_1 B_2 + C_1 A_1 \frac{\partial B_2}{\partial u} - C_1 \frac{\partial A_1}{\partial u} B_2 - A_1^2 \frac{\partial C_2}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial C_2}{\partial u} A_1 B_1 - C_1 A_1 \frac{\partial A_2}{\partial u} - \frac{\partial C_1}{\partial u} B_1 B_2 + \frac{\partial B_1}{\partial u} B_2 C_1 = 0. \end{cases}$$

2. Характеристическое распределение V^- вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда либо

$$A_1 C_2 - B_2 C_1 = 0,$$

либо

$$\frac{\partial B_1}{\partial x} A_1 - B_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial u} B_1 - C_1 \frac{\partial B_1}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial v} C_1 - A_1 \frac{\partial C_1}{\partial v} = 0.$$

Справедливость этой теоремы следует из условий полной интегрируемости Фробениуса

$$\begin{cases} \theta_1^\pm \wedge \theta_2^\pm \wedge d\theta_1^\pm = 0, \\ \theta_1^\pm \wedge \theta_2^\pm \wedge d\theta_2^\pm = 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи Коши для системы (1) может быть получено методом В.В. Лычагина, если выполняются условия теоремы 3.

Заметим, что при выполнении условия $A_1C_2 - B_2C_1 = 0$ в системе (1) одно из уравнений оказывается не связанным с другим. То есть система распадается на два уравнения. То же самое справедливо и в случае полной интегрируемости распределения V^+ .

СИСТЕМА БАКЛИ – ЛЕВЕРЕТТА

В качестве примера рассмотрим систему уравнений Бакли – Леверетта [1, 2], описывающую процесс одномерной двухфазной фильтрации в пористой среде:

$$\begin{cases} s_t + G(s)H(s)p_x s_x = 0, \\ H'(s)p_x s_x + H(s)p_{xx} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x – пространственная координата, t – время, s – водонасыщенность, то есть относительный объем пор, заполненных водой, p – давление, G и H – заданные функции.

Введем обозначения: $u = p_x$, $v = s$. Система (2) является частным случаем системы (1) при

$$A_1 = H(v), \quad B_1 = H'(v)u, \quad C_1 = 0, \quad A_2 = -G(v)H(v)u, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 0,$$

и вместо системы (1) будем рассматривать систему

$$\begin{cases} H(v)u_x + H'(v)uv_x = 0, \\ -G(v)H(v)uv_x = v_t. \end{cases} \quad (3)$$

Условие интегрируемости распределения V^- теоремы 3 выполняется для этой системы, и поэтому задача Коши для (2) может быть решена методом В.В. Лычагина.

Ее характеристические распределения порождены векторными полями

$$V^+: \quad X^+ = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y^+ = G(v)H(v)u \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$$

и

$$V^-: \quad X^- = H'(v)u \frac{\partial}{\partial u} - H(v) \frac{\partial}{\partial v}, \quad Y^- = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Вполне интегрируемое распределение V^- имеет два функционально независимых интеграла

$$I_1 = t, \quad I_2 = uH(v).$$

Их ограничения на кривую

$$\gamma = (x = 0, u = U(t), v = V(t))$$

имеют вид

$$I_1|_\gamma = t, \quad I_2|_\gamma = f(t) = H(V(t))U(t).$$

Найдем функцию F , такую, что

$$F(I_1|_\gamma, I_2|_\gamma) = 0.$$

Этому условию удовлетворяет функция

$$F(I_1, I_2) = I_2 - f(I_1).$$

Кривая γ лежит на графике решения $\Gamma_{u,v}$, если ограничение функции F на эту кривую равно нулю: $F|_\gamma = 0$.

Построим векторное поле Z на графике $\Gamma_{u,v}$, интегральные кривые которого являются в то же время интегральными кривыми распределения V^+ :

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - G(v)H(v)u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{f}(t)}{H(v)} \frac{\partial}{\partial u}.$$

Это векторное поле определено с точностью до умножения на функцию.

Для построения решения задачи Коши возьмем следующую кривую начальных данных:

$$\mathcal{K} = \{t = 0, u = U_{\mathcal{K}}(x), v = V_{\mathcal{K}}(x)\}.$$

График решения системы Бакли – Леверетта получается сдвигом этой кривой вдоль траекторий векторного поля Z . Сечения компоненты v этого графика для различных моментов времени представлены на рис. 1.

Видим, что в какой-то момент времени решение перестает быть однозначным. В этот момент у решения происходит разрыв и возникает ударная волна [3, 4].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен класс систем двух квазилинейных гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными t, x и двумя неизвестными функциями $u = u(t, x)$ и $v = v(t, x)$ (включающий практически важную задачу фильтрации), для которых ранее был предложен аналитический способ решения начально-краевой задачи. Однозначным образом определяется поле линейных операторов на четырехмерном многообразии, которое для гиперболических уравнений порождает структуру почти произведения и касательное пространство в каждой точке является прямой суммой двумерных собственных подпространств. Если хотя бы одно из этих распределений вполне интегрируемо, то можно построить векторное поле, сдвиги вдоль которого сохраняют решение исходной системы уравнений. Разобранный пример показывает, что аналитическая процедура решения задачи Коши адекватно описывает возникновение ударных волн.

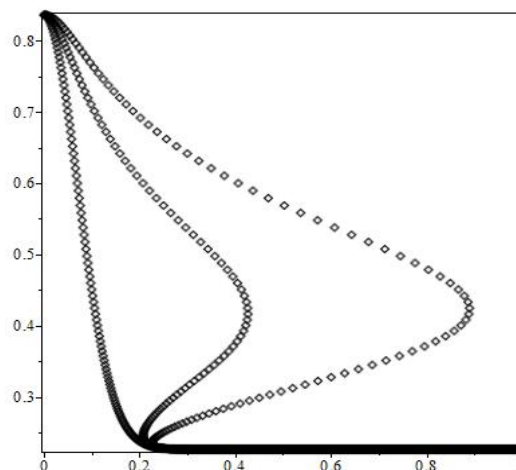


Рис. 1. Сечения графика решения для различных моментов времени
Fig. 1. Graph cut sets of a solution for different time moments

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.** Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений. М.: ИПУ РАН, 2017. 124 с.
2. **Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V.** Integrability of Buckley-Leverett's Filtration Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, Issue 12. Pp. 1251–1254.
3. **Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.** Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Its Appl., 101. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. xxii+496 p.
4. **Lychagin V.V.** Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. 1985. Vol. 3. Pp. 135–173.
5. **Lychagin V.V.** Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1, 2. Rome: La Sapienza, 1993.
6. **Kushner A.G., Lychagin V.V.** Feedback invariants of control hamiltonian Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline): World Congress. Montreal: Elsevier, 2015. Vol. 48, No. 3. Pp. 1273–1275.
7. **Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A.** Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations // Analysis and Mathematical Physics. 2016. Vol. 7, No. 2. C. 107–115.
8. **Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A.** Natural spinor structures over Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2016. Vol. 106. Pp. 1–5.
9. **Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V.** Integrable Models of Oil Displacement // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, Issue 3. Pp. 1264–1267.
10. **Konovenko N.G., Lychagin V.V.** Lobachevskian geometry in image recognition // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, No. 3. Pp. 286–291.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Горинов Антон Андреевич, младший научный сотрудник Института проблем управления РАН, gorinov@ipu.ru.

ABOUT ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM OF TWO QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS SYSTEM

Anton A. Gorinov¹

¹*Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The study was conducted with support of Russian Foundation for Basic Research (RFBR),
Project № 15-08-08698

ABSTRACT

The applicability of the V. Lychagin "manual" integration method is analyzed with respect to systems of two quasilinear hyperbolic differential equations of the first order with two independent variables t, x and two unknown functions $u = u(t, x)$ and $v = v(t, x)$. The systems under consideration are a special case of Jacobi systems, for which V. Lychagin proposed an analytical method for solving the initial-boundary value problem. Each of the equations of the system is associated with a differential 2-form on four-dimensional space. This pair of forms uniquely determines the field of linear operators, which, for hyperbolic equations, generates an almost product structure. This means that the tangent space of four-dimensional space in each point is a direct sum of two-dimensional own-subspaces of the given operator and, thus, two 2-dimensional distributions are defined. If at least one of these distributions is completely integrable, then it is possible to construct a vec-

tor field along which shifts keep the solution of the original system of equations. Thus, the solution of the initial-boundary value problem for the system under consideration can be obtained analytically by shifting the initial curve along the trajectories of the given vector field. As an example, the Buckley-Leverett system of equations describing the process of nonlinear one-dimensional two-phase filtration in a porous medium is considered. To construct the solution of the Cauchy problem, a curve of the initial data is chosen; the solution of the Buckley-Leverett system is obtained by shifting this curve along the trajectories of the vector field (this vector field is defined up to multiplication by a function). The cross-sections of the components of this graph for different instants of time are brought in the figure. The graph shows that at some point of time the solution stops being unambiguous. At this point, the solution breaks and a shock wave appears.

Key words: integrable distributions, Frobenius theorem, hyperbolic equations.

REFERENCES

1. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. *Matematicheskiye modeli upravleniya razrabotkoy neftyanykh mestorozhdeniy* [Mathematical models of oil field development management]. M.: IPP RAS, 2017. 124 p. (in Russian)
2. Akhmetzianov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Integrability of Buckley-Leverett's Filtration Model. IFAC-PapersOnLine, 2016, vol. 49, issue 12, pp. 1251–1254.
3. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Its Appl., 101. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. xxii+496 p.
4. Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena. Acta Appl. Math., 1985, vol. 3, pp. 135–173.
5. Lychagin V.V. Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1, 2. Rome: La Sapienza, 1993.
6. Kushner A.G., Lychagin V.V. Feedback invariants of control hamiltonian Systems. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline): World Congress. Montreal: Elsevier, 2015, vol. 48, No. 3, pp. 1273–1275.
7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations. Analysis and Mathematical Physics, 2016, vol. 7, No. 2, pp. 107–115.
8. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Natural spinor structures over Lorentzian manifolds. Journal of Geometry and Physics, 2016, vol. 106, pp. 1–5.
9. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Integrable Models of Oil Displacement. IFAC-PapersOnLine, 2015, vol. 48, issue 3, pp. 1264–1267.
10. Konovenko N.G., Lychagin V.V. Lobachevskian geometry in image recognition. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015, vol. 36, No. 3, pp. 286–291.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anton A. Gorinov, Research Assistant at Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, gorinov@ipu.ru.

Поступила в редакцию
Принята в печать

24.12.2017
14.03.2018

Received
Accepted for publication

24.12.2017
14.03.2018