УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНАХ НАГРУЖЕНИЯ

В.В. БЕНДЮКОВ, О.Г. ОСЯЕВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Ципенко В.Г.

Предложена модель поведения реологического тела (вязкоупругого материала, конструкции или системы) при управляющем воздействии нагрузки, действующей по заданному закону в течение некоторого времени.

Ключевые слова: реологическая среда, динамическая модель вязкоупругости, релаксация, коэффициент затухания.

В качестве управляющей нагрузки модели реологического тела (твердого топлива, вязкоупругого материала, системы) удобно рассмотреть функцию гармонического изменения действующих напряжений $\sigma(t)$. Управляемой функции отклика системы будет выступать соответствующая ей функция деформаций, также изменяющаяся по гармоническому закону с запаздыванием по фазе, равным углу механических потерь $\Delta\varphi$. Наиболее универсальной моделью поведения реологической среды являются наследственные уравнения типа Больцмана и Вольтера для полимерных композитных материалов РТТ и подобных им реологических сред. Однако наиболее наглядно поведение систем при данных условиях можно описать с помощью рассмотренных динамических моделей вязкоупругости на основе трехпараметрического дифференциального операторного уравнения. Примем закон гармонического нагружения реологического тела в виде функции

$$\ddot{\varepsilon} + 2\frac{E}{\eta}\dot{\varepsilon} + 4\pi^2 f_0^2 \varepsilon = \Psi(t), \tag{1}$$

где $\Psi(t)$ − функция внешней нагрузки; ε − деформация, вызванная этой нагрузкой; E, η − модуль упругости, динамическая вязкость среды; f_0 − частота установившихся колебаний системы.

Функцию внешнего воздействия в правой части уравнения (1) можно представить множеством способов, исходя из удобства рассмотрения задачи. В любом случае функция $\Psi(t)$ представляет собой произведение

$$\Psi(t) = K\widehat{N}, \tag{2}$$

где $\widehat{N}$ − параметр нагрузки; K − константы, характеризующие объект воздействия нагрузки.

В качестве наиболее удобных можно рассматривать следующие способы выражения функции $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \frac{D}{Em}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{EV\rho}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{\lambda\eta V\rho}\widehat{\sigma}(t) = \frac{D}{\eta V\rho}t_p\widehat{\sigma}(t); \tag{3}$$

$$\Psi(t) = \frac{E}{Dmt_p}\widehat{p}(t) = \frac{E}{DV\rho t_p}\widehat{p}(t) = \frac{E}{DV\rho t_p}\widehat{p}(t) = \frac{E\lambda}{DV\rho}\widehat{p}(t); \tag{4}$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{Sm}\widehat{W}(t) = \frac{1}{SV\rho}\widehat{W}(t) = \frac{1}{SV\rho}\widehat{Q}(t) = \frac{1}{\widehat{\alpha}SV\rho}\Delta\widehat{S}(t); \tag{5}$$

$$;\Psi(t) = \frac{k}{Sm}\Delta\widehat{T}(t) = \frac{R}{S}\Delta\widehat{T}(t) = \frac{k}{SV\rho}\Delta\widehat{T}(t); \tag{6}$$

$$\Psi(t)=\frac{C}{Sm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{c_m}{S}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{S}}{Sm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{S}}{SV\rho}\Delta\widehat{T}(t)\,; \tag{7}$$

$$\Psi(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda ESm}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda ESV\rho}\Delta\widehat{T}(t)=\frac{\widehat{\lambda}_T D}{\lambda\eta Sm}t_p\Delta\widehat{T}(t)\,; \tag{8}$$

$$\Psi(t)=\frac{\eta}{ESm}\widehat{P}(t)=\frac{\eta}{ESV\rho}\widehat{P}(t)=\frac{t_p}{SV\rho}\widehat{P}(t)=\frac{1}{\lambda SV\rho}\widehat{P}(t)\,; \tag{9}$$

$$\Psi(t)=\frac{1}{S}\widehat{D}(t)=\frac{t_p}{S}\dot{\widehat{D}}(t)=\frac{\eta}{ES}\dot{\widehat{D}}(t)=\frac{1}{\lambda S}\dot{\widehat{D}}(t)\,; \tag{10}$$

$$\Psi(t)=\frac{D}{Em}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{EV\rho}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{\lambda EV\rho}\dot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{EV\rho}t_p\dot{\widehat{\sigma}}(t)\,; \tag{11}$$

$$\Psi(t)=\frac{D}{\lambda Em}t_p\ddot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D}{\lambda EV\rho}t_p\ddot{\widehat{\sigma}}(t)=\frac{D\eta}{\lambda E^2V\rho}\ddot{\widehat{\sigma}}(t)\,. \tag{12}$$

В соотношениях (3)-(12) введены следующие обозначения: D − жесткость тела; $\widehat{D}$ − поглощенная доза излучения; $\dot{\widehat{D}}$ − мощность поглощенной дозы излучения; $\widehat{\sigma}(t)$ − нагрузка, выраженная через напряжения; $\widehat{p}(t)$ − нагрузка, выраженная через механический импульс; $\widehat{W}(t),\widehat{Q}(t)$ − механическая и тепловая энергия; $\Delta\widehat{T}(t)$ − изменение температуры при нагреве тела; $\widehat{P}(t)$ − мощность механического воздействия; $\widehat{S},\Delta\widehat{S}(t)$ − энтропия и изменение энтропии; $\widehat{\alpha},\widehat{\lambda}_T$ − тепловое расширение и теплопроводность; S,V,ρ − площадь, объем и плотность тела; λ,t_p − эмпирическая константа и время релаксации; $\dot{\widehat{\sigma}}(t),\ddot{\widehat{\sigma}}(t)$ − первая и вторая производные от действующей нагрузки; m – константа, характеризующая пространственное напряженное состояние объекта.

Функция нагрузки $\Psi(t)$ может быть определена также с помощью операторного уравнения

$$\Psi(t)=p_0\sigma+p_1\dot{\sigma}+p_2\ddot{\sigma}=K(p)\sigma(t). \tag{13}$$

Используя общую форму записи операторного уравнения, приведем ее к виду, соответствующему уравнению (1), используя соответствующие коэффициенты

$$p_2^*\ddot{\sigma}+2\frac{E}{\eta}p_1^*\dot{\sigma}+4\pi^2f_0^2p_0^*\sigma=\Psi(t)\,, \tag{14}$$

где искомые коэффициенты выражаются через вспомогательные:

$$p_2=p_2^*; \tag{15}$$

$$p_1=2\frac{E}{\eta}p_1^*; \tag{16}$$

$$p_0=4\pi^2f_0^2p_0^*. \tag{17}$$

Тогда:

$$p_2=p_2^*=\frac{D\eta}{\lambda E^2m}\,; \tag{18}$$

$$p_1=2\frac{E}{\eta}p_1^*=\frac{D}{\lambda Em}\,; \tag{19}$$

$$p_1^*=\frac{D\eta}{2\lambda E^2m}\,; \tag{20}$$

$$p_0=4\pi^2f_0^2p_0^*=\frac{D}{Em}\,; \tag{21}$$

$$p_0^* = \frac{D}{Em\omega_0^2}. \tag{22}$$

Подставим полученные коэффициенты

$$\frac{D\eta}{\lambda E^2 m}\ddot{\sigma} + \frac{D}{\lambda Em}\dot{\sigma} + \frac{D}{Em}\sigma = \Psi(t). \tag{23}$$

Полученное уравнение показывает, что приведения ее к наиболее компактному виду удобно использовать в качестве функции нагрузки первое выражение в (3). Тогда выполним подстановку и преобразования (23)

$$\ddot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\dot{\sigma} + \frac{\lambda E}{\eta}\sigma = \frac{\lambda E}{\eta}\hat{\sigma}(t) \tag{24}$$

или

$$\ddot{\sigma} + \lambda\dot{\sigma} + \lambda^2\sigma = \lambda^2\hat{\sigma}(t). \tag{25}$$

Теперь выразим функцию нагружения через параметры системы, соответствующие левой части уравнения (25). Тогда, с учетом уравнений для функции напряжений и ее производных получим

$$\ddot{\sigma} = \beta\lambda^2\sigma_0 e^{-\lambda t}. \tag{26}$$

Выполнив преобразования, получим простое выражение

$$(1 - e^{\lambda t}) = \frac{1}{\beta\sigma_0 e^{-\lambda t}}\hat{\sigma}(t), \tag{27}$$

согласно которому определим

$$\hat{\sigma}(t) = \beta\sigma_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t}). \tag{28}$$

Полученное уравнение характеризует релаксацию нагрузки после ее установления. В случае, когда нагрузка изменяется по некоторому закону, полное выражение функции нагружения примет вид

$$\Psi(t) = \sigma(t) - \beta\sigma_0 e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t}). \tag{29}$$

Такой вид функции нагружения наиболее компактен и удобен для анализа вязкоупругой среды. В большинстве случаев нагрузка $\Psi(t)$ подчиняется гармоническому закону. Обозначим максимальное значение возмущающей силы Ψ_m, тогда, при гармоническом законе изменения и в соответствии с условиями (3), можем записать

$$\ddot{\varepsilon} + 2\lambda\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \Psi_m \frac{D}{Em}\cos\omega t, \tag{30}$$

или в другом виде

$$\ddot{\varepsilon} + 2\frac{E}{\eta}\dot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = \Psi_m \frac{\omega_0^2}{\lambda\eta}\cos\omega t, \tag{31}$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi/\tilde{T}$ − угловая частота возмущающей силы и установившихся колебаний системы; $f, \tilde{T}$ − частота и период нагружения.

Решением уравнений вида (30)-(31) является, согласно [1], уравнение

$$\varepsilon = \Psi_m \cos(\omega t - \breve{\alpha}), \tag{32}$$

где $\breve{\alpha}$ − фазовый сдвиг резонатора (реологического тела) относительно возмущающей силы

$$\breve{\alpha} = arctg\frac{\omega\tilde{\beta}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = arctg\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} = arctg\frac{2\omega\lambda}{\frac{D}{m} - \omega^2}. \tag{33}$$

Таким образом, если нагрузка выражается через напряжения тела, то запаздывание колебаний составляет определенную выше величину угла механических потерь $\Delta\varphi$, причем существенно зависящую от частоты вынуждающей силы ω и коэффициента затухания $\delta = \lambda = \frac{E}{\eta} = \frac{1}{t_p}$. Следовательно, в данном случае $\breve{\alpha} = \Delta\varphi$. Тогда согласно [2]

$$\breve{\alpha} = \Delta\phi = arctg\frac{E''}{E'} = arctg\frac{\sigma_0^*}{\varepsilon_0^*}. \tag{34}$$

Тогда, исходя из (33), (28), получим

$$\Delta\varphi = arctg\frac{2\omega E}{\eta\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = arctg\frac{E}{\lambda t}\left(1 - e^{\lambda t}\right) = arctg\frac{\eta}{t}\left(1 - e^{\lambda t}\right). \tag{35}$$

Согласно теории колебаний [1], амплитуда колебаний реологического тела существенно зависит от частоты возмущающей силы ω и коэффициента вязкого трения $\tilde{\beta}$

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \Psi_m\left[m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \tilde{\beta}^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{36}$$

или

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{m}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\left(\frac{E}{\eta}\omega\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

С использованием эмпирического коэффициента имеем

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{m}\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Анализ уравнений (36), (37) показывает, что при $\omega \to \omega_0$ и при $\beta \to 0$ амплитуда может превысить допустимые для реологического тела значения, определяющие прочность тела. Динамические условия разрушения можно получить из условий прочности. При заданной возмущающей силе $\Psi(t)$ и коэффициенте вязкого трения $\tilde{\beta}$ амплитуда $Y_m(\hat{\sigma})$ является функцией только угловой частоты нагрузки. При $\omega \approx \omega_0$ достигается резонанс. Для определения резонансной частоты необходимо найти максимум функций (36)-(38) и приравнять первую производную нулю. Тогда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\tilde{\beta}^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{39}$$

Используя эмпирические константы и выражения связи с вязкоупругими характеристиками полимерных материалов, получим

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{E^2}{\eta^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{2}{t_p^2}}. \tag{40}$$

Параметром является коэффициент затухания $\delta = \lambda = \frac{E}{\eta} = \frac{1}{t_p}$. При малых δ величина $Y_m(\hat{\sigma})$ резко возрастает. Уравнения (36)-(38) справедливы и для случая статического нагружения тела при условии $\Psi_m(\omega = 0)$. Чтобы найти выражение для резонансной амплитуды подставим (40) в (36)−(38). Тогда получим, соответственно:

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}}\left(\omega_0^2 - \frac{\tilde{\beta}^2}{4m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}\omega} = \frac{\Psi_m}{2m\delta\omega}; \tag{41}$$

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}} \left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Psi_m}{\tilde{\beta}} \left(\frac{D}{m} - \frac{E^2}{\eta^2} \right); \qquad (42)$$

$$Y_m(\hat{\sigma}) = \frac{\Psi_m}{2m\lambda\omega} = \frac{\Psi_m}{2m\delta\omega} = \frac{\Psi_m \eta}{2mE\omega}. \qquad (43)$$

Величина угла механических потерь $\Delta\varphi$ характеризует основные свойства реологического тела, материала или системы, а ее выражения (34)-(35) позволяют получить обобщенную связь между характеристиками тела и параметрами нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кухлинг Х. Справочник по физике / пер. с нем. - М.: Мир, 1982.

2. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. - М.: Машиностроение, 1977.

MODELING OF THE BEHAVIOUR REOLOGICHESKIH TEL UNDER DIFFERENT LAW NAGRUZHENIYA

Bendyukov V.V., Osyaev O.G.

The Offered model of the behaviour reologicheskogo bodies (the viscous-elasticity of the materia), designs or systems) under controlling influence of the load, acting on given law for some time.

Key words: reologic environment, dynamic model of the viscous-elasticity , relaxation, factor of attenuation.

Сведения об авторах

Бендюков Вячеслав Валентинович, 1960 г.р., окончил Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск (1982), доцент кафедры ВС и АД Ростовского филиала МГТУ ГА, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, автор более 110 научных трудов, область научных интересов − конструкция и прочность летательных аппаратов.

Осяев Олег Геннадьевич, 1963 г.р., окончил Ростовское высшее военное командно-инженерное училище ракетных войск (1985), кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник НИО РВИРВ, автор более 100 научных трудов, область научных интересов − численные и экспериментальные методы исследования прочностной надежности несущих конструкций летательных аппаратов.