

УДК 621.37:621.391

## АЛГОРИТМ КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОЛОЖЕНИИ АЭРОЛОГИЧЕСКОГО РАДИОЗОНДА

Э.А. БОЛЕЛОВ<sup>1</sup>, Ю.М. ЕРМОШЕНКО<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ ГА, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ООО «Аэроприбор», г. Москва, Россия

Методы марковской теории оптимального оценивания случайных процессов, применяемые для оптимального комплексирования информации о пространственном положении различных объектов, могут с успехом использоваться в задачах аэрологического радиозондирования атмосферы. В этом случае целью комплексирования является интеграция (функциональная, структурная и информационная) в единую систему радиолокационных и радионавигационных измерителей пространственных координат аэрологического радиозонда. Потребность в одновременном измерении пространственных координат аэрологического радиозонда радиолокационным и радионавигационным измерителем обусловлена тем, что каждый из измерителей не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к точности и надежности определения пространственных координат аэрологического радиозонда. В настоящей статье рассматривается задача синтеза оптимального алгоритма комплексной обработки сигналов спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС/GPS, ретранслированных с борта аэрологического радиозонда, и выходных данных аэрологической радиолокационной станции (типа РАМ-2) с применением методов марковской теории оценивания случайных процессов. Рассматриваемая задача синтеза основывается на решении уравнения Стратоновича. В данной статье решение уравнения Стратоновича приводится для случая, когда динамика вектора состояния во времени описывается квазислучайным процессом.

**Ключевые слова:** уравнение Стратоновича, апостериорная плотность вероятности, аэрологический радиозонд, комплексный оптимальный алгоритм, система радиозондирования атмосферы, аэрологическая радиолокационная станция.

### ВВЕДЕНИЕ

Целью комплексирования измерителей пространственных координат аэрологического радиозонда (АРЗ) является их интеграция (функциональная, информационная, структурная) в единую систему, в которой осуществляется совместная обработка информации, поступающей от спутниковой навигационной системы (СНС) ГЛОНАСС/GPS и аэрологической радиолокационной станции (АРЛС). Потребность в такой интеграции обусловлена тем, что каждый измеритель в отдельности не удовлетворяет всем требованиям, которые предъявляются к измерению пространственных координат АРЗ.

Недостатком АРЛС является достаточно низкая точность определения координат АРЗ, возможные срывы автосопровождения АРЗ по угловым координатам из-за узкой диаграммы направленности антенны АРЛС, особенно при сильном боковом ветре в момент запуска, принципиальное снижение точности определения высоты подъема АРЗ из-за ограниченной точности измерения угловых координат при значительных удалениях до АРЗ [3]. Для спутниковых навигационных измерителей координат АРЗ характерны ошибки, связанные с распространением навигационного сигнала (ионосферная ошибка, тропосферная ошибка, ошибка, обусловленная многолучевостью), ошибки, обусловленные взаимным расположением навигационных космических аппаратов (НКА) и АРЗ (геометрический фактор), ошибки приемника спутниковых навигационных сигналов (шумы приемника, помехи, пропадание сигналов СНС, нарушение целостности системы, ситуации, связанные с нештатным функционированием навигационных космических аппаратов) [3, 5].

Наибольший выигрыш от комплексирования измерителей пространственных координат АРЗ, естественно, удастся получить, решив соответствующую задачу синтеза, что дает возможность определить оптимальные структуру и характеристики системы комплекс-

ной обработки информации (СКОИ) [1, 4]. Возможности методов марковской теории оценивания случайных процессов (МТОСП) при разработке алгоритмов СКОИ во многом обусловлены тем, что марковские методы позволяют реализовать оптимальное комплексирование измерителей на уровне первичной обработки информации, что позволяет повысить качество функционирования измерителей в аномальных (нелинейных) режимах их работы (режимы срыва слежения, ложные захваты параметров и т. д.), тем самым улучшая характеристики системы КОИ о пространственном положении АРЗ.

Целью настоящей статьи является синтез на основе методов МТОСП оптимального и квазиоптимального алгоритма комплексной обработки ретранслированных с борта АРЗ сигналов СНС/ГЛОНАСС/GPS и данных АРЛС.

### ЗАДАЧА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАБОТКИ РЕТРАНСЛИРОВАННЫХ АРЗ СИГНАЛОВ СНС И ДАННЫХ АРЛС

На интервале времени  $t \in [t_k, t_k + T]$  на входе приемного устройства СНС наземного пункта комплексной обработки информации (НПКОИ) имеется наблюдение в виде аддитивной смеси полезного ретранслированного АРЗ сигнала  $i$ -го НКА СНС и шума [2]:

$$\xi_i(t) = S_{ip}(t, \mathbf{X}, \theta_{ki}) + n_i(t), \quad (1)$$

где  $S_{ip}(t, \mathbf{Y}_i, \theta_{ki})$  – полезный некогерентный сигнал на входе приемного устройства СНС НПКОИ;  $n_i(t)$  – стационарный белый гауссовский шум с известными статистическими характеристиками  $M\{n_i(t)\} = 0, M\{n_i(t)n_i(t-\tau)\} = \frac{N}{2}\delta(\tau)$ ;  $N = KT_{noise}$  – спектральная плотность шумов;  $K = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ В} \cdot \text{с}/\text{К}$  – постоянная Больцмана;  $T_{noise}$  – эквивалентная шумовая температура внешних шумов приемного устройства СНС НПКОИ;  $\delta(\tau)$  – дельта функция Дирака;  $\theta_{ki}$  – дискретный параметр, принимающий в течение времени  $T = 20$  мс значение 0 или 1 в зависимости от передаваемой каждым НКА служебной информации;  $\mathbf{X}(t) = [x(t), y(t), z(t), V_x(t), V_y(t), V_z(t), a_x(t), a_y(t), a_z(t), \phi_p(t), \Delta\omega_p(t), \delta d(t)]^T$  – вектор состояния, включающий в себя координаты АРЗ, проекции его скорости и ускорения на оси гринвичской прямоугольной системы координат (ГПСК), а также ряд сопутствующих параметров, динамика изменения во времени которых описывается уравнениями [2]

$$\dot{x}(t) = V_x(t), x(0) = x_0, \dot{y}(t) = V_y(t), y(0) = y_0, \dot{z}(t) = V_z(t), z(0) = z_0, \quad (2)$$

$$\dot{V}_x(t) = a_x(t), V_x(0) = V_{x0}, \dot{V}_y(t) = a_y(t), V_y(0) = V_{y0}, \dot{V}_z(t) = a_z(t), V_z(0) = V_{z0}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_x(t) &= -(\rho_1 + \rho_2)a_x(t) + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)\sigma_{ax}^2}n_{ax}(t), a_x(0) = a_{x0}, \\ \dot{a}_y(t) &= -(\rho_1 + \rho_2)a_y(t) + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)\sigma_{ay}^2}n_{ay}(t), a_y(0) = a_{y0}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{a}_z(t) = -(\rho_1 + \rho_2)a_z(t) + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)\sigma_{az}^2}n_{az}(t), a_z(0) = a_{z0},$$

$$\dot{\phi}_{pi}(t) = \Delta\omega_p(t) - \frac{\omega_p}{c} \dot{d}_{iz}(t) + \sqrt{\frac{N_\phi}{2}}n_\phi(t), \phi_{pi}(0) = \phi_{pi0}, \quad (5)$$

$$\Delta\dot{\omega}_{pi}(t) = -\mathcal{G}_\omega \Delta\omega_{pi}(t) + \sqrt{2\mathcal{G}_\omega \sigma_\omega^2}n_{\Delta\omega}(t), \Delta\omega_{pi}(0) = \Delta\omega_{pi0}, \quad (6)$$

$$\delta \dot{d}(t) = 0, \quad \delta d(0) = \delta d_0, \quad (7)$$

где  $\rho_1$  – коэффициент, определяемый аэродинамическими характеристиками АРЗ;  $\rho_2$  – параметр, характеризующий ширину спектра флуктуаций скорости ветра;  $n_{ax}(t), n_{ay}(t), n_{az}(t)$  – формирующие БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $\sigma_{ax}^2, \sigma_{ay}^2, \sigma_{az}^2$  – дисперсии флуктуаций ускорения, зависящие от характера движения АРЗ в атмосфере;  $\frac{\omega_p}{c} \dot{d}_{i\Sigma}(t)$  – доплеровское смещение частоты;  $N_\phi$  – величина, характеризующая естественную нестабильность задающего генератора АРЗ;  $n_\phi(t), n_{\Delta\omega}(t)$  – формирующие БГШ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $\mathcal{G}_\omega$  – коэффициент, характеризующий ширину спектра флуктуаций частоты задающего генератора;  $\sigma_\omega^2$  – дисперсия флуктуаций частоты задающего генератора;  $\phi_p, \Delta\omega_p$  – случайная фаза принятого ретранслированного сигнала и уход частоты задающего генератора ретранслятора АРЗ;  $\delta d$  – ошибка определения дальности;  $d_\Sigma$  – псевдодальность для одного НКА, которую можно представить в виде

$$d_\Sigma = d_1 + d_2 + \Delta d_{is} + \Delta d_{ts} + \Delta d_{eph} + (\Delta d_\phi + \Delta d_{\phi p}) + \Delta d_{il} + \Delta d'_{il} + \Delta d_{uap},$$

где  $d_1$  – расстояние от НКА до АРЗ в момент излучения и приема сигнала;  $\Delta d_{is}$  – прирост дальности за счет ионосферной задержки сигнала;  $\Delta d_{ts}$  – прирост дальности за счет тропосферной задержки сигнала;  $\Delta d_{eph}$  – прирост дальности за счет неточного прогноза эфемерид;  $\Delta d_\phi$  – небольшие случайные изменения псевдодальности, вызванные, например, осцилляциями и уходом частоты цезиевого и рубидиевого стандарта передатчика НКА;  $\Delta d_{il}$  – прирост дальности, вызванный сдвигом шкал времени на АРЗ и НКА;  $d_2$  – расстояние от АРЗ до НПОИ в момент излучения и приема сигнала;  $\Delta d_{\phi p}$  – случайные изменения псевдодальности, вызванные, например, осцилляциями и уходом частоты задающего генератора передатчика ШАР АРЗ;  $\Delta d'_{il}$  – прирост дальности, вызванный сдвигом шкал времени на АРЗ и НПКОИ;  $\Delta d_{uap}$  – прирост дальности, обусловленный временем задержки сигнала в ретрансляторе.

В дискретные моменты времени  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , поступают дополнительные наблюдения от АРЛС:

$$\Xi(k) = \mathbf{H}\mathbf{X}(k) + \mathbf{E}(k), \quad (8)$$

где  $\mathbf{H}$  – известная матрица наблюдения;  $\mathbf{E}(k)$  – вектор флуктуационных погрешностей измерений АРЛС, описываемый стохастическим разностным уравнением вида

$$\mathbf{E}(k) = \Phi_{EE} \mathbf{E}(k-1) + \Gamma_E \mathbf{N}_E(k-1), \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \quad (9)$$

в котором  $\mathbf{N}_E(k)$  – вектор формирующий стандартных гауссовский случайных величин нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями;  $\Phi_{EE}, \Gamma_E$  – известные матрицы.

В дискретные моменты времени непрерывный процесс  $\mathbf{X}(t)$  описывается стохастическим разностным уравнением

$$\mathbf{X}(k) = \Phi_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{C}\mathbf{U}(k-1) + \Gamma_{\mathbf{X}} \mathbf{N}_{\mathbf{X}}(k-1), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{U}(k)$  – вектор управления;  $\mathbf{N}_{\mathbf{X}}(k)$  – вектор формирующий стандартных гауссовский случайных величин;  $\Phi_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{X}}$  – известные матрицы.

Задача синтеза оптимального комплексного алгоритма обработки информации о пространственном положении АРЗ может быть сформулирована следующим образом: имея наблюдение (1), (8) и располагая априорными сведениями о векторе состояния (10) необходимо получить оптимальную оценку вектора состояния  $\mathbf{X}^*(t)$ , которая должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь [4]:

$$\mathbf{X}^*(t) = \tilde{\mathbf{X}}(t) : \min_{\tilde{\mathbf{X}}} \left\{ \int c(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) p_{ps}(t, \mathbf{X}) d\mathbf{X} \right\}, \quad (11)$$

где  $c(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) = (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})^T \mathbf{B} (\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}})$  – квадратичная функция потерь;  $\mathbf{B}$  – заданная неотрицательно определенная матрица;  $p_{ps}(t, \mathbf{X}) = p(t, \mathbf{X} | \Xi_{t_0}^t)$  – апостериорная плотность вероятности  $\mathbf{X}(t)$ ;  $\Xi_{t_0}^t = \{\Xi(\tau) : \tau \in [t_0, t]\}$  – реализация вектора наблюдения  $\Xi(t)$  на полуинтервале  $t \in [t_0, t]$ ;  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  – оценка вектора состояния.

Как показано в [1, 2], анализ математических моделей непрерывного процесса  $\mathbf{X}(t)$ , применительно к задаче определения пространственных координат АРЗ в полете, позволяет сделать вывод, что на характерных для СНС интервалах времени  $[t_k, t_k + T]$  ( $T = 20$  мс) характерной является ситуация, при которой детерминированное изменение (снос) какой-либо части компонент вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$  в течение времени  $T$  может быть велико, и им пренебречь нельзя. А приращение центральных моментов второго порядка (диффузия) этих компонент за это же время мало, и им можно пренебречь при требуемой точности оценивания.

На рис. 1 и рис. 2 в качестве примера представлены результаты расчетов приращений априорных математических ожиданий и дисперсий высоты подъема и скорости подъема АРЗ в атмосфере.

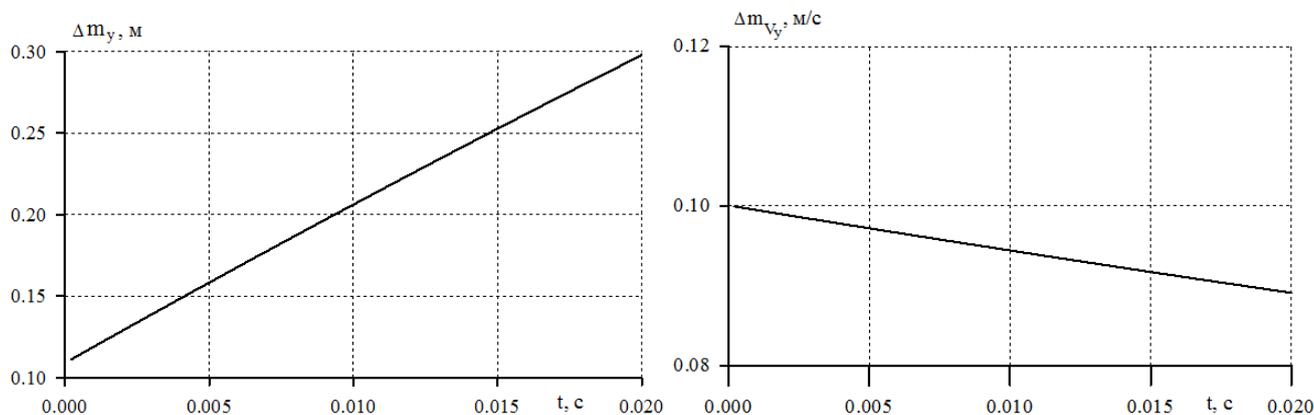


Рис. 1. Приращения априорных математических ожиданий высоты и скорости подъема АРЗ

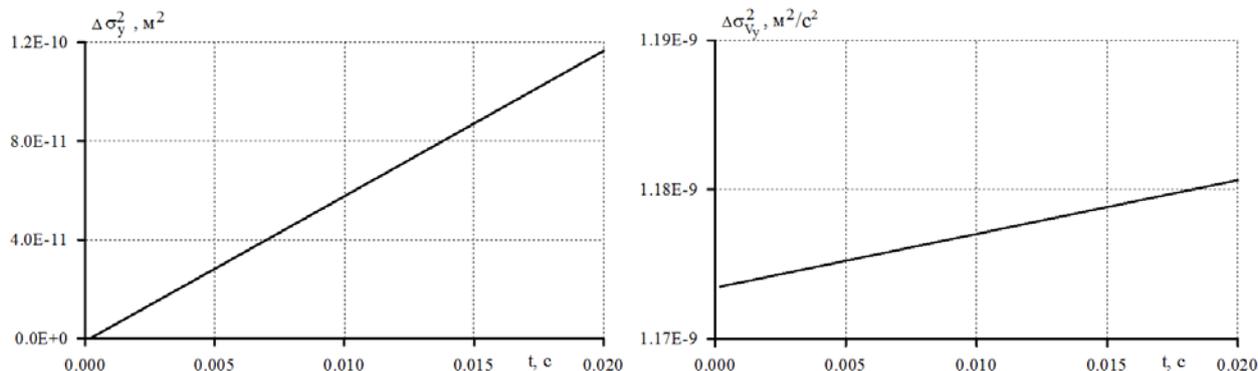


Рис. 2. Приращения априорных дисперсий высоты и скорости подъема АРЗ

С учетом этого динамику компонент вектора состояния (2)–(7) можно описать квазислучайным процессом [2]:

$$x(t) = x_k + V_{xk}t, y(t) = y_k + V_{yk}t, z(t) = z_k + V_{zk}t, \quad (12)$$

$$V_x(t) = V_{xk}, V_y(t) = V_{yk}, V_z(t) = V_{zk}, a_x(t) = a_y(t) = a_z(t) = 0, \quad (13)$$

$$V_x(t) = V_{xk}, V_y(t) = V_{yk}, V_z(t) = V_{zk}, a_x(t) = a_y(t) = a_z(t) = 0, \quad (14)$$

$$\phi_{pi}(t) = \phi_{pik} + \Delta\omega_{pik}t + \frac{\omega_p}{c} \dot{d}_{i\Sigma}(t)t, \Delta\omega_{pi}(t) = \Delta\omega_{pik}, \delta d(t) = 0. \quad (15)$$

С учетом этого изменение вектора состояния в наблюдении (1) может быть записано соотношением:

$$\xi_i(t) = S_{ip}(t, \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k), \theta_{ki}) + n_i(t), \quad (16)$$

где  $\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)$  – детерминированная функция, определяемая выражениями (12)–(15).

Представление вектора состояния в виде квазислучайного процесса делает возможным использование метода поэтапного решения уравнения Стратоновича [4]. При этом задача оптимального нелинейного оценивания на интервалах времени  $[t_k, t_k + T]$  при наблюдении ретранслированных АРЗ сигналов НКА СНС сводится к задаче оптимальной нелинейной оценке параметров. Данная процедура представляет собой первый этап решения уравнения Стратоновича. На втором этапе производится обработка дополнительного наблюдения выходных данных АРЛС в дискретные моменты времени  $t_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , с учетом полученных на первом этапе оценок вектора состояния. Необходимо заметить, что сформулированная задача охватывает также синтез алгоритмов для получения оценок дискретного информационного параметра  $\theta_{ki}$ , хотя алгоритмы для формирования оптимальных оценок  $\theta_{ki}^*$  известны и могут быть получены по правилам, приведенным, например, в [4, 5].

## ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОЛОЖЕНИИ АЭРОЛОГИЧЕСКОГО РАДИОЗОНДА

При рассмотрении оптимального алгоритма, для простоты записи, индекс  $i$  (номер НКА) не записываем. Оптимальная по заданному критерию вектора состояния  $\mathbf{X}(t)$  может быть найдена на основании совместной смешанной апостериорной плотности вероятности (АПВ):

$$\varpi(k, \mathbf{X}_k, \theta_k) = p(k, \mathbf{X}_k, \theta_k | \xi_{t_0}^{t_k}, \Xi_{t_0}^{t_k}). \quad (17)$$

Отметим, что АПВ удовлетворяет условиям [4]

$$\varpi(k, \mathbf{X}_k) = \sum_{m=0}^1 \varpi(k, \mathbf{X}_k, \theta_k = m), \quad (18)$$

$$P_m(k) = P(k, \theta_k = m) = \int \varpi(k, \mathbf{X}_k, \theta_k = m) d\mathbf{X}_k. \quad (19)$$

Совместная смешанная АПВ  $\varpi(k+1, \mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1})$  на основании наблюдений (1), (8) в момент времени  $t_{k+1}$  может быть найдена следующим образом [4].

1. По наблюдению (1), (8) на полуинтервале  $[t_k, t_k + T)$  определяется АПВ отсчетов дискретно-непрерывного процесса на текущем тактовом интервале:

$$\varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k) = p(t, \mathbf{X}_k, \theta_k | \xi_{t_0}^{t_k}, \Xi_{t_0}^{t_k}). \quad (20)$$

2. С учетом априорных изменений дискретно-непрерывного процесса (10) вычисляется совместная АПВ:

$$\varpi(\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1)) = p(k+1, \mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1) | \xi_{t_0}^{t_{k+1}}, \Xi_{t_0}^{t_{k+1}}). \quad (21)$$

Повторяя эту последовательность вычислений для каждого тактового интервала получим эволюцию апостериорного распределения дискретно-непрерывного процесса  $(\mathbf{X}_k, \theta_k)$  во времени.

Рассмотрим указанную методику подробнее.

1. При  $t \in [t_k, t_k + T)$  совместная АПВ  $\varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k)$  удовлетворяет симметризованному уравнению Стратоновича [4]:

$$\frac{\partial \varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k)}{\partial t} = \varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k) \left\{ F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k) - F_{\mathbf{X}\theta}(t) \right\}, \quad (22)$$

где

$$F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k) = \frac{1}{N} \left\{ 2\xi(t) S_p(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k) - S_p^2(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k) \right\};$$

$$F_{\mathbf{X}\theta}(t) = \sum_{m=0}^1 \int_{t_k}^{t_k+T} F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = m) \varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k = m) d\mathbf{X}_k.$$

Решение уравнения (22) имеет вид [4]

$$\varpi(t_k + T, \mathbf{X}_k, \theta_k) = C \varpi(t_k, \mathbf{X}_k, \theta_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k) d\tau \right\}, \quad (23)$$

где  $C$  – нормировочная постоянная.

2. Так как в дискретные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , совместный процесс  $\mathbf{Z}^T = [\mathbf{X}_k^T, \theta_k, \Xi_k^T]$  марковский, то совместную АПВ  $\varpi(\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1))$  можно найти из рекуррентного уравнения Стратоновича [4]:

$$\varpi(\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1)) = C_1 \int \pi[\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1) | \mathbf{X}_k, \theta_k, \Xi(k)] \varpi(t_k + T, \mathbf{X}_k, \theta_k) d\mathbf{X}_k, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \pi[\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1) | \mathbf{X}_k, \theta_k, \Xi(k)] &= \pi_X[\mathbf{X}_{k+1}, \Xi(k+1) | \mathbf{X}_k, \Xi(k)] \pi_\theta[\theta_{k+1} | \theta_k]; \\ \pi_X[\mathbf{X}_{k+1}, \Xi(k+1) | \mathbf{X}_k, \Xi(k)] & \end{aligned}$$

плотность вероятности перехода, определяемая (8), (10);  $C_1$  – нормировочная постоянная.

Записывая левую часть (24) в виде условной плотности, получаем

$$\varpi(k+1, \mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}) = C_2 \varpi(\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1)), \quad (25)$$

где  $C_2$  – нормировочная постоянная.

Соотношения (24) и (25) позволяют получить последовательно, при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , АПВ дискретно-непрерывного процесса  $[\mathbf{X}_k^T, \theta_k]$  и, следовательно, получить его оценку, оптимальную по заданному критерию.

При вычислении АПВ ее можно представить в двух формах записи. В частности, при  $t \in [t_k, t_k + T)$

$$\varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k) = [\varpi(t, \mathbf{X}_k | \theta_k = m) P(t, \theta_k = m)], \quad (26)$$

$$\varpi(t, \mathbf{X}_k, \theta_k) = [\varpi(t, \mathbf{X}_k) P(t, \theta_k = m | \mathbf{X}_k)], \quad (27)$$

где  $P(t, \theta_k = m)$ ,  $P(t, \theta_k = m | \mathbf{X}_k)$  – безусловная и условная апостериорные вероятности значения дискретного параметра  $\theta_k = m$ ;  $\varpi(t, \mathbf{X}_k | \theta_k = m)$ ,  $\varpi(t, \mathbf{X}_k)$  – условная и безусловная апостериорные плотности вероятности непрерывного процесса  $\mathbf{X}_k$ .

Подставляя (26) в (22), получим по аналогии с (23)

$$P_m(t_k + T) = \frac{P_m(t_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} M_X [F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\})] d\tau \right\}}{\sum_{l=0}^1 P_l(t_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} M_X [F_l(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\})] d\tau \right\}}, \quad (28)$$

$$M_X [F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\})] = \int F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = m) \varpi(\tau, \mathbf{X}_k | \theta_k = m) d\mathbf{X}_k,$$

$$\varpi(t_k + T, \mathbf{X}_k | \theta_k = m) = \frac{\varpi(t_k, \mathbf{X}_k, \theta_k = m) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) d\tau \right\}}{\int \varpi(t_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = m) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) d\tau \right\} d\mathbf{X}_k}. \quad (29)$$

При подстановке (27) в (22) получим

$$\varpi(t_k + T, \mathbf{X}_k) = \frac{\varpi(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} M_\theta \left[ F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) \right] d\tau \right\}}{\int \varpi(t_k, \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} M_\theta \left[ F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) \right] d\tau \right\} d\mathbf{X}_k}, \quad (30)$$

$$M_\theta \left[ F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) \right] = \sum_{m=0}^1 F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) P_m(\tau | \mathbf{X}_k),$$

$$P_m(t_k + T | \mathbf{X}_k) = \frac{P_m(t_k | \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} F_m(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) d\tau \right\}}{\sum_{l=0}^1 P_l(t_k | \mathbf{X}_k) \exp \left\{ \int_{t_k}^{t_k+T} F_l(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}) d\tau \right\}}. \quad (31)$$

Представление, аналогичное (28)–(31), можно также записать для  $\varpi(\mathbf{X}_{k+1}, \theta_{k+1}, \Xi(k+1))$ . Однако, учитывая априорную независимость смены состояний дискретного параметра от (8), каких-либо особенностей при этом, кроме отмеченных в [4], не возникает, поэтому соответствующие выражения не приводятся.

По найденным на основании (28), (29) или (30), (31) значениям АПВ и апостериорной вероятности с помощью процедуры определения глобальных максимумов этих функций по соответствующим переменным можно получить оптимальные оценки дискретного параметра и вектора состояния.

Оптимальная оценка вектора состояния по критерию минимума апостериорного среднего риска определяется выражением

$$\mathbf{X}_{k+1}^* = \int \mathbf{X}_{k+1} p(k+1, \mathbf{X}_{k+1} | \xi_{t_0}^{t_{k+1}}, \Xi_{t_0}^{t_{k+1}}). \quad (32)$$

### КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ КОМПЛЕКСНОЙ ОБРАБОТКИ РЕТРАНСЛИРОВАННЫХ АРЗ СИГНАЛОВ СНС И ДАННЫХ АРЛС

При использовании гауссовского приближения апостериорное распределение (17) принимает вид

$$\varpi(k, \mathbf{X}_k) = \left\{ (2\pi)^n \det \mathbf{R}(t_k) \right\}^{-0.5} \exp \left\{ \left[ \mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^*(t_k) \right]^T \mathbf{R}^{-1}(t_k) \left[ \mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^*(t_k) \right] \right\}, \quad (33)$$

где  $n$  – размерность вектора состояния,  $\mathbf{R}^{-1}(t_k)$  – ковариационная матрица ошибок оценивания,  $\mathbf{X}^*(t_k)$  – оценка вектора состояния, представляющая собой апостериорное математическое ожидание.

На каждом тактовом интервале длительностью  $T$  дискретный параметр принимает значение 0 или 1, а применение дополнительного кодирования служебной информации приводит к тому, что значение дискретного параметра в начале каждого тактового интервала становится равновероятным. В этом случае дискретный параметр можно аппроксимировать стационарной марковской цепью с двумя равновероятными состояниями. Эта аппроксимация соответствует наилучшему с точки зрения выделения дискретного параметра случаю. В связи с этим можно

записать, что  $F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = 0) = -F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = 1)$ . С учетом этого функция  $M_\theta [F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\})]$  имеет вид

$$M_\theta [F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\})] = F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = 0) \times \int_{t_k}^t F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = 0) d\tau = \Psi(t, \mathbf{X}_k). \quad (34)$$

Тогда выражение (21) будет иметь вид

$$\varpi(t_k + T, \mathbf{X}_k) = C \varpi(t_k, \mathbf{X}_k) \exp\{\Phi(\mathbf{X}_k)\}, \quad (35)$$

где  $C$  – нормировочная постоянная, определяемая знаменателем (7),  $\Phi(\mathbf{X}_k) = \int_{t_k}^{t_k+T} \Psi(t, \mathbf{X}_k) dt$ .

Разложив, аналогично [4], экспоненциальную функцию, входящую в (35), в ряд Тейлора и ограничиваясь квадратичными членами

$$\Phi(\mathbf{X}_k) = \exp\left\{\Phi + \Phi'[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*] + \frac{1}{2}[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*]^T \Phi''[\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*]\right\}, \quad (36)$$

где  $\Phi' = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{X}_k^*}$ ,  $\Phi'' = \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{X}_k^{*2}}$ , получим квазиоптимальные алгоритмы оценивания на первом этапе:

$$\mathbf{X}^*(t_k | t_k + T) = \mathbf{X}_k^* + \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T d\tau, \quad (37)$$

$$\mathbf{R}(t_k | t_k + T) = \left\{ \mathbf{R}^{-1}(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right] \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right] d\tau \right\}^{-1}. \quad (38)$$

При выполнении дифференцирования в (14) и (15) функции  $\Psi(t, \mathbf{X}_k)$  учитывалось, что

$$\frac{\partial \Psi(t, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*} \approx \frac{\partial F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k^*)\}, \theta_k = 0)}{\partial \mathbf{X}_k^*} th \left\{ \int_{t_k}^t F(\tau, L\{\mathbf{f}(\tau, \mathbf{X}_k^*)\}, \theta_k = 0) d\tau \right\}. \quad (39)$$

Оценка дискретного параметра  $\theta_k$  на  $k$ -м тактовом интервале при обработке наблюдения (1) осуществляется в соответствии с соотношением, которое представляет собой решающее правило:

$$\int_{t_k}^{t_k+T} F(t, L\{\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_k)\}, \theta_k = 0) dt \underset{\theta_k=0}{\overset{\theta_k=1}{>}} 0. \quad (40)$$

С учетом того, что в полезные сигналы наблюдений входят не непосредственно компоненты вектора состояния, а их функция  $L\{\mathbf{X}_k\}$ , первые и вторые производные логарифма функционала правдоподобия могут быть представлены в более удобной для расчетов форме:

$$\int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T d\tau = \int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T d\tau,$$

$$\int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right] \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right] d\tau = \int_{t_k}^{t_k+T} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} + \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \right]^T \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right\} d\tau.$$

В приведенных выше выражениях  $\mathbf{Y}_k^*$  – вектор оценок радионавигационных параметров, от которых непосредственно зависит полезный сигнал. На интервале времени  $t \in [t_k, t_k + T]$  элементы матрицы  $\frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*}$  будем считать постоянными. Тогда квазиоптимальный алгоритм для первого этапа можно записать в виде

$$\mathbf{X}^*(t_k | t_k + T) = \mathbf{X}_k^* + \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T \int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \right] d\tau. \quad (41)$$

$$\mathbf{R}(t_k | t_k + T) = \left\{ \mathbf{R}_k^{-1} + \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right]^T \left[ \int_{t_k}^{t_k+T} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \right]^T \left[ \frac{\partial \Psi(\tau, \mathbf{X}_k^*)}{\partial \mathbf{Y}_k^*} \right] d\tau \right] \left[ \frac{\partial \mathbf{Y}_k^*}{\partial \mathbf{X}_k^*} \right] \right\}^{-1}. \quad (42)$$

На втором этапе обработки при поступлении дискретных данных от АРЛС квазиоптимальная оценка вектора состояния может быть получена на основе рекуррентных выражений:

$$\mathbf{X}_{k+1}^* = \Phi_{xx} \mathbf{X}^*(t_k | t_k + T) + \mathbf{C} \mathbf{U}_k + \mathbf{K}_{k+1} [\boldsymbol{\Xi}_{k+1} - \Phi_{\Xi\Xi} \boldsymbol{\Xi}_k + \Phi_{\Xi x} \mathbf{X}^*(t_k | t_k + T)], \quad (43)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = [\Phi_{xx} \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \Phi_{\Xi x}^T + \mathbf{B}_{x\Xi}] \cdot [\Phi_{\Xi x} \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \Phi_{\Xi x}^T + \mathbf{B}_{\Xi\Xi}]^{-1}, \quad (44)$$

$$\mathbf{R}_{k+1} = [\Phi_{xx} \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \Phi_{xx}^T + \mathbf{B}_{xx}] - \mathbf{K}_{k+1} [\Phi_{xx} \mathbf{R}(t_k | t_k + T) \Phi_{\Xi x}^T + \mathbf{B}_{x\Xi}]^T. \quad (45)$$

Выражение (44) представляет собой выражения для расчета оптимальных коэффициентов, а (45) – выражение для расчета матрицы апостериорных центральных моментов второго порядка.

Матрицы  $\Phi_{xx}, \Phi_{\Xi\Xi}, \mathbf{C}$  определяются математическими моделями динамики вектора состояния и моделями наблюдений, остальные матрицы в выражениях (43)–(45) рассчитываются по формулам

$$\Phi_{\Xi x} = \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{xx} - \Phi_{\Xi\Xi} \mathbf{H}_k + \Phi_{\Xi x}, \quad \mathbf{B}_{\Xi\Xi} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{B}_{xx} \mathbf{H}_{k+1}^T + \Gamma_x \Gamma_x^T,$$

$$\mathbf{B}_{x\Xi} = \mathbf{B}_{xx} \mathbf{H}_{k+1}^T, \quad \mathbf{B}_{xx} = \Gamma_x \Gamma_x^T.$$

На втором этапе комплексной обработки в качестве начальных значений используются  $\mathbf{X}^*(t_k | t_k + T)$  и  $\mathbf{R}(t_k | t_k + T)$ , полученные на первом этапе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе методов МТОСП получены оптимальные и квазиоптимальные алгоритмы комплексной обработки ретранслированных АРЗ сигналов СНС ГЛОНАСС/GPS и данных АРЛС. Алгоритмы получены для случая, когда динамика вектора состояния во времени описывается квазислучайным процессом. Такое упрощение позволяет снизить вычислительные затраты на реализацию алгоритма в системах НПКОИ и является наиболее приспособленным для программной реализации решением в НПКОИ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болелов Э.А., Ермошенко Ю.М., Фридзон М.Б. Повышение надежности системы радиозондирования атмосферы за счет комплексирования методов сопровождения радиозонда в полете // Научный Вестник МГТУ ГА. 2015. № 222.
2. Болелов Э.А., Ермошенко Ю.М. Постановка задачи синтеза оптимального алгоритма комплексной обработки информации о пространственном положении аэрологического радиозонда // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 226.
3. Иванов В.Э., Фридзон М.Б., Ессяк С.П. Радиозондирование атмосферы. Технические и метрологические аспекты разработки и применения радиозондовых измерительных средств / под ред. В.Э. Иванова. Екатеринбург, 2004.
4. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
5. Яценков В.С. Основы спутниковой навигации. М.: Горячая линия – Телеком, 2005.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Болелов Эдуард Анатольевич**, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта МГТУ ГА, электронный адрес: e.bolelov@mstuca.aero.

**Ермошенко Юлия Марковна**, заместитель генерального директора по технике и юридическому сопровождению производства ООО «Аэроприбор», электронный адрес: meteoru@yandex.ru.

## OPTIMAL ALGORITHM OF COMPLEX PROCESSING OF INFORMATION ABOUT THE SPATIAL POSITION OF AEROLOGICAL RADIOSONDE

**Eduard A. Bolelov**

Moscow State Technical University of Civil Aviation,  
Moscow, Russia, e.bolelov@mstuca.aero

**Yuliya M. Ermoshenko**

LTD Aeropribor, Moscow, Russia, meteoru@yandex.ru

## ABSTRACT

Methods of Markov theory of optimal stochastic processes estimation used for optimal aggregation of information about position of different objects can be successfully used in aerological radiosonde ascents problems. In this case, the aim is the integration of multi (functional, structural and information) into a single system of radar and navigation gauges spatial coordinates of aerological radiosonde. The need for the simultaneous measurement of the spatial coordinates of aerological radiosonde radar and radio navigation meter due to the fact that each of the meters does not meet all the requirements for accuracy and reliability of determining the spatial coordinates of aerological radiosonde. The problem of optimal algorithm synthesis of complex signal processing of satellite navigation systems GLONASS/GPS, relayed from the board

and aerological radiosonde output aerological radar using the methods of Markov random processes, estimation theory is considered in this article. The synthesis is based on the solution of Stratonovich equation. In this article, a solution of Stratonovich was obtained for the case where the dynamics of the state vector in time is described by the quasi-random process.

**Key words:** Stratonovich equation, the a posteriori probability density, the upper-air radiosonde, an integrated optimal algorithm, the system of radio sounding of atmosphere, aerological radar.

## REFERENCES

- 1. Bolelov E.A., Ermoshenko Yu.M., Fridzon M.B.** Improving the reliability of the system of radio sounding of atmosphere by aggregation methods for tracking of the radiosonde in flight. Scientific Bulletin of MSTUCA, 2015, No. 222. (in Russian)
- 2. Bolelov E.A., Ermoshenko Yu.M.** The problem of synthesis of optimal algorithm processing complex information about the spatial position of the upper-air radiosonde. Scientific Bulletin of MSTUCA, 2016, No. 226. (in Russian)
- 3. Ivanov V.E., Fridzon M.B., Essack S.P.** Sounding of the atmosphere. Technical and metrological aspects of the development and application of radiosonde measuring means. Ed. by V.E. Ivanov. Ekaterinburg, 2004. (in Russian)
- 4. Yarlykov M.S., Mironov M.A.** Markov theory of estimating random processes. M.: Radio and communication, 1993. (in Russian)
- 5. Yazenkov V.S.** Fundamentals of satellite navigation. M.: Hot line-Telecom, 2005. (in Russian)