УДК 519.46

О ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ОБЪЕМ ШАРА И НЕПОДВИЖНЫХ НА СФЕРЕ

А.М. ЛУКАЦКИЙ

Предлагается конструкция построения диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема шара и неподвижных на сфере. Исследуется поведение решений уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости в шаре с начальными условиями – нулевыми на сфере.

Ключевые слова: диффеоморфизм, шар, сфера, бездивергентное векторное поле, несжимаемая жидкость, уравнения Эйлера, уравнения Навье – Стокса.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дан n-мерный шар B^n с границей $n-1$-мерной сферой S^{n-1}.

В ряде исследований [1] возникают диффеоморфизмы, сохраняющие элемент объема шара B^n и тождественные на границе шара (сфере S^{n-1}).

Ниже предлагается конструкция, позволяющая строить достаточно широкий класс таких диффеоморфизмов. Результаты применяются к исследованию течений несжимаемой жидкости, где область течения является многообразия с краем (для случая шара). Здесь исследуется поведение решения уравнений Эйлера и Навье – Стокса в случае, когда начальное поле скоростей жидкости было нулевым на крае многообразия (в рассмотренном случае – сфере).

1. КОНСТРУКЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ СОХРАНЯЮЩИХ ОБЪЕМ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ, НЕПОДВИЖНЫХ НА ШАРЕ

Пусть сфера S^{n-1} задана в R^n уравнением

$$r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Рассмотрим алгебру $SV(S^{n-1})$ бездивергентных векторных полей на сфере S^{n-1}. На сфере S^{n-1} естественно действует ортогональная группа $SO(n)$, а $SV(S^{n-1})$ является $SO(n)$-модулем.

Предложение 1. Бездивергентное векторное поле v на сфере S^{n-1} продолжается до бездивергентного $\overleftrightarrow{v}$ поля на шаре B^n, удовлетворяющего условию

$$\sum_{i=1}^{n} \overleftrightarrow{v}_i\, x_i = 0. \tag{1}$$

Доказательство. В [2, с. 163] доказано, что $SV(S^{n-1})$ как топологический $SO(n)$-модуль порождается элементами $x_s^n(\ldots,-x_j,\ldots,x_i,\ldots)$, где $n \geq 1, i, j, s$ – различны. Свойство (1) является $SO(n)$ инвариантным и выполняется для образующих.

С точки зрения гидродинамических приложений предпочтительнее разложить векторное поле v на сфере S^{n-1} на составляющие в неприводимых $SO(n)$-модулях. Из [3] это

$SO(n)$-модули со старшими весами $\mathrm{M}_n + k\Lambda_n$ $(\mathrm{M}_4' + k\Lambda_4, \mathrm{M}_4'' + k\Lambda_4)$, где M_n $(\mathrm{M}_4', \mathrm{M}_4'')$ – старшие веса присоединенного представления $SO(n)$ $(SO(4))$, Λ_n – старший вес представления $SO(n)$ в R^n. Тогда координаты векторного поля $\overleftrightarrow{v}$ можно выбрать гармоническими многочленами ($\Delta\overleftrightarrow{v} = 0$ в B^n, где Δ – оператор Лапласа на векторных полях).

Построим теперь алгебру Ли на шаре, образованную векторными полями на шаре B^n вида

$$u = f(r^2)\overleftrightarrow{v},\ v \in SV(S^{n-1}),\ f \in C^\infty([0,1]),\ f(1) = 0. \tag{2}$$

Из (1) векторные поля вида (2) бездивергентные, непосредственно проверяется, что они образуют алгебру Ли, обозначим ее $i(B^n)$, а порожденную их потоками группу диффеоморфизмов, сохраняющих объем шара, через $I(B^n)$.

Для $u \in i(B^n),\ F \in I(B^n)$ имеем $u\big|S^{n-1} = 0,\ F\big|S^{n-1} = Id.$

Скобка Ли в $i(B^n)$ имеет следующий вид. Пусть $u = f(r^2)\overleftrightarrow{v},\ w = g(r^2)\overleftrightarrow{t}$. Имеем

$$[u, w] = f(r^2)\, g(r^2)\, [\overleftrightarrow{v}, \overleftrightarrow{t}]. \tag{3}$$

При $n = 2$ имеем $SV(S^{n-1}) = SV(S^1) = \{\lambda(y, -x) \big| \lambda \in R\} \cong R^1$. Отсюда

$$i(B^2) = \{ f(r^2)(y, -x) \big| f(1) = 0\}.$$

Для дальнейшего полезно вычислить действие оператора Лапласа на векторное поле вида (2), когда координатами векторного поля v являются однородные гармонические многочлены степени k. Имеем

$$\Delta(f(r^2)\overleftrightarrow{v}) = \Delta(f)v + f\Delta(v) + 2(\nabla f, \nabla v).$$

Отсюда следует

$$\Delta(f(r^2)\overleftrightarrow{v}) = (4f''r^2 + 2(n+2k)f')v. \tag{4}$$

Также получаем

$$\Delta(r^2)^k = 2k(n + 2k - 2)(r^2)^{k-1}.$$

2. ПРИЛОЖЕНИЯ К ГИДРОДИНАМИКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Нас будут интересовать течения несжимаемой жидкости (идеальной и вязкой) внутри шара, неподвижные на его границе в отсутствие внешних сил. В общем виде они описываются уравнениями Навье – Стокса для случая области с границей (см. Р. Темам [4, с. 224–225]). Применительно к шару система приобретает вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u(u)\;+\nabla p-\nu\Delta u=0,\\
&\mathrm{div}u=0,\\
&u\big|S^{n-1}=0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь ν – вязкость жидкости, соответственно, при $\nu=0$ получаем уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости.

Конфигурационным пространством для этой задачи является группа диффеоморфизмов, сохраняющих объем шара, неподвижных на границе (сфере). Алгеброй Ли этой группы будет алгебра бездивергентных векторных полей в шаре, обращающихся в ноль на границе.

Рассмотрим двумерный шар (диск B^2) с границей окружность (S^1). Возьмем $w\in i(B^2)$. Пусть

$$
w=f(r^2)(y,-x)\big|,\; f(1)=0\,. \tag{6}
$$

Имеем $w(w)=f(r^2)^2(-x,-y)$.

Введем $F(h)=\int\limits_0^h f(\tau)^2\,d\tau$.

Непосредственно проверяется, что $w(w)=\nabla(-\frac{1}{2}F(r^2))$, т.е. это градиентное поле, для начальных условий вида (6).

Используя (4), получаем

Предложение 2. Для векторных полей вида (6) уравнение Навье – Стокса приводится к виду

$$
\frac{\partial F(h,t)}{\partial t}=4\nu(hF''_{hh}+2F'_h),F(h,0)=\,f(h)\,. \tag{7}
$$

Пусть $f(h)=\sum\limits_{s=0}^{m}a_s h^s$ – многочлен степени m с коэффициентами, зависящими от времени. Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial a_s}{\partial t}=4\nu(s+1)(s+2)a_{s+1}\,,s=m-1,\ldots,0,\\
&\frac{\partial a_m}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Такую систему можно решать последовательным интегрированием.

$$
\begin{aligned}
&a_m(t)=a_m(0),\\
&a_{m-1}(t)=a_{m-1}(0)+4\nu m(m+1)a_m(0),\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Пример 1. Возьмем $u=(r^2-1)(y,-x)$.

Тогда имеем $f(h)=h-1$. Система (8) приводится к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial a_0}{\partial t}=8\nu\, a_1,\ a_0(0)=-1,\\&a_1(t)=1.\end{aligned} \tag{9}$$

Решением (9) будет

$$F(h,t)=h-1+8\nu t\ .$$

Тогда для уравнения Навье – Стокса получаем решение:

$$u_t=((r^2-1)+8\nu t)(y,-x)\ . \tag{10}$$

Отсюда видно, что, хотя начальные условия удовлетворяют постановке (5), для решения на границе имеем $u(t)\big|S^1\neq 0, t>0$, т.е. полученное решение (8) уже не является решением уравнений Навье – Стокса в постановке (5).

Перейдем к трехмерной гидродинамике.

Пример 2. Пусть $n=3$, B^3 – шар с границей – двумерной сферой S^2. Возьмем

$$u=(r^2-1)(y,-x,0)\ . \tag{11}$$

Имеем $u(u)=(r^2-1)^2(-\mathrm{x},-y,0)$.

Это векторное поле уже не является градиентным и представляется в виде

$$u(u)=-\nabla p+w.$$

Здесь $\operatorname{div} w=0$, а для давления p получаем уравнение

$$\Delta p=-\operatorname{div}(u(u))=2(r^2-1)^2+4(r^2-1)(x^2+y^2)\ . \tag{12}$$

Используя (4) для трехмерного случая, имеем:

$$\begin{gathered}\Delta(r^2)^2=20r^2,\\ \Delta(r^2)^3=42(r^2)^2,\\ \Delta(r^2(x^2+y^2))=14(x^2+y^2)+4r^2,\\ \Delta((r^2)^2(x^2+y^2))=36(x^2+y^2)r^2+4(r^2)^2.\end{gathered}$$

Отсюда получаем решение (12):

$$p=(\frac{1}{9}(r^2)^2-\frac{2}{7}r^2+\frac{5}{21})(x^2+y^2)+\frac{1}{27}(r^2)^3-\frac{1}{7}(r^2)^2+\frac{11}{63}r^2\ . \tag{13}$$

Из этого получаем:

$$\nabla p = (\frac{2}{9}(r^2)^2 - \frac{4}{7}r^2 + \frac{10}{21})(x,y,0) + (x^2+y^2)(\frac{4}{9}r^2 - \frac{4}{7})(x,y,z) + (\frac{2}{9}(r^2)^2 - \frac{4}{7}r^2 + \frac{22}{63})(x,y,z). \quad (14)$$

Член, отвечающий за вязкость, дает

$$\Delta u = 10(y,-x,0).$$

Отсюда в начальный момент времени получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= (r^2-1)^2(\mathrm{x},y,0) + \\ &+(-\frac{2}{9}(r^2)^2 + \frac{4}{7}r^2 - \frac{10}{21})(x,y,0) + (x^2+y^2)(-\frac{4}{9}r^2 + \frac{4}{7})(x,y,z) + \\ &+(-\frac{2}{9}(r^2)^2 + \frac{4}{7}r^2 - \frac{22}{63})(x,y,z) + 10\nu(y,-x,0). \end{aligned} \quad (15)$$

То же самое на границе шара дает:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} S^2 = -\frac{8}{63}(x,y,0) + \frac{8}{63}(x^2+y^2)(x,y,z) + 10\nu(y,-x,0) \quad (16)$$

Легко проверить, что в правой части (16) при любом значении вязкости ν (в том числе при нулевой вязкости) получается векторное поле на сфере S^2 с ненулевой z-компонентой. Отсюда следует, что, хотя начальные условия удовлетворяют постановке (5), для решения будет нарушаться выполнение граничного условия $u\big|S^2 = 0$, т.е. получаемое решение уже не будет решением уравнений Навье – Стокса (5). Это справедливо также для случая идеальной жидкости, т.е. когда вязкость нулевая $(\nu = 0)$. Здесь иллюстрируется отличие трехмерной гидродинамики от двумерной. В двумерном случае векторное поле $u = (r^2-1)(y,-x)$ является стационарным течением идеальной несжимаемой жидкости, а в трехмерном $u = (r^2-1)(y,-x,0)$ – нет.

ВЫВОДЫ

Предложена конструкция построения диффеоморфизмов, сохраняющих объем шара, неподвижных на границе шара. Исследованы решения гидродинамики несжимаемой жидкости в шаре. Для двумерной гидродинамики построен пример, когда начальные условия являются нулевыми на границе шара, а эволюционирующее во времени поле скоростей решения уравнений Навье – Стокса становится ненулевым на границе. Для трехмерной гидродинамики аналогичный пример построен как для уравнений Навье – Стокса, так и для уравнений Эйлера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.

2. Лукацкий А.М. О структуре алгебр Ли сферических векторных полей и группах диффеоморфизмов S^n и RP^n // Сибирский матем. журн. – 1977. – Т. 28, № 1. – С. 161–173.

3. Лукацкий А.М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010.

4. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

ON THE GROUP OF DIFFEOMORPHISMS WHICH PRESERVE THE BALL VOLUME AND ARE IDENTICAL ON SPHERE

Lukatsky A.M.

A construction of building of diffeomorphisms which preserve the ball volume and are identity on boundary has proposed. A behavior of hydrodynamics incompressible fluid solutions with initial condition being null on the boundary is investigated.

Key words: diffeomorphism, ball, sphere, divergence-free vector field, incompressible fluid, Euler equations, Navier-Stokes equations.

REFERENCES

1. Arnold V.I., Hesin B.A. Topological methods in gydrodynamics. M .: MCNMO. 2007. 392 p.

2. Lukatskii A.M. On the structure of spherical Lie vector fields and groups of diffeomorphisms and. Siberian Math. Zh. 1977. Vol. 28. No. 1. Pp. 161–173.

3. Lukatskii A.M. Structural-geometric properties of the infinite dimensional Lie groups in the use of the equations of mathematical physics. Yaroslavl: P.G. Demidov Yaroslavl State University. 2010.

4. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North Holland Publ. Comp. 1979.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), ведущий научный сотрудник ИНЭИ РАН, д.ф.-м.н., автор 105 научных работ. Область научных интересов: группы Ли, группы диффеоморфизмов, уравнения математической физики, электронный адрес: lukatskii.a.m.math@mail.ru.