УДК 517.988.57+517.988.521

ОБ ОПЕРАТОРАХ СО СФЕРИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

Н.А. ЕРЗАКОВА

Изучаются свойства положительно однородных отображений степени k посредством различных функций (например, мер некомпактности), определенных на всех ограниченных подмножествах банахова пространства. Доказываются необходимые и достаточные условия равенства нулю таких функций на образе единичного шара положительно однородных операторов. В частности, получен критерий полной непрерывности производной Фреше для произвольного банахова пространства и критерий для операторов, действующих в правильных пространствах, быть улучшающими.

Ключевые слова: положительно однородные операторы, локально сильно уплотняющие операторы, мера некомпактности Хаусдорфа, производная Фреше, асимптотически линейный оператор, правильные пространства, пространство Лебега, пространство Лоренца, мера неравностепенной абсолютной непрерывности норм.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть E, E_1 – банаховы пространства, θ – нуль банахова пространства, $S_\rho = \{u \in E : \|u\| = \rho\}$, $B_\rho = \{u \in E : \|u\| \le \rho\}$ – соответственно сфера и шар радиуса ρ с центром в θ. Пусть $B(E)$ – семейство всех ограниченных подмножеств банахова пространства E и пусть $\psi : B(E) \to [0,+\infty)$ – некоторая функция.

Например, ψ может быть диаметром множества или мерой некомпактности (МНК для краткости).

Мы рассмотрим класс всех непрерывных операторов $T : E \to E_1$ (не обязательно линейных), удовлетворяющих свойству

$$\exists k = k(T) > 0 : \psi(T(\rho U)) = \rho^k \psi(T(U)) \forall U \subset E, \forall \rho > 0, \tag{1}$$

т.е. всех положительно однородных отображений степени k.

Напомним основные определения и обозначения ([1], 1.1.4, 1.1.6) в удобной для нас форме.

Функции ψ_1 и ψ_2 называются эквивалентными, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1\psi_1(U) \le \psi_2(U) \le c_2\psi_1(U)$ для любых подмножеств U из E.

Иногда функция ψ может удовлетворять некоторым из перечисленных ниже свойств:

1) положительной однородности, т.е. $\psi_E(tU) = t\psi_E(U)$ ($t > 0$ – число);

2) монотонности, т.е. $\psi(U) \le \psi(V)$, если $U \subseteq V$.

3) алгебраической полуаддитивности, т.е. $\psi_E(U+V) \le \psi_E(U) + \psi_E(V)$, где $U+V = \{u+v : u \in U, v \in V\}$;

4) инвариантности относительно сдвигов, т.е. $\psi_E(U+u) = \psi_E(U)$ ($u \in E$).

Существует множество примеров функций, удовлетворяющих перечисленным выше свойствам, среди них мера некомпактности Хаусдорфа.

Напомним, что мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества U называется инфимум всех $\varepsilon > 0$, при которых U имеет в E конечную ε-сеть.

Замечание 1. Если $T: E \to E_1$ удовлетворяет (1) и $\psi(T(B_r)) = 0$ для некоторого $r > 0$, то $\psi(T(B_\rho)) = (\rho / r)^k \psi(T(B_r)) = 0$. В частности, если ψ монотонна, то $\psi(T(U)) = 0$ для всех $U \in B(E)$.

В работах [2, 3] были доказаны достаточные условия полной непрерывности производной Фреше f'. Заметим, что последнее означало равенство нулю меры некомпактности Хаусдорфа на образе f' единичного шара, т.е. $\chi(f'(B_1)) = 0$. В [4–6] были также доказаны достаточные условия полной непрерывности производной Фреше, более общие, чем в [2, 3].

В последующих работах [7, 8] того же автора были получены условия, являющиеся и достаточными и в то же время необходимыми условиями равенства $\chi(f'(B_1)) = 0$. Для формулировки этих условий были введены классы так называемых сильно уплотняющих операторов.

В работах [7–12] изучались свойства сильно уплотняющих операторов. В частности, было установлено, что такие операторы образуют линейное пространство, т.е. их достаточно много. Приведены примеры сильно уплотняющих операторов, не являющихся вполне непрерывными. Доказаны обобщения теорем М.А. Красносельского о точках бифуркации для вполне непрерывных операторов на случай сильно уплотняющих операторов.

Цель настоящей работы состоит в нахождении необходимых и достаточных условий равенства $\psi(T(B_1)) = 0$ для операторов, удовлетворяющих (1) (не обязательно линейных), в случае если ψ – монотонная, инвариантная относительно сдвигов, положительно однородная, т.е. не обязательно мера некомпактности Хаусдорфа. Это равенство может иметь различный смысл для оператора в зависимости от выбора ψ.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для произвольной функции $\psi: B(E) \to [0, +\infty)$ по аналогии с [12] введем понятие $\psi-$сферического свойства.

Оператор $T: E \to E_1$ удовлетворяет ψ-сферическому свойству, если для каждого $R > 0$ из неравенства $\psi(T(B_R)) > 0$ следует, что $\psi(T(S_r)) > 0$ для некоторого $r \in (0, R]$.

Существуют примеры непрерывных операторов, не удовлетворяющих $\chi-$сферическому свойству.

Лемма 1. Пусть ψ – монотонная функция, а оператор $T: E \to E_1$ удовлетворяет (1). Тогда следующие условия эквивалентны:

1) оператор $T: E \to E_1$ удовлетворяет $\psi-$сферическому свойству;

2) $\psi(T(B_1)) = 0 \Leftrightarrow \psi(T(S_1)) = 0$.

Доказательство. Так как, очевидно, что 2)$\Rightarrow$1). Поэтому покажем, что 1)$\Rightarrow$2). Ввиду замечания 1 и монотонности ψ достаточно показать, что из $\psi(T(S_1)) = 0$ следует $\psi(T(B_1)) = 0$.

Предположим $\psi(T(B_1)) > 0$ и $\psi(T(S_1)) = 0$. В силу замечания 1 $\psi(T(S_r)) = 0$ для всех $r > 0$. Получили противоречие с определением сферического свойства.

Лемма доказана.

В работах [4, 5] был введен класс операторов.

Непрерывное отображение $f: M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим на M, если существует функция $\lambda_{M,f}: R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to 0}\lambda_{M,f}(r)=0,$ такая, что для любой точки $u \in M$, для каждого $r>0$, для произвольного подмножества $U \subseteq (u+B_r)\cap M$ справедливо неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{M,f}(r)\psi_E(U)$.

В работе [6] был введен класс операторов.

Непрерывный оператор $f: G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ-уплотняющим на бесконечности, если существует число $R_f > 0$ функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r)=0,$ такая, что $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и произвольного непустого подмножества $U \subseteq M \cap (B_{R_2} \setminus B_{R_1})$.

Вышеуказанные классы, в случае регулярной МНК ψ, включают наряду со всеми вполне непрерывными операторами также некоторые операторы, не являющиеся ψ-уплотняющими и даже (k, ψ)-ограниченными.

Напомним, что оператор называется вполне непрерывным [2], если он непрерывен и компактен.

В работах [7, 9] определяются классы операторов.

(λ_2) Непрерывный оператор $f: M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим оператором в точке $u_1 \in M$, если существуют число $r_1 > 0$ и функция $\lambda_{u_1,f}: R_+ \to R_+$ такие, что для любых чисел $0<\rho<r<r_1$ и множества $U=(u_1+B_\rho)\cap M$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{u_1,f}(r)\psi_E(U)$.

$(\tilde{\lambda}_2)$ Непрерывный оператор $f: G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ-уплотняющим на бесконечности (на сферических прослойках), если существуют число $R_f > 0$ и функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r)=0,$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и $U = G\cap(B_{R_2}\setminus B_{R_1})$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$.

В работе [8, 10] определяются классы операторов.

(λ_3) Непрерывный оператор $f: M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим оператором в точке $u_1 \in M$ (на сферах), если существуют число $r_1 > 0$ и функция $\lambda_{u_1,f}: R_+ \to R_+$ такие, что для любых чисел $0<\rho<r<r_1$ и множества $U=(u_1+S_\rho)\cap M$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{u_1,f}(r)\psi_E(U)$.

$(\tilde{\lambda}_3)$ Непрерывный оператор $f: G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ-уплотняющим на бесконечности (на сферах), если существуют число $R_f > 0$ и функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r)=0,$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и $U = G\cap S_{R_2}$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$.

Рассмотрим другой класс непрерывных операторов $f: E \to E_1$ (не обязательно линейных), представимых в окрестности $u_1 \in E$ в виде суммы

$$f(u_1+u)=A_1(u)+A_0(u) \tag{2}$$

локально сильно ψ-уплотняющего оператора $A_0:E\to E_1$ в точке θ и непрерывного оператора $A_1:E\to E_1$ (вообще говоря, зависящего от u_1), удовлетворяющего (1) при $0<k\le 1$.

Обозначим класс операторов f, удовлетворяющих (2) и для которых $\psi(A_1(S_\rho))=0$ для всех $\rho>0$ как (λ_0).

Рассмотрим также другой класс непрерывных операторов $f:E\to E_1$ (не обязательно линейных), представимых в окрестности ∞ в виде суммы

$$f(u_1+u)=\tilde{A}_1(u)+\tilde{A}_0(u) \tag{3}$$

оператора $\tilde{A}_0:E\to E_1$ из $(\tilde{\lambda}_2)$ и непрерывного оператора $A_1:E\to E_1$, удовлетворяющего (1) при $k\ge 1$.

Обозначим класс операторов f, удовлетворяющих (3) и для которых $\psi(\tilde{A}_1(S_\rho))=0$ для всех $\rho>0$ как $(\tilde{\lambda}_0)$.

Лемма 2. Пусть ψ – монотонная, инвариантная относительно сдвигов, положительно однородная функция и пусть $\psi(S_1)\ne 0$. Тогда справедливы включения $(\lambda_2)\subseteq(\lambda_3)$ и $(\tilde{\lambda}_2)\subseteq(\tilde{\lambda}_3)$.

Доказательство. Пусть $f\in(\lambda_2)$. Заметим, что в силу монотонности ψ имеем $\psi(f(u+S_\rho))\le\psi(f(u+B_\rho))$ для всех u и ρ, а в силу предположения о том, что $\psi(S_1)\ne 0$, имеем $\psi(B_1)\ne 0$. Поэтому

$$\psi(f(u_1+S_\rho))\le\psi(f(u_1+B_\rho))\le\lambda_{u_1,f}(r)\psi_E(B_\rho)\le\lambda_{u_1,f}(r)\frac{\psi(B_1)}{\psi(S_1)}\psi(u_1+S_\rho)$$

и справедливо включение $(\lambda_2)\subseteq(\lambda_3)$. Аналогично доказывается $(\tilde{\lambda}_2)\subseteq(\tilde{\lambda}_3)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть ψ – монотонная, инвариантная относительно сдвигов, положительно однородная и алгебраически полуаддитивная функция и пусть $\psi(S_1)\ne 0$. Пусть для $f:E\to E_1$ выполнено (2) при $0<k\le 1$ или (3) при $k\ge 1$. Тогда совпадают (λ_0), (λ_2) и (λ_3) в первом случае и соответственно $(\tilde{\lambda}_0)$, $(\tilde{\lambda}_2)$ и $(\tilde{\lambda}_3)$ во втором случае.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно доказать, что $(\lambda_2)\subseteq(\lambda_0)\subseteq(\lambda_3)$ и $(\tilde{\lambda}_2)\subseteq(\tilde{\lambda}_0)\subseteq(\tilde{\lambda}_3)$.

Пусть $f\in(\lambda_0)$, т.е. $\psi(A_1(S_\rho))=0$ для всех $\rho>0$. Имеем $(\lambda_0)\subseteq(\lambda_3)$, так как в силу (2) и алгебраической полуаддитивности ψ

$$\psi(f(u_1+S_\rho))\le\psi(A_1(S_\rho))+\psi(A_0(S_\rho))\le\psi(A_0(B_\rho))\le\lambda_{\theta,A_0}(r)\psi_E(B_\rho)\le\lambda_{\theta,A_0}(r)\frac{\psi(B_1)}{\psi(S_1)}\psi(u_1+S_\rho).$$

Пусть $f \in (\lambda_2)$. Имеем $(\lambda_2) \subseteq (\lambda_0)$, так как в силу (1), (2), монотонности и алгебраической полуаддитивности ψ

$$\psi(A_1(S_1)) \le \psi(A_1(B_1)) = \frac{\psi(A_1(B_\rho))}{\rho} \le \frac{\psi(f(u_1+B_\rho))}{\rho} + \frac{\psi(A_0(B_\rho))}{\rho} \le \frac{\lambda_{u_1,f_0}(r)\psi_E(B_\rho)}{\rho} + \frac{\lambda_{\theta,A_0}(r)\psi(B_\rho)}{\rho}.$$

Устремляя в последнем неравенстве r к 0, получим $\psi(A_1(S_1)) = 0$ и $f \in (\lambda_0)$.

По аналогии доказывается, что $(\tilde{\lambda}_2) \subseteq (\tilde{\lambda}_0) \subseteq (\tilde{\lambda}_3)$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполнены предположения теоремы 1 относительно ψ. Тогда все операторы, удовлетворяющие (1), удовлетворяют также ψ-сферическому свойству.

Действительно, рассмотрим, сохраняя обозначения из доказательства теоремы 1, $A_0(u) \equiv \theta$ и $f(u+u_1) \equiv A_1(u)$ как частный случай (2) и $f(u+u_1) \equiv \tilde{A}_1(u)$ как частный случай (3). Тогда условие $\psi(A_1(S_1)) = 0$ влечет $A_1 \in (\lambda_2)$ и соответственно $\tilde{A}_1 \in (\tilde{\lambda}_2)$. Отсюда $\psi(A_1(B_1)) = 0$.

Действительно,

$$\psi(A_1(B_1)) = \frac{\psi(A_1(B_\rho))}{\rho} \le \frac{\lambda_{\theta,A_1}(r)\psi(B_\rho)}{\rho} = \frac{\lambda_{\theta,A_1}(r)\rho\psi(B_1)}{\rho} = \lambda_{\theta,A_1}(r)\rho\psi(B_1),$$

откуда при стремлении $r \to 0$, получаем $\psi(A_1(B_1)) = 0$.

Аналогично равенство $\psi(\tilde{A}_1(S_1)) = 0$ влечет $\psi(\tilde{A}_1(B_1)) = 0$.

Итак, все положительно однородные операторы в смысле (1) удовлетворяют также ψ-сферическому свойству.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть функция ψ помимо перечисленных во введении свойств 1) – 4) удовлетворяет свойству регулярности, т.е. $\psi_E(U) = 0$, если и только, если множество U относительно компактно.

Приложением основного результата настоящей работы, в частности, являются необходимые и достаточные условия полной непрерывности производной Фреше.

Действительно, в [7–10] были рассмотрены классы операторов $f: E \to E$: (λ_1): производная Фреше $f'(u_1)$ является вполне непрерывным оператором; $(\tilde{\lambda}_1)$ асимптотическая производная $f'(\infty)$ является вполне непрерывным оператором.

Пусть производная Фреше $A = f'(u_1)$ оператора f в точке u_1 существует. Тогда $f(u_1+h) = f(u_1) + f'(u_1)h + \omega(h)$ при достаточно малых $h \in E$, где $\omega(h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

По определению асимптотической производной $f'(\infty)$ оператора f имеем $f'(\infty)h = f(h)+\tilde{\omega}(h)$, $h\in E$, где $\tilde{\omega}(h)/\|h\|\to 0$ при $\|h\|\to\infty$.

Полагая $A_1(h)= f(u_1)+ f'(u_1)h$, $\tilde{A}_1(h)= f'(\infty)h$, $A_0(h)=\omega(h)$, $\tilde{A}_0(h)=\tilde{\omega}(h)$, мы получаем частные случаи, соответственно, (2) и (3). Отсюда классы (λ_1) (производная Фреше $f'(u_1)$ является вполне непрерывным оператором); $(\tilde{\lambda}_1)$ (асимптотическая производная $f'(\infty)$ является вполне непрерывным оператором) являются частными случаями, соответственно, (λ_0) и $(\tilde{\lambda}_0)$.

Поэтому утверждения о полной непрерывности производной Фреше, доказанные автором ранее в [7, 8, 11], являются следствием основного результата настоящей работы.

В качестве другого приложения основного результата являются необходимые и достаточные условия оператора, действующего в правильных пространствах, быть улучшаемым.

Частными случаями правильных пространств являются пространства Лебега и Лоренца.

Пусть, как в [13], Ω – подмножество конечномерного пространства, причем $\mu(\Omega)<\infty$, μ – непрерывная мера, т.е. всякое подмножество $D\subset\Omega$, $\mu(D)>0$, можно разбить на два подмножества равной меры.

Рассмотрим пространства Лебега $L_p(\Omega)=L_p$, $1\le p<\infty$. Пусть P_D – оператор умножения на характеристическую функцию $D\subset\Omega$. Пусть $\nu_{L_p}(U)$ обозначает меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества U в L_p:

$$\nu_{L_p}(U)=\overline{\lim_{\mu(D)\to 0}}\sup_{u\in U}\|P_D u\|_{L_p}.$$

Оператор суперпозиции $F: L_q\to L_p$ назван в [13] улучшающим, если $\nu_{L_p}(F(U))=0$. По аналогии с пространством Лебега меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества можно рассмотреть в произвольном правильном пространстве E [14, 15]. Автором настоящей работы мера неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества была рассмотрена как мера некомпактности в смысле определения, данного в [1]. Мера $\nu_E(U)$ обладает всеми свойствами меры некомпактности Хаусдорфа χ, за исключением одного: равенство $\nu_E(U)=0$ возможно на множествах, не являющихся относительно компактными [14–16].

По аналогии с оператором суперпозиции назовем оператор $F: E\to E_1$, действующий в правильных пространствах E, E_1, улучшающим, если $\nu_{E_1}(F(U))=0$.

Основной результат настоящей работы содержит необходимые и достаточные условия для операторов, действующих в правильных пространствах и удовлетворяющих (1), быть улучшающими.

Проиллюстрируем это на примере оператора суперпозиции $F_1(u)(s)=\mathrm{sgn}(u(s))\,|u(s)|^{q/p}$, действующего из L_q в L_p, который заведомо не является улучшающим.

Действительно, если на единичной сфере S_1 пространства $L_q(0,1)$ $(1 \le q < \infty)$ рассмотрим последовательность:

$$u_m(s) = \begin{cases} 2^{m/q}, & s \in [0,1/2^m], \\ 0, & s \notin [0,1/2^m], \end{cases}$$

то

$$F_1(u_m)(t) = \begin{cases} 2^{m/p}, & t \in [0,1/2^m], \\ 0, & t \notin [0,1/2^m] \end{cases}$$

и $\nu_{L_p}(F_1(S_1)) = 1$.

В то же время имеем

$$\nu_{L_p}\left(F_1\rho U\right) = \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| P_D F_1(\rho u)\right\|_{L_p} = \rho^{q/p} \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| a\,\mathrm{sgn}(u(s))\,|\,u(s)\,|^{q/p}\right\|_{L_p} = \rho^{q/p}\nu_{L_p}\left(F_1 U\right),$$

т.е. F_1 удовлетворяет (1) с $k = \frac{q}{p}$ и в силу следствия 1 удовлетворяет также ν-сферическому свойству.

Заметим, что

$$\nu_{L_p}\left(F_1 U\right) = \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| P_D F_1(u)\right\|_{L_p} = \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| P_D(\mathrm{sgn}(u(s))\,|\,u(s)\,|^{q/p})\right\|_{L_p} =$$
$$= \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| P_D\,|\,u\,|^{q/p}\right\|_{L_p} = \overline{\lim_{\mu(D)\to 0}} \sup_{u\in U} \left\| P_D\,|\,u\,\right\|_{L_q}^{q/p} = \nu_{L_q}^{q/p}(U) \le r^{q/p-1}\nu_{L_q}(U).$$

Таким образом, при $k = \frac{q}{p} > 1$ оператор суперпозиции является локально сильно уплотняющим оператором в каждой точке, но это необходимое и достаточное условие того, что оператор улучшающий, только при $k < 1$.

Аналогично, при $k = \frac{q}{p} < 1$ оператор суперпозиции является сильно уплотняющим на бесконечности оператором, но это необходимое и достаточное условие того, что оператор улучшающий, только при $k > 1$.

Данное заключение допускает следующее обобщение.

Следствие 2. Если оператор удовлетворяет (1) относительно функции ψ, монотонной, инвариантной относительно сдвигов, положительно однородной и такой, что $\psi(S_1) \ne 0$, не является улучшающим, то он может быть локально сильно ψ-уплотняющим оператором только при $k > 1$.

Аналогично, если оператор удовлетворяет (1) относительно функции ψ, монотонной, инвариантной относительно сдвигов, положительно однородной и такой, что $\psi(S_1) \ne 0$, не является улучшающим, то он может быть сильно ψ-уплотняющим оператором на бесконечности только при $k<1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, Б.Н. Садовский, А.Е. Родкина. – Новосибирск: Наука. 1986. – 264 с.

2. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

3. Меламед В.Б., Перов А.И. Обобщение теоремы М.А. Красносельского о полной непрерывности производной Фреше вполне непрерывного оператора // Сиб. мат. журн. – 1963. – Т. 4. N 3. – С. 702–704.

4. Erzakova N.A. On locally condensing operators // Nonlinear Analysis: Theory Methods& Applications, 75. 2012. № 8. Pp. 3552–3557.

5. Ерзакова Н.А. Почти-кольцо локально сильно уплотняющих операторов // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2012. – № 184 (10). – С. 78–86.

6. Ерзакова Н.А. О сильно уплотняющих на бесконечности операторах // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2014. – № 207 (09). – С. 110–118.

7. Ерзакова Н.А. Об одном критерии полной непрерывности производной Фреше // Функц. анализ и его прил. – 2015. – 49 (4). – С. 79–82.

8. Erzakova N.A. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results // J. Math. Anal. Appl. Vol. 428. Issue 2. 2015. Pp. 1368–1376.

9. Ерзакова Н.А. О сильно уплотняющих операторах // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Международной конференции, Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 2 февраля 2015 г.). – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. – С. 42–43.

10. Ерзакова Н.А. О сильно уплотняющих операторах на сферах и шарах // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V: Тезисы докладов, Материалы Международной научной конференции. Секция I. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2015. – С. 29.

11. Ерзакова Н.А. О точках бифуркации сильно уплотняющих операторов // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 220 (10). – С. 105–113.

12. Erzakova N.A. On semi-homogeneous maps of degree k. [Электронный ресурс] URL: http://de.arxiv.org/pdf/1508.04215

13. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. – М.: Наука, 1966. – 500 с.

14. Erzakova N.A. Measures of Noncompactness in Regular Spaces // Canad. Math. Bull. Vol. 57. 2014. Pp. 780–793.

15. Ерзакова Н.А. Мера некомпактности β в пространствах Лоренца // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2014. – № 207 (09). – С. 110–118.

16. Ерзакова Н.А. Мера некомпактности β в пространствах L_p // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2013. – № 195. – С. 65–73.

ON OPERATORS WITH THE SPHERICAL PROPERTY

Erzakova N.A.

Properties of continuous positively homogeneous operators of degree k via various functions (e.g. measures of noncompactness) on all bounded subsets of a Banach space are studied. Necessary and sufficient conditions for these functions to vanish on the image of the unit ball under positively homogeneous operators are given. In particular, we give criteria for the complete continuity of the Fréchet derivative in an arbitrary Banach space and criteria for operators, acting in regular spaces, to be improving.

Key words: positively homogeneous operators, locally strongly condensing operators, Hausdorff measure of noncompactness, Fréchet derivative, asymptotic linear operator, regular spaces, Lebesgue space, Lorentz space, measure of nonequiabsolute continuity of norms.

REFERENCES

1. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. Basel, Boston, Berlin: Birkhäser Verlag, 1992. – 255 p.

2. Krasnoselskii M.A. Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. Oxford: Pergamon Press, 1964. 392 p.

3. Melamed V.B., Perov A.I. A generalization of a theorem of M.A. Krasnosel’skii on the complete continuity of the Frechet derivative of a completely continuous operator. Sibirsk. Mat. Zh. Vol. 4. No. 3. 1963. Pp. 702–704.

4. Erzakova N.A. On locally condensing operators. Nonlinear Analysis: Theory Methods& Applications, Vol. 75. Issue 8. 2012. Pp. 3552–3557.

5. Erzakova N.A. A near-ring of locally condensing operators. Scientific Bulletin of MSTUCA. Vol. 184 (10). 2012. Pp. 78–86.

6. Erzakova N.A. On strongly condensing operators at infinity. Scientific Bulletin of MSTUCA. 2014. Vol. 207 (09). Pp. 110–118.

7. Yerzakova N.A. On a Criterion for the Complete Continuity of the Fréchet Derivative. Funct. Anal. Appl. Vol. 49. No. 4. 2015. Pp. 304–306.

8. Erzakova N.A. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results. J. Math. Anal. Appl. Vol. 428. 2015. Pp. 1368–1376.

9. Erzakova N.A. On strongly condensing operators. Contemporary methods theory of functions and associated problems: Proceedings of International Conference, Voronezh Winter Mathematical School (January 27 – February 2, 2015). Voronezh: VSU, 2015. Pp. 42–43.

10. Erzakova N.A. On strongly condensing operators on spheres and balls. Modern methods, problems and applications of operator theory and harmonic analysis – V: Proceedings of International Scientific Conference. Section I. Rostov-on-Don: DSTU, 2015. P. 29.

11. Erzakova N.A. On bifurcation points of strongly condensing operators. Scientific Bulletin of MSTUCA. Vol. 220 (10). 2015. Pp. 105–113.

12. Erzakova N.A. On semi-homogeneous maps of degree k. URL: http://de.arxiv.org/pdf/1508.04215

13. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E. Integral operators in spaces of summable functions. Noordhoff, Leyden. 1976. 500 p.

14. Erzakova N.A. Measures of Noncompactness in Regular Spaces. Canad. Math. Bull. Vol. 57. 2014. Pp. 780–793.

15. Erzakova N.A. Measure of noncompactness β in Lorentz spaces. Scientific Bulletin of MSTUCA. Vol. 207 (09). 2014. Pp. 110–118.

16. Erzakova N.A. Measure of noncompactness β in spaces L_p. Scientific Bulletin of MSTUCA. Vol. 195. 2013. Pp. 65–73.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ерзакова Нина Александровна, окончила механико-математический факультет Новосибирского государственного университета в 1976 г. Доктор физико-математических наук, профессор, автор более 60 научных работ. Область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными, электронный адрес: naerzakova@gmail.com.