

УДК 514.7

ГАЛИЛЕЕВО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ-БЮРГЕРСА И НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

Ю.И. ДЕМЕНТЬЕВ, А.В. САМОХИН

(По заказу редакционной коллегии)

Описание галилеево-инвариантных решений уравнения КдВ-Бюргерса редуцируется к исследованию фазовых траекторий сопутствующего обыкновенного дифференциального уравнения, зависящего от параметра (скорости распространения ударной волны). Аналитические (точные) инвариантные решения представляют собой простые ударные волны, которые становятся сепаратрисами фазового портрета, всегда имеющего две особые точки. Для нелинейной суперпозиции исходный фазовый портрет содержит 4 особые точки, и с течением времени происходит его бифуркация через осцилляции.

Ключевые слова: галилеево-инвариантные решения, уравнение КдВ-Бюргерса, нелинейная суперпозиция ударных волн.

ВВЕДЕНИЕ

Волны в среде с дисперсией и диссипацией описываются уравнением КдВ-Бюргерса

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - 2uu_x + \lambda u_{xxx}.$$

Точное аналитическое решение этого уравнения невозможно, поэтому значительный

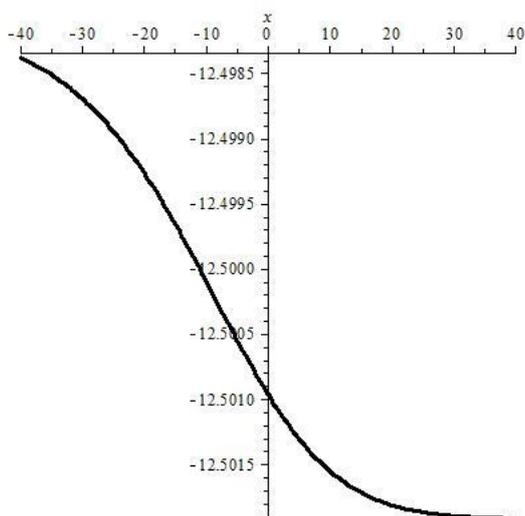


Рис. 1. Галилеево-инвариантное решение

практический интерес представляет собой исследование его инвариантных (относительно группы симметрий) решений. Инвариантные решения являются частными (хотя и точными), и, вообще говоря, заранее неясно, будут ли они возникать в ходе эволюции произвольных начальных возмущений. Тем не менее некоторые из них играют чрезвычайно важную роль, являясь своего рода аттракторами, поскольку оказывается, что поведение решения достаточно общего вида на больших временах, как правило, совпадает с таковым инвариантных решений. Эти вопросы были предметом исследования для других нелинейных уравнений в работах [2–4]. В частности, особый интерес представляют волны, бегущие без изменения формы, то есть галилеево-инвариантные решения вида $u = f(x - Vt)$. С точностью до трансля-

ций они имеют вид

$$-\frac{1}{50} \cdot \frac{3\varepsilon^6 - 25\varepsilon^2 V \lambda}{\lambda \varepsilon^2} + \frac{3}{25} \frac{\varepsilon^4 \operatorname{th}\left(-\frac{1}{10} \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (x - Vt)\right)}{\lambda} + \frac{3}{50} \frac{\varepsilon^4 \operatorname{th}^2\left(-\frac{1}{10} \frac{\varepsilon^2}{\lambda} (x - Vt)\right)}{\lambda}.$$

График такого решения представляет собой ступеньку (рис. 1), для $\varepsilon = 0.1, \lambda = 0.01, V = 3$.

1. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Вводя $x - Vt = z$, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-Vu_z = \varepsilon^2 u_{zz} - 2uu_z + \lambda u_{zzz}.$$

Обозначим $u_z = y'$ и проинтегрируем; получим

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \frac{d}{dx} y(x) + \frac{1}{\lambda} (V \cdot y(x) - y^2(x)) + C = 0,$$

где константа для инвариантного решения равна $(2500\lambda^3)^{-1}(-36\varepsilon^8 + 625\lambda^2\varepsilon^2)$.

На фазовой плоскости (y, p) , где $p = y'$ это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -\frac{\varepsilon^2}{\lambda} p - \frac{1}{\lambda} (V \cdot y(x) - y^2(x)) + C. \end{cases} \quad (1)$$

Особые точки динамической системы (1) равны $(50\lambda)^{-1}(V\lambda \pm 6\varepsilon^4)$; при $C = 0$ это 0 и V . Тип этих особых точек находится через характеристические квадратные уравнения для линеаризаций системы (1) в окрестности этих точек. Так, в точке $(0,0)$ имеем для $\varepsilon = 0.1, \lambda = 0.01, V = 3$:

$$k^2 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} k + \frac{V}{\lambda} = 0, \quad k \approx -0.5 \pm 17.3i$$

– устойчивый фокус, а в $(V,0)$

$$k^2 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} k - \frac{V}{\lambda} = 0, \quad k_1 \approx 16.8, k_2 \approx -17.8$$

– седло.

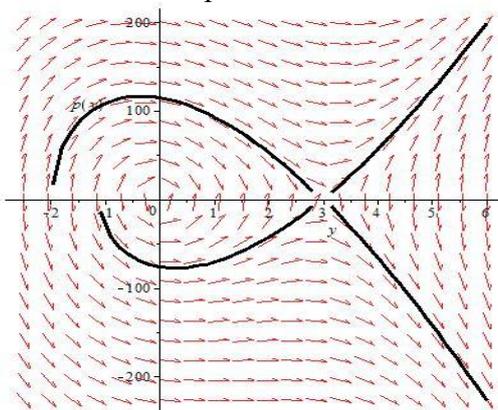
Аналитическое решение (1) является сепаратрисой, внутри которой находятся ограниченные траектории (единственно физически важные!).

Другой подход к понижению степени уравнения дает сходный вид фазовых портретов.

Вследствие автономности дифференциального уравнения можно положить $p = p(y)$, и

$$p(y) \cdot \frac{d}{dy}(p(y)) + \frac{\varepsilon^2}{\lambda} p(y) = \frac{1}{\lambda} (y^2 - V \cdot y) \tag{2}$$

Рассмотрим еще несколько характерных примеров фазовых портретов в зависимости от



Возьмем $\varepsilon = 0,1$, $\lambda = 0,001$, $V = 3$. При линеаризации уравнения имеем особую точку типа фокус. Корни соответствующего характеристического уравнения примерно равны $-5 \pm 54,5i$.

В окрестностях особых точек 0 и 3 интегральные кривые уравнения (2) на поле направлений выглядят следующим образом (рис. 2).

Нелинейность исследуемого уравнения (1) дает интересное поведение решения. На графике видим кратковременную стабилизацию решения

на уровне $y = 3$, а затем затухание

Рис. 2. Фазовый портрет. $\varepsilon = 0,1$, $\lambda = 0,001$, $V = 3$ (рис. 3).

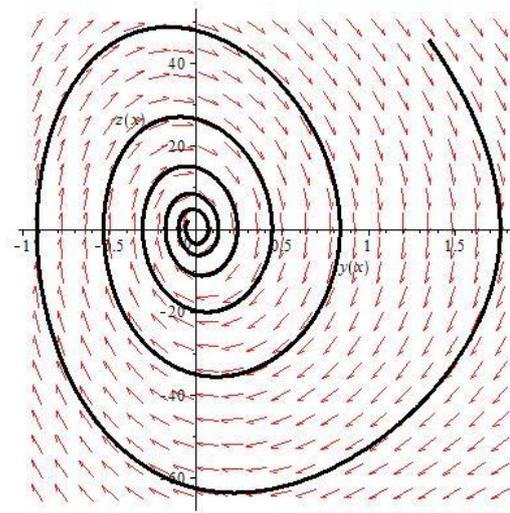
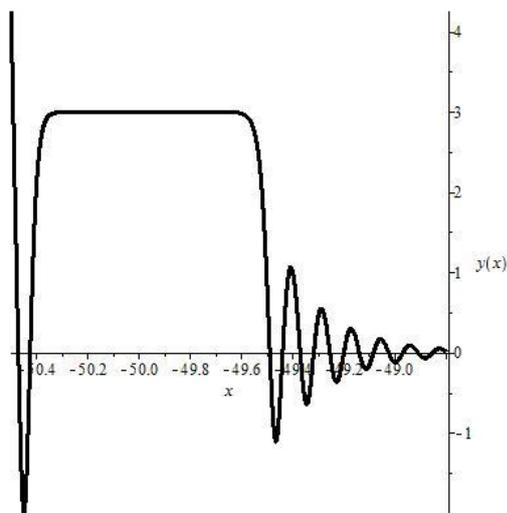


Рис. 4. Устойчивый фокус. $\varepsilon = 0,1$, $\lambda = 0,001$, $V = 3$

Рис. 3. Особая точка типа фокус

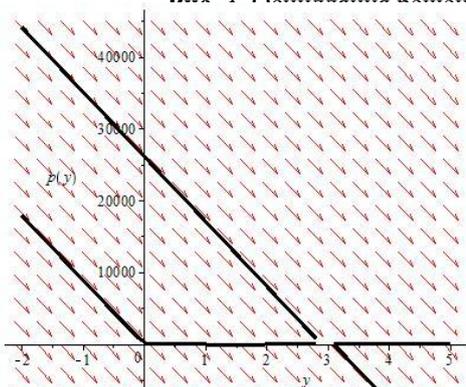


Рис. 5. Фазовый портрет. $\varepsilon = 0,3$, $\lambda = 0,00001$, $V = 3$

Соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 4.

Ситуация кардинально меняется в случае особой точки типа узел. Возьмем теперь $\varepsilon = 0,3$, $\lambda = 0,00001$, $V = 3$. Корни характеристического уравнения в этом случае примерно равны -30 и -9000 .

Поведение решения уравнения (2) в окрестностях особых точек 0 и 3 меняется, что проиллюстрировано на рис. 5.

Поведение решения уравнения (1) теперь не имеет колебаний, однако имеется и схожесть в процессе затухания. Особенно интересно сохранение промежуточного стабилизации решения на уровне $y = 3$, как и в предыдущем случае.

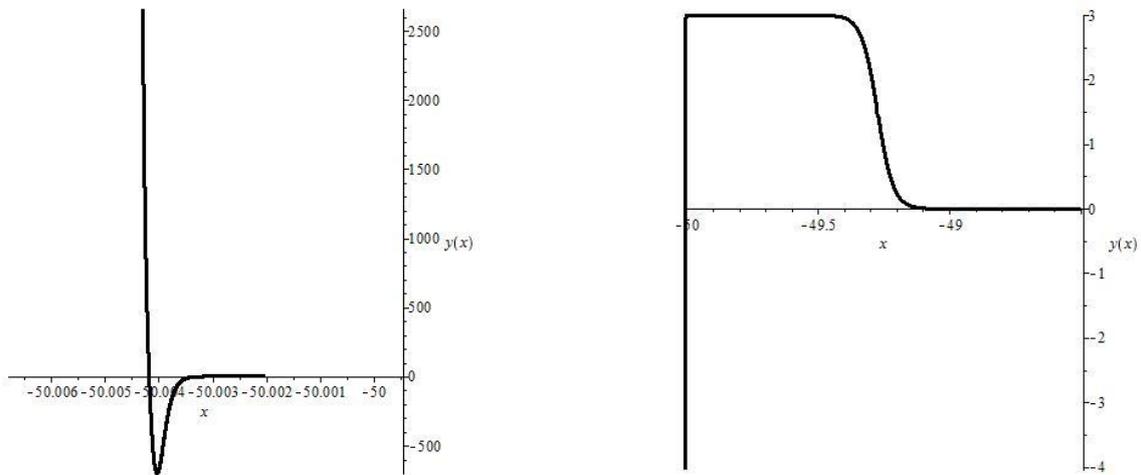


Рис. 6. Поведение решения вблизи особой точки типа узел

Фазовый портрет имеет тот вид (с учетом масштаба и нелинейности), который и должен иметь в случае особой точки типа узел (рис. 6, 7).

Ударные волны, соответствующие галилеево-инвариантным решениям, экспериментально наблюдаются в плазме [1], где носят название «бесстолкновительных» (в том смысле, что диссипация обусловлена не столкновениями частиц, а иными механизмами). К ним относятся ионно-звуковые и магнито-звуковые ударные волны, которые были исследованы Р.З. Сагдеевым еще в 1960-х годах. Кроме того, ударные электромагнитные волны с осциллирующими фронтами наблюдаются в нелинейных линиях передачи. При этом частота осцилляций бывает очень велика. То есть, если подать на вход такой линии высоковольтный импульс напряжения без высокочастотных составляющих, по мере распространения он будет постепенно преобразовываться в радиоимпульс. На основе этого принципа разрабатываются генераторы коротких высокочастотных импульсов; реализованы генераторы импульсов наносекундной длительности с пиковой мощностью порядка сотен МВт и частотой более 1 ГГц.

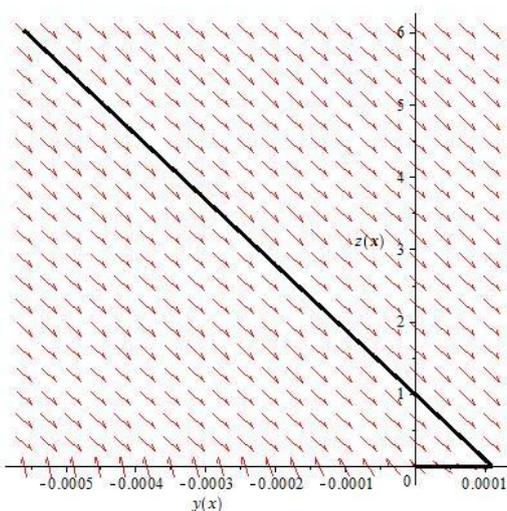


Рис. 7. Узел. $\varepsilon = 0,3$, $\lambda = 0,00001$, $V = 3$

сотен МВт и частотой более 1 ГГц.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим следующие условия для уравнения КдВ-Бюргера (3) при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0.1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - 2u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \lambda \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) \quad (3)$$

В этом случае стационарные решения уравнения (3) будут выглядеть следующим образом. Параметр K соответствует скорости волны, а C – смещению вдоль оси x .

$$u_1(x, t) = 0,6 \cdot th(Kt - x + C)^2 + 1,2 \cdot th(Kt - x + C) - 0,6 + 0,5K$$

$$u_2(x, t) = 0,6 \cdot th(Kt + x + C)^2 - 1,2 \cdot th(Kt + x + C) - 0,6 - 0,5K$$

Далее рассмотрим две волны L_1 и L_2 , заданные условиями

$$L_1 = u_2|_{K=-5, C=-5}, \quad L_2 = u_2|_{K=-2, C=-10}$$

Решение уравнения (3) будем искать при следующих граничных и начальных условиях:

$$u(x, 0) = (L_1 + L_2)|_{t=0}, \quad u(0, t) = (L_1 + L_2)|_{x=0}, \quad u'_x(0, t) = (L_1 + L_2)'|_{x=0}, \quad u'_x(35, t) = (L_1 + L_2)'|_{x=35}$$

Эта ситуация описывает случай, когда одна волна догоняет другую волну. Отметим появление «каблочки» при наложении одной волны на другую, что показано на следующих рисунках. Сначала имеем монотонное убывание функции (рис. 8).

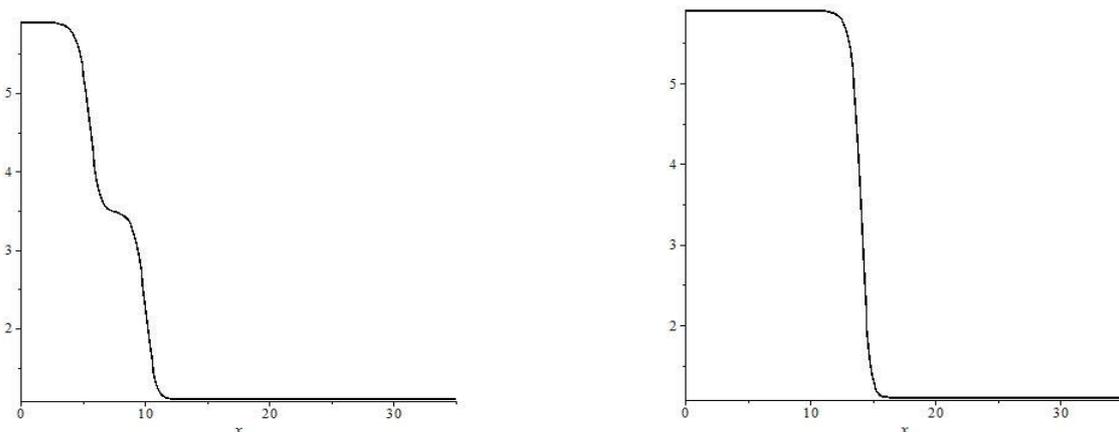


Рис. 8. Суперпозиция волн (волны вдогон). $t = 0,1$ (слева) и $t = 1$ (справа)

Затем, в некоторый момент времени, начинает зарождаться упомянутый нами «каблук» (рис. 9).

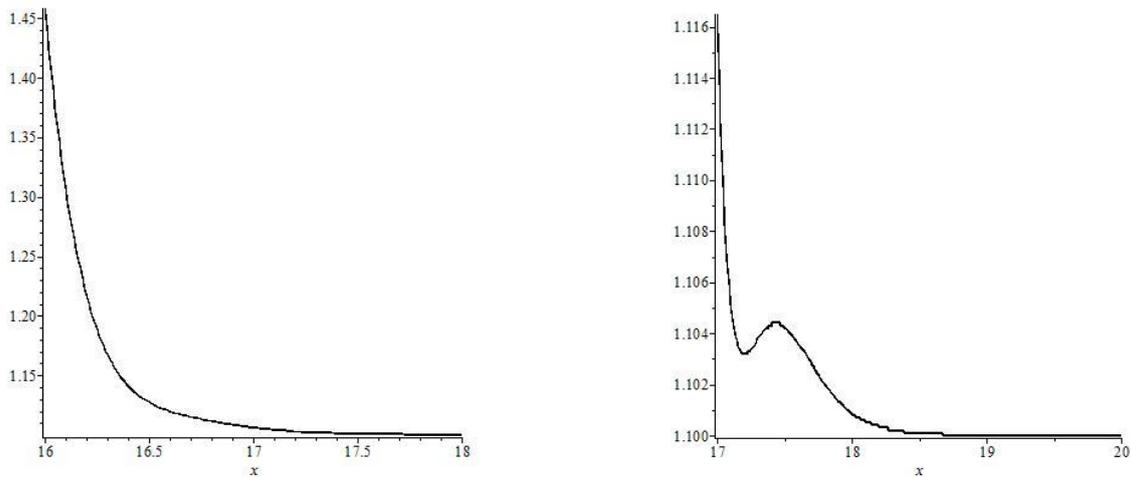


Рис. 9. Суперпозиция волн (волны вдогон). $t = 1,2$ (слева) и $t = 1,3$ (справа)

После этого «каблучок» увеличивается, достигает своего максимального размера (рис. 10) и при дальнейшем увеличении времени исчезает.

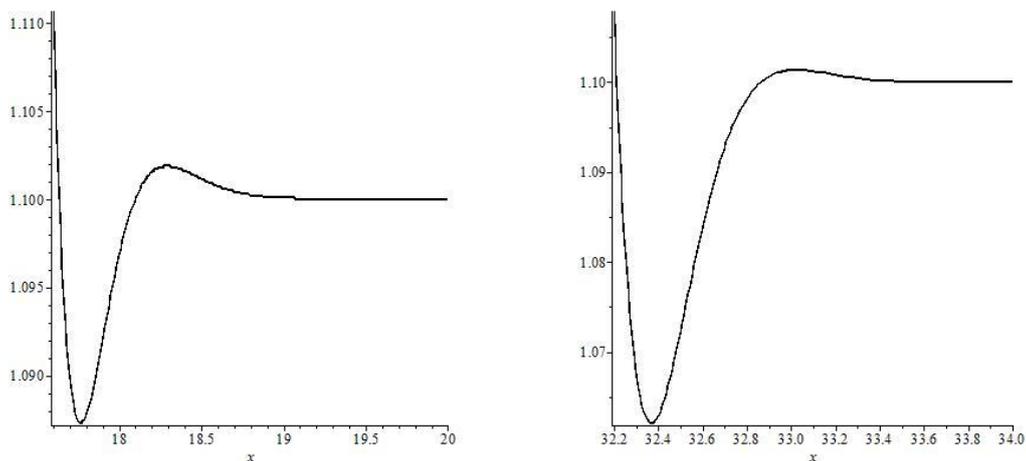


Рис. 10. Суперпозиция волн (волны вдогон). $t = 1,4$ (слева) и $t = 3,5$ (справа)

Теперь рассмотрим случай встречных волн L_1 и L_2 , заданных условиями

$$L_1 = u_2|_{K=3, C=-5}, \quad L_2 = u_2|_{K=-5, C=-10}.$$

Решение уравнения (3) будем искать при следующих граничных и начальных условиях:

$$u(x,0) = (L_1 + L_2)|_{t=0}, \quad u(0,t) = (L_1 + L_2)|_{x=0}, \quad u'_x(0,t) = (L_1 + L_2)'|_{x=0}, \quad u'_x(50,t) = (L_1 + L_2)'|_{x=50}.$$

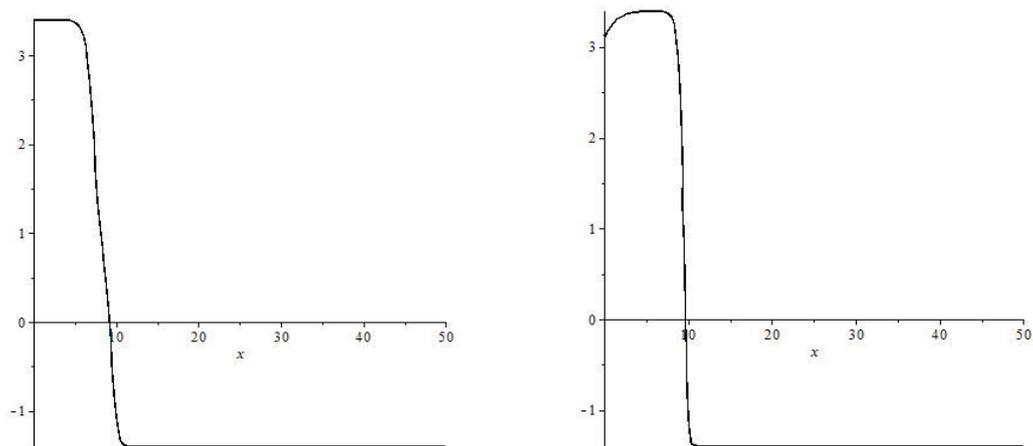


Рис. 11. Суперпозиция волн (соударение). $t = 0,6$ и $t = 1,2$

Сначала решение имеет вид стационарной волны. Затем левый конец волны начинает движение вниз при сохранении остального графика (рис. 11).

Левый конец графика продолжает свое движение вниз до значения 1. При этом внизу графика образуется такой же «каблук», который имел место в предыдущем случае (рис. 12).

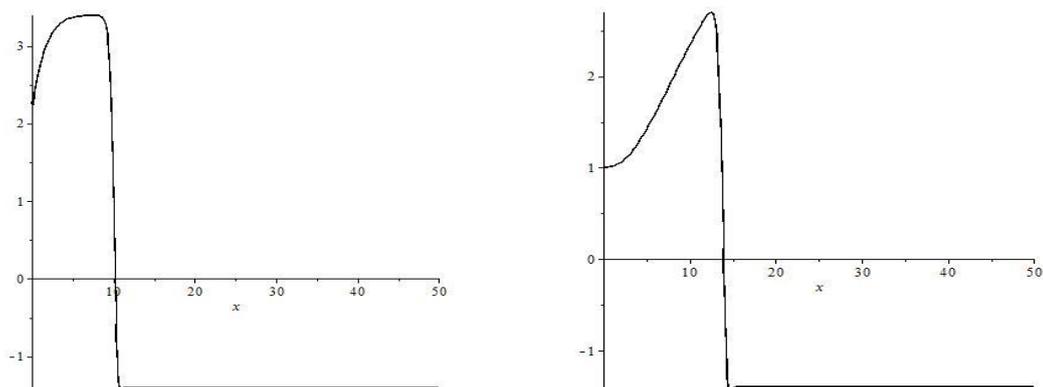


Рис. 12. Суперпозиция волн (соударение). $t = 1,5$ и $t = 3,5$

После достижения левым концом графика значения 1, середина графика начинает движение вниз, образуя «ступеньку». Затем «ступенька» исчезает, и график снова приобретает вид стационарной волны (рис. 13). Одна волна как бы поглотила другую.

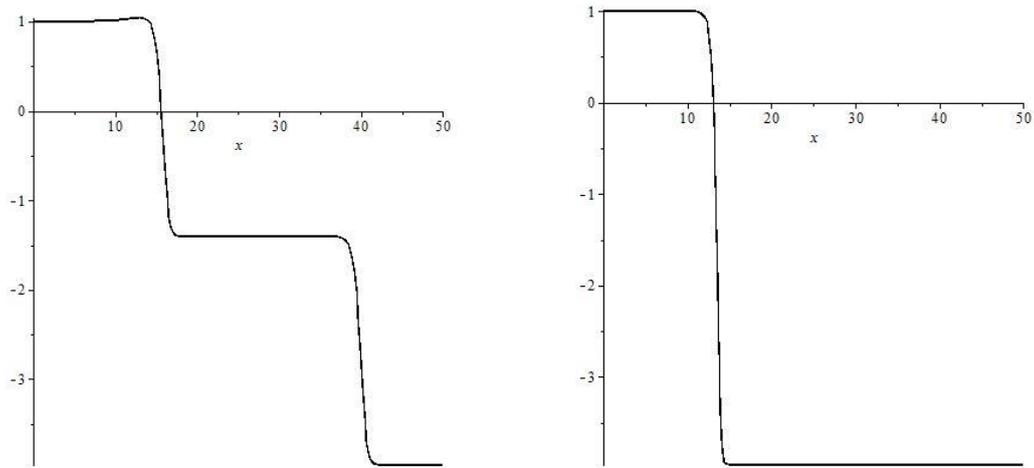


Рис. 13. Суперпозиция волн (соударение). $t = 10$ и $t = 15$. Теперь середина графика движется вниз до минимума

При дальнейшем увеличении времени волна движется влево, сплющивается (рис. 14) и становится (на отрезке) константой.

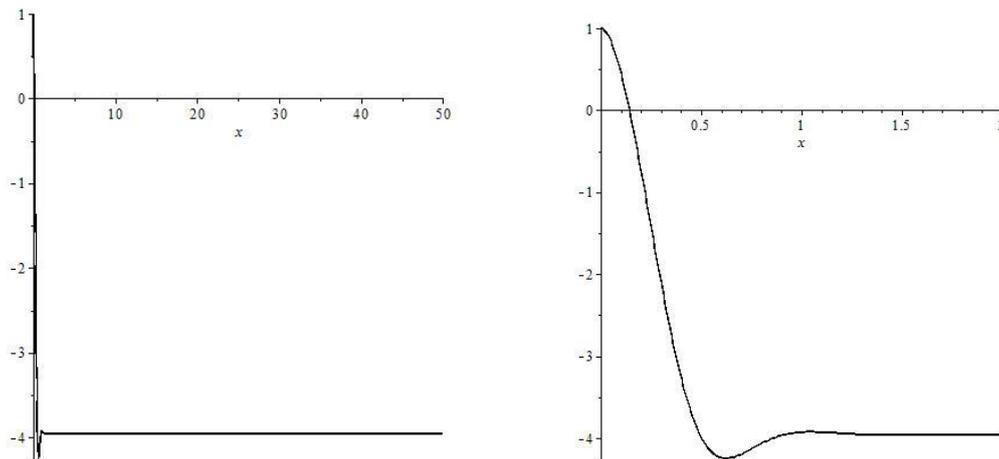


Рис. 14. Суперпозиция волн (соударение). $t = 30$. Затем график движется влево с похожим «каблчком»

Наконец, рассмотрим еще один случай двух сталкивающихся волн L_1 и L_2 .

$$L_1 = u_2|_{K=-3, C=-5}, \quad L_2 = u_2|_{K=5, C=-10}.$$

Решение уравнения (3) будем искать при следующих граничных и начальных условиях:

$$u(x,0) = (L_1 + L_2)|_{t=0}, \quad u(0,t) = (L_1 + L_2)|_{x=0}, \quad u'_x(0,t) = (L_1 + L_2)'|_{x=0}, \quad u'_x(50,t) = (L_1 + L_2)'|_{x=50}.$$

При таком столкновении волн снова одна волна поглощает другую и также появляется небольшой «каблчок» (рис. 15). При увеличении времени «Каблчок» движется справа налево.

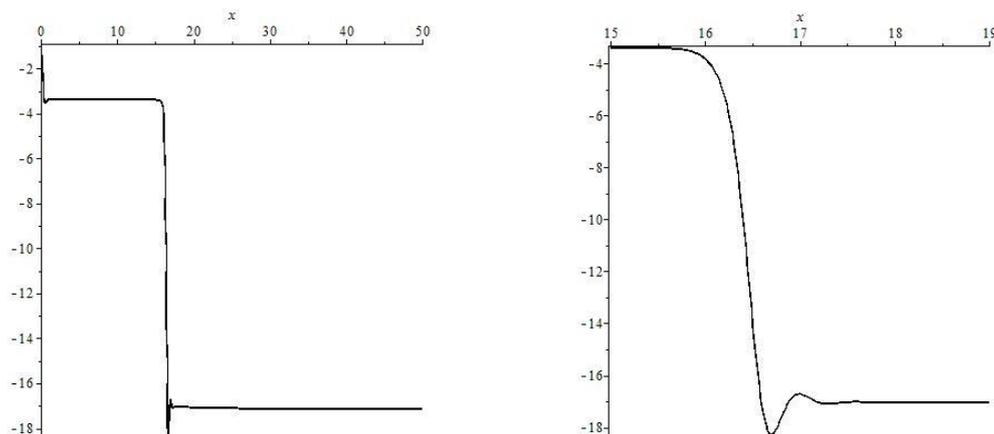


Рис. 15. Суперпозиция волн (соударение). $t = 17$. Справа увеличенная часть левого графика

Затем функция постепенно (рис. 16) превращается в константу и временные колебания исчезают. «Каблучок» сохраняется до исчезновения колебаний.

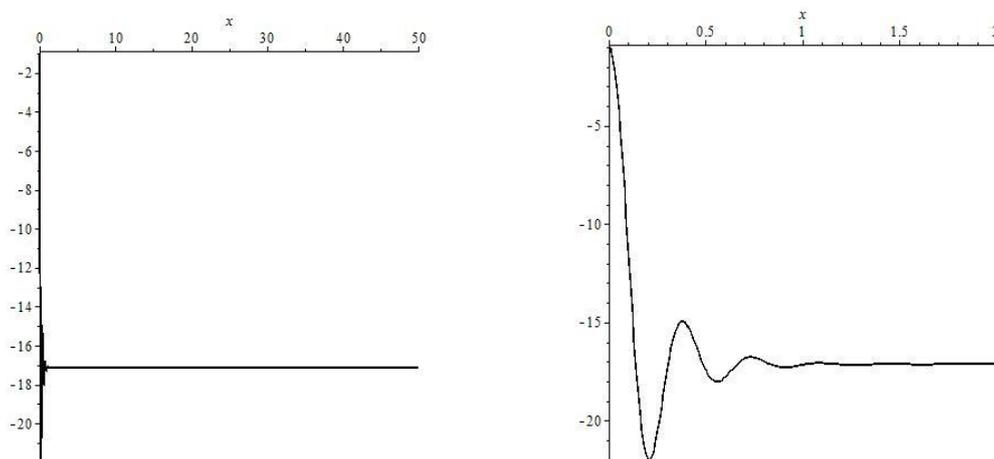


Рис. 16. Суперпозиция волн (соударение). $t = 20$

Более подробный анализ нелинейной суперпозиции будет нами приведен в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны: учеб. пособие для вузов. – М.: Физматлит, 2000. – 272 с.
2. Самохин А.В. Решения уравнения Бюргерса с периодическим возмущением на границе // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 220. – С. 82–87.
3. Dubrovin B., Elaeva M. On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity // ArXiv: 1301.7216v1math-ph., 30.01.2013, 16 p.
4. Dubrovin B., Grava T. and Klein C. Numerical study of breakup in generalized Korteweg de Vries and Kawahara equations // Siam J. Appl. Math. Vol. 71. No. 4 (2011). Pp. 983–1008.

GALILEAN SYMMETRY INVARIANT SOLUTIONS TO THE KDV-BURGERS EQUATION AND NONLINEAR SUPERPOSITION OF SHOCK WAVES

Dementyev Y.I., Samokhin A.V.

A description of the Galilean symmetry invariant solutions to the KdV-Burgers equation is reduced to studying of phase trajectories of the corresponding ODE depending on a parameter (the velocity of a shock wave propagation). Exact invariant solutions are simple shock waves that become separatrices on the phase portrait which always has two singular points for a given value of the parameter. For nonlinear superposition of shock waves the phase portrait contains four singular points; its consequent bifurcations lead to oscillations.

Key words: Galilean symmetry invariant solutions, KdV-Burgers equation, nonlinear superposition of shock waves.

REFERENCES

1. **Ryskin N.M., Trubetskov D.I.** Nonlinear waves. Moscow: Fizmatlit. 2000. 272 p. (in Russian).
2. **Samokhin A.V.** Solutions to the Burgers equation with a periodic perturbation on the boundary. Scientific Herald of MSTUCA. No. 220. 2015. Pp. 82–87. (in Russian).
3. **Dubrovин B., Elaeva M.** On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. ArXiv: 1301.7216v1math-ph., 30.01.2013, 16 p.
4. **Dubrovин B., Grava T. and Clein C.** Numerical study of breakup in generalized Korteweg de Vries and Kawahara equations. Siam J. Appl. Math. Vol. 71. No. 4. 2011. Pp. 983–1008.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Самохин Алексей Васильевич, 1947 г.р., окончил МГУ (1971), доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 42 научных работ, область научных интересов – уравнения математической физики, симметрии, законы сохранения, электронный адрес: samohinalexey@gmail.com.

Дементьев Юрий Игоревич, 1976 г.р., окончил МГУ (1998), кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики МГТУ ГА, автор 31 научной работы, область научных интересов – устойчивость дифференциальных уравнений, электронный адрес: yidem@mail.ru.