УДК 519.217.4 + 519.633.2

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА[1]

К.А. РЫБАКОВ

В статье рассматривается решение задач оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналовв нестационарных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решений робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера в виде ортогональных рядов.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, фильтрация, прогнозирование, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова – Феллера.

ВВЕДЕНИЕ

В продолжение исследований, начатых в [1–4], рассматриваются задачи оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналов в стохастических дифференциальных системах диффузионно-скачкообразного типа. В этих задачах требуется оценить вектор состояния динамической системы (объекта наблюдения) в текущий и будущий моменты времени по результатам измерений, полученных к текущему моменту времени, с учетом помех. Предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей, а измерительная система – стохастическим дифференциальным уравнением без пуассоновской составляющей. На этапе фильтрации предлагается использовать робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, а на этапе прогнозирования – уравнение Колмогорова – Феллера. Для решения этих уравнений применена спектральная форма математического описания [5, 6]. Такой подход более универсален по сравнению с другими подходами, использующими математический аппарат ортогональных рядов для представления плотностей вероятности [7–10]. В задачах анализа, синтеза, идентификации и фильтрации в стохастических дифференциальных системах его универсальность и удобство реализации алгоритмов расчета обусловлены тем, что ортонормированный базис не фиксируется и все соотношения записываются в матричной форме, вид этих соотношений не зависит от базиса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель объекта наблюдения задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [3, 4, 7, 11, 12]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ – время; $f(t,x)$: $[t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \to R^n$ – n-мерная вектор-функция, $\sigma(t,x)$: $[t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \to R^{n \times s}$ – матричная функция $n \times s$; $\Delta(t)$: $[t_0, T] \to [0, +\infty)$ – опережение по времени: $\max\limits_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T)$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 с плотностью вероят-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-08-00323-а.

ности $\varphi_0(x)$; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный соотношением $Q(t)=\sum_{k=1}^{P(t)}\Delta_k$, в котором $P(t)$ – пуассоновский процесс, Δ_k – независимые случайные векторы из R^n, распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k,\Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1,\tau_2,\ldots\in[t_0,T+\Delta(T)]$, образующие пуассоновский поток событий: $X(\tau_k)=X(\tau_k-0)+\Delta_k$. Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k-0)=x$. В частном случае $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)=\psi(\tau_k,\Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k,x\,|\,\xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k-0)=\xi$, т.е. $\Delta_k=X(\tau_k)-\xi$. Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени $\tau_1,\tau_2,\ldots$, а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t,x)$.

Модель измерительной системы задается уравнением

$$dY(t)=c(t,X(t))dt+\zeta(t)dV(t),\quad Y(t_0)=Y_0=0, \tag{2}$$

где $Y\in R^m$ – вектор измерений, $t\in[t_0,T]$; $c(t,x)$: $[t_0,T]\times R^n\to R^m$ – m-мерная вектор-функция, $\zeta(t)$: $[t_0,T]\to R^{m\times d}$ – матричная функция $m\times d$; $V(t)$ – d-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0.

Задачи фильтрации и прогнозирования состоят в нахождении оценки $\hat X(t+\Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t=\{Y(\tau),\tau\in[t_0,t)\}$, для случая $\Delta(t)=0$ – это задача фильтрации, а для $\Delta(t)>0$ – задача прогнозирования. При решении задач фильтрации и прогнозирования, как и ранее [1–4, 12, 13], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда $\hat X(t+\Delta(t))=\mathbb{M}[X(t+\Delta(t))\,|\,Y_0^t]$, где $\mathbb{M}[\,\cdot\,]$ – математическое ожидание.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе определим апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения с учетом имеющихся измерений Y_0^t, используя уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи [3, 9–12]:

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt}=\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)-\lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi+\\+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}c_\alpha(t,x)q_{\alpha\beta}(t)\frac{dY_\beta(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x),\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}c_\alpha(t,x)q_{\alpha\beta}(t)c_\beta(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad q^{-1}(t)=\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t),$$

$$\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial[f_i(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)]}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)]}{\partial x_i\partial x_j},\quad g(t,x)=\sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x).$$

Уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи – стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, его можно записывать в разных формах (приведенное уравнение записано в форме Стратоновича). Оно содержит процесс типа белого шума в последних слагаемых или траекторию белого шума при фиксированных измерениях, что вносит дополнительные сложности в применении приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений, например, спектральных методов, основанных на ортогональных разложениях плотности вероятности.

Пусть $h(t,x) = q(t)c(t,x)$, $h(t,x)$ – m-мерная вектор-функция. Тогда уравнение (3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt} = \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)c_\alpha(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

и с помощью замены

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) = \mu^{-1}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad \mu(t,x) = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\right\}, \tag{4}$$

перейти к робастному уравнению Дункана – Мортенсена – Закаи [4, 12] для ненормированной апостериорной плотности $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, вообще говоря, характеризующей распределение вектора состояния другой стохастической системы, отличной от (1):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t) + \\ +\int_{R^n} \lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m}(h_\alpha(t,\xi) - h_\alpha(t,x))Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi - \\ -\sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t).\end{gathered} \tag{5}$$

В уравнении (5) $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{A}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{A}_\beta] = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{A}]]$, а $[\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{A}]$ и $[\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{A}_\beta]$ – коммутаторы, $\mathcal{H}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $h_\alpha(t,x)$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0,x) = \varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (4) при $t = t_0$ с учетом равенства $Y(t_0) = 0$.

Робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не содержит процессов типа белого шума или их траекторий, т.е. оно не относится к классу стохастических дифференциальных уравнений, оно удобнее для приближенного решения с помощью различных методов, в том числе и спектрального [1–4].

Уравнение (5) должно решаться на промежутке $[t_0,\theta]$, где $\theta \in [t_0,T]$ – текущее время. Переход от функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения осуществляется за два шага: обратная замена и нормировка, т.е.

$$\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\mu(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t),\quad p(t,x\,|\,Y_0^t)=\frac{\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\int_{R^n}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)dx},\quad t\in[t_0,\theta].$$

Отметим, что часто ограничиваются рассмотрением только стационарной модели измерительной системы: $c(t,x)=c(x)$ и $\zeta(t)=\zeta$. Кроме того, для удобства матрица ζ полагается равной единичной матрице, т.е. $h(t,x)=h(x)=c(x)$. При такой постановке задачи робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи проще, оно не содержит последнего слагаемого с производными координат функции $h(t,x)$ по времени [1, 3, 12, 15]. Стационарность модели объекта наблюдения, т.е. $f(t,x)=f(x)$ и $\sigma(t,x)=\sigma(x)$, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не упрощает. Нестационарный случай рассмотрен в [2, 16] для стохастических дифференциальных систем диффузионного типа, а в [4] для систем диффузионно-скачкообразного типа.

На втором этапе в случае $\Delta(\theta)>0$ определяется апостериорная плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^\theta)$ как решение уравнения Колмогорова – Феллера

$$\frac{\partial p(t,x\,|\,Y_0^\theta)}{\partial t}=\mathcal{A}p(t,x\,|\,Y_0^\theta)-\lambda(t,x)p(t,x\,|\,Y_0^\theta)+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)p(t,\xi\,|\,Y_0^\theta)d\xi \tag{6}$$

на промежутке $[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ – апостериорной плотностью вероятности вектора состояния, полученной на первом этапе.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

В [2] спектральный метод был применен к решению робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи, соответствующего нестационарной системе наблюдения диффузионного типа, т.е. без пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения, а в [3] – для стационарной системы наблюдения диффузионно-скачкообразного типа. Эти результаты были использованы для решения задачи фильтрации в нестационарных системах наблюдения диффузионно-скачкообразного типа [4]. Используя соотношения спектрального метода для решения задачи анализа стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа [11, 17], можно построить спектральный метод решения задач фильтрации и прогнозирования сигналов для нестационарных систем наблюдения диффузионно-скачкообразного типа.

Определения и основные свойства спектральных характеристик функций, линейных операторов и функционалов, используемые далее, а также многочисленные примеры применения спектрального метода в задачах анализа непрерывных стохастических систем приведены в [5].

Далее определим базисные системы и получим спектральные аналоги уравнений (5) и (6) в предположении, что момент времени θ зафиксирован. Пусть $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ и $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированные базисные системы пространств $L_2([t_0,\theta]\times R^n)$ и $L_2([\theta,\theta+\Delta(\theta)]\times R^n)$, причем функции $e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ и $e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисные системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2([t_0,\theta])$, $L_2([\theta,\theta+\Delta(\theta)])$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно:

$$e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)=q^{(\text{ф})}(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x),\quad e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)=q^{(\text{п})}(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x).$$

Будем придерживаться обозначений из [2, 4, 5, 11, 17]. Тогда $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент t_0, $A(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов $\mathcal{C}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\alpha$ соответственно, где $\mathcal{C}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $c_\alpha(t,x)$, $\alpha=1,2,\ldots,m$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}]=A(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha]=C_\alpha(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{H}_\alpha]=H_\alpha(n+1,n+1).$$

Перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом, спектральные характеристики $L(n+1,n+1)$, $L_\alpha(n+1,n+1)$ и $L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)$ операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ соответственно, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$, определенные относительно той же базисной системы, выражаются через спектральные характеристики $A(n+1,n+1)$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}[\mathcal{L}]=L(n+1,n+1)=A(n+1,n+1)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}H_\alpha(n+1,n+1)\cdot C_\alpha(n+1,n+1),\\
&\mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha]=L_\alpha(n+1,n+1)=[H_\alpha(n+1,n+1),A(n+1,n+1)],\\
&\mathbb{S}[\mathcal{L}_{\alpha\beta}]=L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)=\frac{1}{2}[H_\alpha(n+1,n+1),[H_\beta(n+1,n+1),A(n+1,n+1)]],
\end{aligned}$$

где $[H_\alpha(n+1,n+1),A(n+1,n+1)]$ – коммутатор спектральных характеристик линейных операторов [1].

Далее, $\Lambda(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t,x)$, а $H(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика интегрального оператора $\mathcal{H}$, задаваемого соотношением

$$\mathcal{H}\rho(t,x)=\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m}(h_\alpha(t,\xi)-h_\alpha(t,x))Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,\xi)d\xi;$$

$Y_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$, $\dot H_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на производную функции $h_\alpha(t,x)$ по времени, $\alpha=1,2,\ldots,m$. Спектральные характеристики $\Lambda(n+1,n+1)$, $H(n+1,n+1)$, $Y_\alpha(n+1,n+1)$ и $\dot H_\alpha(n+1,n+1)$, как и обозначенные выше, определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Кроме того, пусть $q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=t_0$: $q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)=[\,q^{(\text{ф})}(0,t_0)\;\; q^{(\text{ф})}(1,t_0)\;\; q^{(\text{ф})}(2,t_0)\;\;\ldots]^{\mathrm{T}}$, $\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $R(n+1,0)$ – искомая спектральная характеристика функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (5). Учитывая линейность спектрального преобразования и введенные обозначения, получаем спектральный аналог робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи [4]:

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=L(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-\Lambda(n+1,n+1)\times \\ \times R(n+1,0)+H(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)+ \\ +\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)- \\ -\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0). \end{gathered} \tag{7}$$

Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в спектральной форме математического описания имеет вид

$$\begin{gathered} R(n+1,0)=\Big(P(n+1,n+1)-L(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)+ \\ +\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)+ \\ +\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\Big(q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\Big). \end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \rho(t,x\,|\,Y_0^t)=\mathbb{S}^{-1}[R(n+1,0)]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}r_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in[t_0,\theta]\times R^n, \\ \rho(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}r_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,\theta,x),\quad x\in R^n, \end{gathered} \tag{8}$$

где $r_{i_0i_1\ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $R(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Для записи спектрального аналога уравнения Колмогорова – Феллера (6) обозначим через $q^{(\text{п})}(1,0;\theta)$ матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta$: $q^{(\text{п})}(1,0;\theta)=[\,q^{(\text{п})}(0,\theta)\;\;q^{(\text{п})}(1,\theta)\;\;q^{(\text{п})}(2,\theta)\;\;\ldots]^{\mathrm{T}}$, через $\Phi(n+1,0)$ – спектральную характеристику функции $p(t,x\,|\,Y_0^t)$, которую требуется найти наряду с $R(n+1,0)$, а через $K(n+1,n+1)$ – спектральную характеристику интегрального оператора $\mathcal{K}$, задаваемого соотношением

$$\mathcal{K}p(t,x)=\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\,p(t,\xi)\,d\xi.$$

Новые спектральные характеристики $\Phi(n+1,0)$ и $K(n+1,n+1)$ определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Кроме того, пусть $\Phi_\theta(n,0)$ – спектральная характеристика апостериорной плотности вероятности $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ как функции вектора состояния, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда [11, 17]

$$
\begin{gathered}
P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-q^{(\text{п})}(1,0;\theta)\otimes\Phi_\theta(n,0)=A(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-\\
-\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)+K(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)
\end{gathered}
\tag{9}
$$

и

$$
\begin{gathered}
\Phi(n+1,0)=\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)-\\
-K(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\Big(q^{(\text{п})}(1,0;\theta)\otimes\Phi_\theta(n,0)\Big).
\end{gathered}
$$

В уравнении (9) $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в текущий момент θ (начальный для промежутка $[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$). Как и выше, $A(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $\Lambda(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t,x)$, однако для этого уравнения перечисленные спектральные характеристики вычисляются относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, а не $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом,

$$
p(t,x\,|\,Y_0^\theta)=\mathbb{S}^{-1}[\Phi(n+1,0)]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in[\theta,\theta+\Delta(\theta)]\times R^n, \tag{10}
$$

где $\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $p(t,x\,|\,Y_0^\theta)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Используя спектральную форму математического описания, можно выразить спектральные характеристики $R(n+1,0)$ и $\Phi_\theta(n,0)$ функций $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ и $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ соответственно, связав таким образом уравнения (7) и (9) в спектральной области. Также можно выразить спектральную характеристику оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ через спектральную характеристику $\Phi(n+1,0)$. Для этого необходимо использовать спектральные характеристики линейных функционалов, ставящих в соответствие функции ее значение в определенной точке и значение интеграла от функции [5], а именно можно показать, что

$$
\begin{gathered}
\Phi_\theta(n,0)=\Big(\Big(q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)\otimes J(0,n)\Big)\cdot\Psi(n+1,0)\Big)^{-1}\cdot\Big(\Big(q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)\otimes E(n,n)\Big)\cdot\Psi(n+1,0)\Big),\\
\Psi(n+1,0)=M(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0),
\end{gathered}
$$

где $q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)$ – матрица-строка значений функций базисной системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta$: $q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)=[\,q^{(\text{ф})}(0,\theta)\;\; q^{(\text{ф})}(1,\theta)\;\; q^{(\text{ф})}(2,\theta)\;\;\ldots\,]$, $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала, ставящего в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по пространству R^n, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, а

$M(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mu(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Отметим, что спектральные характеристики $H(n+1,n+1)$ и $K(n+1,n+1)$ интегральных операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно связаны преобразованием подобия

$$H(n+1,n+1)=M^{-1}(n+1,n+1)\cdot K(n+1,n+1)\cdot M(n+1,n+1),$$

если они определены относительно одной и той же базисной системы со спектральной характеристикой $M(n+1,n+1)$.

Для координаты оптимальной оценки $\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta))$ справедливо соотношение

$$\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta))=\left(q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta))\otimes J(0,n)\right)\cdot X_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),\quad i=1,\ldots,n,$$

где $q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta))$ – матрица-строка значений функций $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta+\Delta(\theta)$: $q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta))=[\,q^{(\text{п})}(0,\theta+\Delta(\theta))\ q^{(\text{п})}(1,\theta+\Delta(\theta))\ q^{(\text{п})}(2,\theta+\Delta(\theta))\ \ldots],$ $X_i(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на координату x_i, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

При численных расчетах необходимо усекать все спектральные характеристики и представлять приближенное решение задач фильтрации и прогнозирования в виде частичных сумм рядов (8) и (10), как и при решении задачи анализа [5, 11, 17]. Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться различным образом из базисных функций одной переменной [5, 6, 18]. После определения апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^{\theta})$ можно найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$, $t\in[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$, $\theta\in[t_0,T]$ или воспользоваться соотношением для нахождения $\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta))$, которое приведено выше.

В рассматриваемых задачах оптимальной фильтрации и прогнозирования при выводе спектральных аналогов робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера предполагалось, что момент времени θ зафиксирован вместе с измерениями Y_0^{θ}, однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарных отрезках времени [6], что позволит решать задачу оценивания текущего и будущего состояний сразу для всех моментов времени $\theta\in[t_0,T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. – 2013. – Вып. 7 (114). – С. 139–143.

2. **Рыбаков К.А.** О решении робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем // Информационные и телекоммуникационные технологии. – 2014. – № 22. – С. 9–15.

3. **Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для систем диффузионно-скачкообразного типа на основе спектрального метода // Системи обробки інформації. – 2014. – Вып. 7 (123). – С. 143–147.

4. **Рыбаков К.А.** О решении уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем диффузионно-скачкообразного типа спектральным методом // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015. Международная конференция, Новосибирск, 19–23 октября 2015 г.: Тр. конф. – Новосибирск: Абвей, 2015. – С. 643–649.

5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015.

6. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.

7. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990.

8. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.

9. Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L. Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997. Vol. 35, № 2. – Pp. 435 – 461.

10. Luo X., Yau S.S.-T. Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2495–2507.

11. Рыбаков К.А. Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // Научный вестник МГТУ ГА. – 2013. – № 194. – С. 55–62.

12. Рыбаков К.А. Фильтрация сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа на основе метода статистических испытаний // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 220. – С. 73–81.

13. Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. – 2014. – № 207. – С. 54–60.

14. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.

15. Hazewinkel M. Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – Pp. 103–136.

16. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2563–2578.

17. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 1. [Электронный ресурс]. URL: http://jre.cplire.ru/jre/contents.html

18. Рыбаков К.А. Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. – 2013. – № 195 (9). – С. 45–50.

THE SPECTRAL METHOD OF OPTIMAL FILTERING AND EXTRAPOLATION FOR JUMP-DIFFUSION MODELS

Rybakov K.A.

The article deals with the optimal filtering and extrapolation problems for non-stationary stochastic differential systems with a Poisson component. To find an approximate density of the observed object's state vector the spectral method based on the representation of robust Duncan-Mortensen-Zakai equation and Kolmogorov-Feller equation solutions in the form of orthogonal series is used.

Key words: conditional density, extrapolation problem, jump-diffusion, Kolmogorov-Feller equation, filtering problem, robust Duncan-Mortensen-Zakai equation, spectral method, stochastic system.

REFERENCES

1. Rybakov K.A. Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation by spectral method. Information Processing Systems. 2013. No. 7 (114). Pp. 139–143. (in Russian).

2. Rybakov K.A. Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary systems. Information and Communication Technologies. 2014. No. 22. Pp. 9–15. (in Russian).

3. Rybakov K.A. Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for jump-diffusion models by spectral method. Information Processing Systems. 2014. No. 7 (123). Pp. 143–147. (in Russian).

4. Rybakov K.A. The solution of the Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary jump-diffusion systems by spectral method. Proceedings of International Conference “Advanced Mathematics, Computations and Applications 2015”. Novosibirsk. 2015. Pp. 643–649. (in Russian).

5. Panteleev A.V., Rybakov K.A., Sotskova I.L. Spectral Method of Nonlinear Stochastic Control System Analysis. Moscow. 2015. (in Russian).

6. Solodovnikov V.V., Semenov V.V. Spectral Theory of Nonstationary Control Systems. Moscow. 1974. (in Russian).

7. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic Systems: Theory and Applications, World Scientific. 2001.

8. Sinitsyn I.N. Kalman and Pugachev Filters. Moscow. 2007. (in Russian).

9. Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L. Nonlinear filtering revisited: A spectral approach. SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. Vol. 35. No. 2. Pp. 435–461.

10. Luo X., Yau S.S.-T. Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems. IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2495–2507.

11. Rybakov K.A. Probability analysis of stochastic systems with Poisson component. Scientific Herald MSTUCA. 2013. No. 194. Pp. 55–62. (in Russian).

12. Rybakov K.A. Filtering for jump-diffusion models by statistical modeling method. Scientific Herald MSTUCA. 2015. No. 220. Pp. 73–81. (in Russian).

13. Rybakov K.A. Approximate filter for jump-diffusion models. Scientific Herald MSTUCA. 2014. No. 207. Pp. 54–60. (in Russian).

14. Paraev Yu.I. Introduction to Statistical Dynamics of Control and Filtering Processes. Moscow. 1976. (in Russian).

15. Hazewinkel M. Lectures on linear and nonlinear filtering, Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). Springer-Verlag. 1988. Pp. 103–136.

16. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory. IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2563–2578.

17. Averina T.A., Rybakov K.A. New methods of Poisson impulses analysis in radio engineering problems. Journal of Radio Electronics. 2013. No. 1. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/contents.html. (in Russian).

18. Rybakov K.A. Multiparameter basis to represent functions in unbounded domains // Scientific Herald MSTUCA. 2013. No. 195. Pp. 45–50. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета «Прикладная математика и физика» МАИ, автор более 100 научных работ. Области научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания, методы моделирования систем управления, электронный адрес: rkoffice@mail.ru.