

УДК 629.053

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА БОРТОВОЙ КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫСОТЫ ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА

Э.А. БОЛЕЛОВ, К.Н. МАТЮХИН, А.В. СБИТНЕВ, С.В. ШАЛУПИН, А.С. ЦИПИЛЕВ

В статье рассматриваются математические модели наблюдаемых процессов датчиков определения высоты полета воздушного судна, вектора состояния и наблюдения в целях постановки задачи комплексирования на основе методов марковской теории оценивания случайных процессов.

Ключевые слова: вектор состояния, вектор наблюдения, бортовая комплексная система, математическая модель.

Введение

Возрастающая интенсивность воздушного движения предъявляет все более жесткие требования по точности и помехоустойчивости определения координат воздушного судна (ВС). Это в первую очередь касается точности и помехоустойчивости в определении высоты полета ВС, особенно на этапах захода на посадки и посадки, полетах в горной местности, полетах на малых высотах.

В статье рассматриваются математические модели наблюдаемых процессов датчиков определения высоты полета ВС (радиовысотомера (РВ), барометрического высотомера (БВ), аппаратуры спутниковой навигационной системы (СНС)), вектора состояния и наблюдения для постановки задачи их комплексирования на основе методов марковской теории оценивания случайных процессов.

Математические модели наблюдаемых процессов

Пусть на интервалах времени $(t_k, t_k + kLT)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, на вход приемного устройства РВ поступает аддитивная смесь полезного сигнала, представляющего собой пачку радиоимпульсов, и шума

$$\xi_{pв}(t) = \sum_{l=1}^L s_L(t, \mathbf{X}(t)) + n_{pв}(t), \quad (1)$$

где $n_{pв}(t)$ – белый гауссовский шум наблюдения РВ, с известными статистическими характеристиками – $M\{n_{pв}(t)\} = 0$ и $M\{n_{pв}(t)n_{pв}(t + \tau)\} = 0,5N_{pв}\delta(\tau)$; t_k – моменты излучения зондирующих импульсов РВ с периодом повторения T ; L – количество импульсов на интервале наблюдения.

Полезный сигнал в (1) можно представить в виде [1; 3]

$$s_L(t, \mathbf{X}(t)) = f\left(t - t_k - (l-1)T - \frac{2h(t)}{c}\right) \{A_c(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + A_s(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t))\}, \quad (2)$$

где $t \in [t_k + (l-1)T, t_k + lT)$, A_c и A_s – квадратурные составляющие амплитуды полезного сигнала; ω_0 – известная частота сигнала; $\varphi(t)$ – случайная фаза сигнала; $h(t)$ – истинная высота полета ВС; $f(\cdot)$ – огибающая принятого полезного сигнала.

Случайные параметры $\varphi(t)$, $h(t)$, $A_c(t)$, $A_s(t)$, входящие в радиосигнал, являются компонентами вектора состояния $\mathbf{X}(t)$.

В частотном диапазоне работы РВ отраженный сигнал формируется в пределах облучаемой площадки мелкомасштабными неоднородностями земной поверхности, которые при описании процесса отражения радиоволн считаются как отдельные независимые элементарные отражатели. Наличие таких отражателей приводит к диффузному отражению зондирующих сигналов, в результате чего формируются широкие диаграммы направленности обратного рассеяния, которые далее полагаются изотропными. Указанный характер отражения радиоволн приводит к флуктуациям амплитуды и фазы сигнала. Анализ экспериментальных данных и расчеты показывают [1], что при малых углах отклонения диаграммы направленности антенны РВ от вертикали и широких диаграммах обратного рассеяния усредненная огибающая отраженного импульса $f(\cdot)$ может быть аппроксимирована функцией вида

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\tau_u} \exp\left\{-0,5\left(\frac{\tau^2}{\tau_u^2} - 1\right)\right\}, \quad \tau \geq 0, \quad (3)$$

где τ_u – длительность зондирующего импульса РВ.

Флуктуации квадратурных составляющих амплитуды полезного сигнала описываются системой дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{cases} \frac{dA_c(t)}{dt} = -\gamma_A A_c(t) + \sqrt{2\gamma_A \sigma_A^2} n_c(t); \\ \frac{dA_s(t)}{dt} = -\gamma_A A_s(t) + \sqrt{2\gamma_A \sigma_A^2} n_s(t), \end{cases} \quad (4)$$

где $n_c(t)$ и $n_s(t)$ – взаимно независимые формирующие стандартные белые гауссовские шумы; γ_A – коэффициент, характеризующий ширину спектра флуктуаций квадратурных составляющих амплитуды полезного сигнала; σ_A^2 – дисперсия флуктуаций квадратурных составляющих амплитуды полезного сигнала.

Случайная фаза в (2) учитывает характер формирования отраженного сигнала, наличие вертикального маневра самолета, характеристики профиля подстилающей поверхности и описывается уравнением [1]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -2 \frac{\omega_0}{c} V_h(t), \quad (5)$$

где $V_h(t)$ – относительная вертикальная скорость ВС.

$$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} = V_h(t); \\ \frac{dV_h(t)}{dt} = a_h(t) + 2\mu\dot{h}_p(t) + \mu^2 h_p(t) - \sqrt{4\mu^3 \sigma_p^2} n_p(t); \\ \frac{da_h(t)}{dt} = -(\alpha + \beta) a_h(t) - \alpha\beta(V_h(t) + \dot{h}_p(t)) + \sqrt{2\alpha^2 \beta \sigma_u^2} n_a(t); \\ \frac{dh_p(t)}{dt} = \dot{h}_p(t); \\ \frac{d\dot{h}_p(t)}{dt} = -2\mu\dot{h}_p(t) - \mu^2 h_p(t) + \sqrt{4\mu^3 \sigma_p^2} n_p(t). \end{cases} \quad (6)$$

Изменения во времени высоты полета определяются флуктуациями траектории полета ВС, а также изменением профиля земной поверхности и могут быть описаны системой дифференциальных уравнений (6) первого порядка [1], где $n_p(t)$ и $n_a(t)$ – взаимно независимые формирующие белые гауссовские шумы; $h_p(t)$ и $\dot{h}_p(t)$ – случайное отклонение рельефа относительно среднего уровня и скорость его изменения; $a_h(t)$ – вертикальное ускорение ВС; σ_p^2 – дисперсия высоты рельефа; σ_u^2 – дисперсия флуктуационной составляющей скорости ветра; $\mu = \frac{W_\Gamma}{\rho}$, W_Γ – горизонтальная скорость ВС; ρ – радиус пространственной корреляции случайного поля рельефа; α – коэффициент, определяемый аэродинамическими характеристиками ВС; $\beta = \frac{W_\Gamma}{L}$, L – размер турбулентности атмосферы.

Выходные сигналы БВ в моменты времени t_k имеют вид [2]

$$\Xi_{\sigma\sigma}(t_k) = k_{\sigma\sigma} h_{\sigma}(t_k) + \zeta(t_k), \quad (7)$$

где $h_{\sigma}(t_k)$ – высота полета ВС относительно начального уровня (уровня моря или уровня аэродрома), причем $h_p(t) = h_{\sigma}(t) - h(t)$; $\zeta(t_k)$ – погрешность измерений БВ; $k_{\sigma\sigma}$ – коэффициент пропорциональности.

Погрешность измерений БВ может быть описана выражением

$$\zeta(t_{k+1}) = \zeta(t_k) + \Delta(t_k)T + \sqrt{\sigma_{\sigma\sigma}^2 \frac{2T}{\theta}} n_{\sigma\sigma}(t_k), \quad (8)$$

где $\Delta(t_k)$ – постоянная составляющая ошибки измерения БВ; $\sigma_{\sigma\sigma}^2$ – дисперсия флуктуационной составляющей ошибки измерения БВ; θ – ширина спектра флуктуаций ошибок измерения.

Математическую модель сигналов на входе приемника СНС можно представить в виде [3]

$$\xi_i(t) = s_i(t) + n_i(t), \quad (9)$$

где $s_i(t)$ – полезный шумоподобный сигнал i -го НКА; $n_i(t)$ – белый гауссовский шум с известными статистическими характеристиками. Полезный сигнал можно записать

$$\begin{aligned} s_i(t) &= s_i[t, \mathfrak{Y}_i(t), \mathbf{Y}_i(t)] = \\ &= A_i g_i(t - \tau_s) \cos[(\omega_i + \Delta\omega_i + \frac{\omega_i}{c} \dot{d}_i)t + \mathfrak{Y}_i(t)\chi + \varphi_i(t)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{Y}_i(t) = [d_i(t), \dot{d}_i(t), \Delta\omega_i(t), \varphi_i(t)]^T$ – вектор радионавигационных параметров от i -го НКА; A_i – амплитуда принимаемого полезного сигнала; $g_i(t)$ – модулирующая псевдослучайная последовательность (ПСП); $\tau_i(t) = \frac{d_i(t)}{c}$ – задержка сигнала от i -го НКА; $d_i(t)$ – псевдодальность по направлению ВС-НКА; c – скорость света; $\dot{d}_i(t) = \frac{dd_i(t)}{dt}$ – радиальная псевдоскорость; ω_i – средняя несущая частота радиосигнала от соответствующего НКА; $\frac{\omega_i}{c} \dot{d}_i(t)$ – доплеровское приращение частоты; $\Delta\omega_i$ – медленный уход несущей частоты радиосигнала за счет технической нестабильности частоты опорного генератора; $\varphi_i(t)$ – случайная фаза сигнала; χ – угол ФМ ($\chi = \pi$ при двоичной ФМ); $\mathfrak{Y}_i(t)$ – информационный дискретный параметр i -го НКА.

В качестве ПСП в сигнале часто используются М-последовательности, коды Голда и т.д. Независимо от вида кода функция $g(t)$ обычно записывается в виде [3; 4]

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N_n-1} v_k \cdot \text{rect}(t - p\tau_u - t_0), \quad (11)$$

где N_n – число элементов ПСП; τ_u – длительность одного элемента ПСП. Кодовые коэффициенты v_k , образующие ПСП, принимают на каждом интервале τ_u значения +1 или -1 согласно закону чередования символов на ее периоде.

Запаздывание радиосигнала на трассе ВС-НКА можно представить

$$\tau_z = \tau_d + \Delta t_{\text{нка}} + \Delta t_{\text{вс}} + \Delta t_{\text{нр}} + \Delta t_u + \Delta t_{\text{мп}} + \Delta t_q,$$

где $\tau_d = \frac{d}{c}$ – задержка сигнала, обусловленная дальностью трассы ВС-НКА; $\Delta t_{\text{нка}}$ и $\Delta t_{\text{вс}}$ – сдвиги шкал времени НКА и ВС относительно системного времени; $\Delta t_{\text{нр}}$ – задержка сигнала за счет неточного прогноза эфемерид; Δt_u и $\Delta t_{\text{мп}}$ – ионосферная и тропосферная задержки сигнала; Δt_q – случайная задержка сигнала, вызванная, например, уходом частоты задающего генератора.

Связь между дальностью ВС-НКА и координатами выражается зависимостью [3; 4]

$$d_i = \left[(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2 + (z_k - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \delta d,$$

где x_k, y_k, z_k, x, y, z – координаты i -го НКА и ВС в прямоугольной гринвичской системе координат; δd – ошибка измерения дальности из-за сдвига шкалы времени на ВС и НКА соответственно.

Выражение (10) описывает сигналы СНС ГЛОНАСС, GPS, а также Galileo, причем в GPS и Galileo используется кодовое разделение сигналов, т. е. сигналы от различных НКА отличаются видом модулирующей ПСП $g(t)$. Сигналы GPS излучаются на частоте $f_0 = 1575$ МГц (L1). Сигналы Galileo будут излучаться на частотах 1575 МГц (L1), 1278 МГц (E6), 1207 МГц, 1176 МГц (E5). В ГЛОНАСС используется частотное разделение сигналов, т.е. сигналы отличаются номинальным значением несущей частоты $\omega_m = 2\pi(f_0 + m\Delta f)$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots, 24$ – номера литеры несущей частоты; $f_0 = 1602$ МГц (L1); $\Delta f = 562,5$ КГц – разнос частот соседних НКА. Использование частотного разделения облегчает защиту системы от помех и предоставляет большую свободу в выборе ПСП. Наряду с этим использование разных передающих частот увеличивает аппаратную сложность многоканального приемника СНС.

Динамика полета ВС с учетом его координат, векторов проекций скоростей на оси гринвичской системы координат может быть описана системой дифференциальных уравнений первого порядка, аналогичных (6)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = V_x(t); & \frac{dV_x(t)}{dt} = a_x(t); \\ \frac{da_x(t)}{dt} = -(\alpha + \beta)a_x(t) - \alpha\beta(V_x(t) + V_{x0}(t)) + \sqrt{2\alpha^2\beta\sigma_x^2}n_x(t); \\ \frac{dV_{x0}(t)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Система уравнений (12) описывает динамику изменения координаты $x(t)$ ВС. Для координаты $y(t)$ система уравнений может быть записана по аналогии. Координата $z(t)$ представляет собой высоту полета ВС над эллипсоидом (ПЗ-90-02 и WGS-84), и в первом приближении может считаться равной барометрической высоте полета ВС.

Кроме этого, уравнения, описывающие флуктуации фазы $\varphi_i(t)$ и уход частоты $\Delta\omega_i$, имеют вид:

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Delta\omega_i - \frac{\omega_i \dot{d}_i}{c} + \sqrt{0,5N_{\varphi_i}} n_{\varphi_i}(t); \quad (13)$$

$$\frac{d\Delta\omega_i(t)}{dt} = -\gamma_{\omega_i} \Delta\omega_i + \sqrt{2\gamma_{\omega_i} \sigma_{\Delta\omega}^2} n_{\Delta\omega_i}(t), \quad (14)$$

где N_{φ_i} – параметр, характеризующий нестабильность частоты задающего генератора НКА; γ_{ω_i} – параметр, определяющий ширину спектра флуктуаций задающего генератора НКА; $n_{\varphi_i}(t)$ и $n_{\Delta\omega_i}(t)$ – взаимно независимые формирующие белые гауссовские шумы.

Математические модели векторов состояния и наблюдения

На основании рассмотренных выше моделей вектор состояния может быть представлен в виде

$$\mathbf{X}(t) = [h(t), V_h(t), a_h(t), h_p(t), \dot{h}_p(t), x(t), y(t), \mathbf{V}(t), \mathbf{V}_0(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{A}(t), \Phi(t), \Delta\omega(t), \Delta(t), \delta d_i]^T, \quad (15)$$

где $\mathbf{V}(t) = [V_x(t), V_y(t)]^T$; $\mathbf{V}_0(t) = [V_{x0}(t), V_{y0}(t)]^T$; $\mathbf{a}(t) = [a_x(t), a_y(t)]^T$; $\mathbf{A}(t) = [A_c(t), A_s(t)]^T$; $\Phi(t) = [\phi_i(t), \varphi(t)]^T$; $\Delta\omega(t) = [\Delta\omega_i(t)]$.

При формировании компонент вектора состояния в первую очередь включаются те параметры, на измерении которых основывается назначение бортовой комплексной системы определения высоты полета ВС. Остальные компоненты, несущественные с точки зрения назначения системы, являются сопутствующими.

Связь векторов $\mathbf{Y}_i(t)$ с вектором состояния $\mathbf{X}(t)$ в общем случае записывается в виде [3; 4]

$$\mathbf{Y}_i(t) = L_i \{ \mathbf{X}(t) \}, \quad (16)$$

где $L_i \{ \}$ – известные в общем случае нелинейные векторные функции. В данном случае функции $L_i \{ \}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} d_i &= L_{di} \{ \mathbf{X}(t) \} = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + \delta d_i; \\ \dot{d}_i &= L_{\dot{d}_i} \{ \mathbf{X}(t) \} = K_{xi} (V_i - W_{xi}) + K_{yi} (V_i - W_{xi}) + K_{zgi} (V_i - W_{zi}); \\ \varphi_i &= L_{\varphi_i} \{ \mathbf{X}(t) \} = \varphi_i, \quad \Delta\omega_{gi} = L_{\Delta\omega_i} \{ \mathbf{X}(t) \} = \Delta\omega_i, \end{aligned} \quad (17)$$

где W_{xi}, W_{yi}, W_{zi} – проекции земной скорости i -го НКА на оси гринвичской СК; $K_{xi} = (x - x_i) / d_i$, $K_{yi} = (y - y_i) / d_i$, $K_{zi} = (z - z_i) / d_i$ – направляющие косинусы.

Динамика изменения компонент вектора состояния во времени может быть описана векторно-матричным дифференциальным стохастическим уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}\mathbf{U}(t) + \mathbf{G}\mathbf{N}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad (18)$$

где $\mathbf{N}(t)$ – вектор формирующих БГШ с известными статистическими характеристиками; $\mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{G}$ – известные матрицы состояния, управления и возмущения соответственно; $\mathbf{U}(t) = [W_{xi}, W_{yi}, W_{zi}]^T F$ – вектор управления, элементами которого являются известные на основе служебной информации проекции земной скорости НКА на оси гринвичской системы координат.

Вектор наблюдения имеет вид

$$\Xi(t) = [\xi_{p\sigma}(t), \Xi_{\sigma\sigma}(t), \xi_i(t)]^T. \quad (19)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский А.П., Оноприенко Е.И., Чижов В.П. *Теоретические основы радиовысотометрии*. М.: Сов. радио, 1979.
2. Бабич О.А. *Обработка информации в навигационных комплексах*. М.: Машиностроение, 1991.
3. *Марковская теория оценивания в радиотехнике* / под ред. М.С. Ярлыкова. М.: Радиотехника, 2004.
4. Ярлыков М.С., Миронов М.А. *Марковская теория оценивания случайных процессов*. М.: Радио и связь, 1993.

**MATHEMATICAL MODEL VECTORS OF STATE AND OBSERVATIONS IN RELATION
TO THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF THE ONBOARD INTEGRATED SYSTEM
OF DEFINITION OF AIRCRAFT ALTITUDE**

Bolelov E.A., Matuhin K.N., Sbitnev A.V., Shalupin S.V., Tsipilev A.S.

The article discusses the mathematical models of the observed sensors processes for determining the height of the flight, of the state vector and observation in order to formulate the problem of the aggregation-based methods of Markov theory to estimate random processes.

Keywords: state vector, surveillance vector, airborne integrated system, mathematical model.

REFERENCES

1. Zhukovskii A.P., Onoprienko E.I., Chizhov V.P. *Teoreticheskie osnovy radiovysotometrii*. М.: Sov. radio. 1979. (In Russian).
2. Babich O.A. *Obrabotka informatsii v navigatsionnykh kompleksakh*. М.: Mashinostroenie. 1991. (In Russian).
3. *Markovskaya teoriya otsenivaniya v radiotekhnike*. Pod red. M.S. Yarlykova. М.: Radiotekhnika. 2004. (In Russian).
4. Yarlykov M.S., Mironov M.A. *Markovskaya teoriya otsenivaniya sluchainykh protsessov*. М.: Radio i svyaz'. 1993. (In Russian).

Сведения об авторах

Болелов Эдуард Анатольевич, 1967 г.р., окончил ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского (1997), доцент, кандидат технических наук, заведующий кафедрой технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушных судов МГТУ ГА, автор 30 научных работ, область научных интересов – эксплуатация сложных технических систем.

Матюхин Константин Николаевич, 1976 г.р., окончил ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского (2005), кандидат технических наук, доцент кафедры основ радиотехники и защиты информации МГТУ ГА, автор 37 научных работ, область научных интересов – эксплуатация сложных технических систем.

Сбитнев Александр Васильевич, 1978 г.р., окончил ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского (2005), кандидат технических наук, доцент кафедры технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта МГТУ ГА, автор 19 научных работ, область научных интересов – эксплуатация сложных технических систем.

Шалупин Степан Владимирович, 1981 г.р., окончил ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского (2003), аспирант МГТУ ГА, автор 4 научных работ, область научных интересов – навигация и УВД.

Ципилев Артур Сергеевич, 1990 г.р., окончил МГТУ ГА (2012), аспирант МГТУ ГА, автор 2 научных работ, область научных интересов – эксплуатация сложных технических систем.