

УДК 629.735.33.014.16:533.662.6

## ВИХРЕВАЯ МОДЕЛЬ КРЫЛА С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВИХРЕВОГО СЛОЯ

Б.Л. АРТАМОНОВ

**Статья представлена доктором технических наук, профессором Ципенко В.Г.**

Рассматривается линейная вихревая модель крыла конечного размаха, представляющая собой плоскую прямоугольную пространственную пелену, покрытую непрерывно распределенным вихревым слоем. Элементами дискретизации пелены являются четырехугольные панели, лежащие на ее поверхности. Созданы метод, алгоритмы и программа расчета трех составляющих вектора индуктивной скорости от произвольно ориентированной прямоугольной площадки, покрытой вихревым слоем, интенсивность которого линейно изменяется по поверхности площадки. Решение получено в элементарных функциях. Численным способом решена задача определения закона циркуляции присоединенных вихрей по размаху крыла и расчета его аэродинамических характеристик, основываясь на принятой вихревой модели и гипотезе плоских сечений.

**Ключевые слова:** крыло, циркуляция, вихревой слой, линейная вихревая модель.

Вихревая модель трапециевидного крыла конечного размаха разрабатывается на основе теории несущей линии и гипотезы плоских сечений с целью создания численного метода расчета его аэродинамических характеристик на основе взятых из эксперимента аэродинамических характеристик профилей. Предлагаемая вихревая модель позволяет избежать особенностей при вычислении индуктивных скоростей как на самой вихревой пелене, так и в контрольных точках поверхности, создающей подъемную силу.

В вихревой теории крыла конечного размаха ключевым является вопрос о выделении особенности при расчете индуктивных скоростей, вызываемых системой вихрей на самой вихревой поверхности. Подробно эта проблема изложена в работе академика Б.Н. Юрьева [1], где анализируются различные численные приемы решения этой задачи как в рамках дискретной, так и в рамках непрерывной модели вихревой пелены. Однако точного решения этой задачи им получено не было.

Практический интерес представляет расчет аэродинамических характеристик крыла в широком диапазоне углов атаки, включающем в себя как до-, так и засрывные режимы обтекания. Решению этой задачи в рамках линейной вихревой модели крыла были посвящены работы Г.Ф. Бурого [2], Г.И. Майкапара [3], Г.В. Каменкова [4], Т.К. Сиразетдинова [5].

В работах [2; 3] задача определения закона распределения циркуляции по размаху крыла решалась методом последовательных приближений в предположении дискретного распределения циркуляции. При такой постановке задачи основное затруднение заключалось в неоднозначности и неустойчивости решения при резком изменении коэффициента подъемной силы профиля на закритических углах атаки. В работах [4; 5] был применен прием разложения закона циркуляции в ряд и сведения задачи к системе линейных уравнений. В этом случае при плавном характере зависимостей коэффициента подъемной силы профиля по углу атаки и циркуляции по размаху крыла уже в первом приближении получаются решения, хорошо совпадающие с экспериментальными данными. Для неплавных законов высокая точность решения не гарантируется.

С.Г. Бурого разработал численный метод расчета распределения подъемной силы по размаху нестреловидного крыла на закритических углах атаки. В соответствии с теорией Прандтля предполагалось, что на концах крыла циркуляция и коэффициент подъемной силы равны нулю. Метод расчета был опробован как на гладких зависимостях  $c_{yp}(\alpha)$ , так и на "обвальных" характеристиках в зоне срыва. На некоторых углах атаки наблюдался расходящийся итерационный процесс, несмотря на применение коэффициента релаксации.

**Общая постановка задачи**

Рассмотрим плоское прямое трапециевидное крыло размахом  $L$ , установленное под углом  $\varphi$  к вектору скорости набегающего невозмущенного потока  $V$ . Расположим крыло вдоль оси  $OZ$  правой декартовой системы координат так, чтобы его середина совпадала с началом координат (рис. 1). Закон изменения хорды такого крыла  $b$  по размаху  $z$  в относительных величинах  $\bar{b} = 2b/L$ ,  $\bar{z} = 2z/L$  будет иметь вид

$$\bar{b}(\bar{z}) = \frac{4}{\lambda(1+\eta)} \left[ 1 - (\eta-1)\bar{z}^2 \right], \quad (1)$$

где  $\eta = \bar{b}(0)/\bar{b}(1)$  – сужение крыла;  $\lambda = L^2/S$  – удлинение крыла;  $S$  – площадь крыла.

Будем предполагать, что сечения крыла образованы профилем, аэродинамические характеристики которого  $c_{yp} = c_{yp}(\alpha)$ ,  $c_{xp} = c_{xp}(\alpha)$  известны и заданы на основе круговой продувки в аэродинамической трубе в диапазоне углов атаки  $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Принимая гипотезу плоских сечений в скоростной системе осей координат, можно записать выражения для аэродинамических сил, действующих на элемент крыла шириной  $dz$ :

$$\begin{aligned} dY_k &= \frac{\rho}{2} [c_{yp}(\alpha) \cos \beta(z) + c_{xp}(\alpha) \sin \beta(z)] W^2(z) b(z) dz; \\ dX_k &= \frac{\rho}{2} [c_{xp}(\alpha) \cos \beta(z) - c_{yp}(\alpha) \sin \beta(z)] W^2(z) b(z) dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W(z) = \sqrt{V^2 + v_y^2(z)}$  – результирующий вектор скорости в сечении крыла;  $v_y$  – вертикальный компонент индуктивной скорости в сечении крыла;  $\beta(z) = \text{Arctg}[v_y(z)/V]$  – угол притекания потока в сечении крыла;  $\alpha$  – угол атаки результирующего вектора скорости в сечении крыла

$$\alpha(z) = \varphi(z) - \beta(z). \quad (3)$$

В отличие от обычно применяемых формул [1], здесь в обоих выражениях (2) присутствуют и коэффициент подъемной силы  $c_{yp}$  и коэффициент сопротивления  $c_{xp}$  профиля. Это позволяет рассчитывать аэродинамические характеристики крыла в широком диапазоне углов атаки, в том числе и за срывом, если известна круговая продувка профиля.

Интегрируя элементарные аэродинамические силы (2) по размаху крыла и переходя к коэффициентам этих сил, получим:

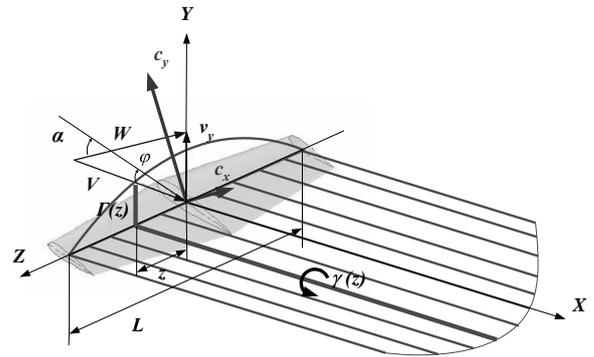
$$\begin{aligned} c_{yк} &= \frac{2}{S} \int_0^1 [c_{yp}(\alpha) \cos \beta(\bar{z}) + c_{xp}(\alpha) \sin \beta(\bar{z})] \bar{W}^2(\bar{z}) \bar{b}(\bar{z}) d\bar{z}; \\ c_{xк} &= \frac{2}{S} \int_0^1 [c_{xp}(\alpha) \cos \beta(\bar{z}) - c_{yp}(\alpha) \sin \beta(\bar{z})] \bar{W}^2(\bar{z}) \bar{b}(\bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (4)$$

где 
$$\bar{W}(\bar{z}) = \sqrt{1 + \bar{v}_y^2(\bar{z})}, \quad \beta(\bar{z}) = \text{Arctg} \left[ \bar{v}_y(\bar{z}) \right]. \quad (5)$$

Запишем уравнение связи циркуляции вектора скорости в сечении крыла с его геометрическими, кинематическими и аэродинамическими характеристиками

$$\bar{\Gamma}(\bar{z}) = \frac{1}{2} c_{yp}(\alpha) \bar{b}(\bar{z}) \bar{W}(\bar{z}). \quad (6)$$

Будем предполагать, что с крыла сходит плоская вихревая пелена, направленная по вектору скорости невозмущенного потока, который набегаем на крыло параллельно оси  $OX$ .



**Рис. 1.** К построению математической модели крыла

Погонная циркуляция вихревой пелены  $\gamma(z)$  изменяется непрерывно вдоль размаха крыла и численно равна градиенту изменения циркуляции по размаху крыла

$$\bar{\gamma}(\bar{z}) = \frac{d}{d\bar{z}} \bar{\Gamma}(\bar{z}). \quad (7)$$

Стремясь получить аналитические выражения для расчета индуктивной скорости в произвольной точке пространства от плоской вихревой пелены, разобьем ее сечениями  $z_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) на отдельные полосы и будем предполагать, что погонная циркуляция непрерывна по поверхности пелены и изменяется в пределах полосы ( $z_i, z_{i+1}$ ) по линейному закону:

$$\bar{\gamma}(\bar{z}) = A\bar{z} + B; \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i+1}; \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (8)$$

где  $A, B$  - коэффициенты, зависящие от значений  $\bar{\gamma}$  на краях полосы:

$$A = \frac{\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i}{z_{i+1} - z_i}; \quad B = \frac{\bar{\gamma}_i z_{i+1} - \bar{\gamma}_{i+1} z_i}{z_{i+1} - z_i}.$$

Отметим, что линейный закон распределения погонной циркуляции вихревого слоя  $\bar{\gamma}(\bar{z})$  равносильно квадратичному закону распределения циркуляции  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  по размаху крыла. Такой прием аппроксимации был впервые предложен профессором А.В. Чесаловым [6].

### Индуктивная скорость, создаваемая вихревой полосой с линейно распределенной погонной циркуляцией

Рассмотрим участок вихревой пелены, расположенный в плоскости  $XOZ$  правой системы осей координат (рис. 2). Положим, что погонная циркуляция вихревого слоя на границах полосы ( $z_i, z_{i+1}$ ) известна и равна ( $\gamma_i, \gamma_{i+1}$ ), а между этими точками изменяется линейно. Вычислим индуктивную скорость  $v$ , создаваемую вихревой полосой в точке  $\mathbf{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$ .

Воспользуемся уравнением Био-Савара, записанным в векторной форме [7]

$$d\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{\Gamma} \times \mathbf{r}}{4\pi|\mathbf{r}|^3}, \quad (9)$$

где  $d\mathbf{\Gamma}$  - вектор-элемент вихря, создающий индуктивную скорость  $d\mathbf{v}$ ;  $\mathbf{r}$  - вектор, соединяющий элемент вихря с точкой, в которой вычисляется индуктивная скорость.

Зададим точку вихревой пелены, из которой исходит вектор-элемент  $d\mathbf{\Gamma}$  радиус-вектором  $\rho = \{x, 0, z\}$ . Тогда, как следует из рис. 2:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \rho = \{x_A - x, y_A, z_A - z\}; \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2 + (z_A - z)^2}. \quad (10)$$

Интенсивность элемента вихря  $d\mathbf{\Gamma}$  вычисляется через погонную циркуляцию вихревого слоя на отрезке  $d\mathbf{S} = \{dx, 0, 0\}$

$$d\mathbf{\Gamma} = \gamma(z)d\mathbf{S}. \quad (11)$$

Записывая интеграл от (9) по всей вихревой полосе, имеем

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \gamma(z) dz \int_S \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (12)$$

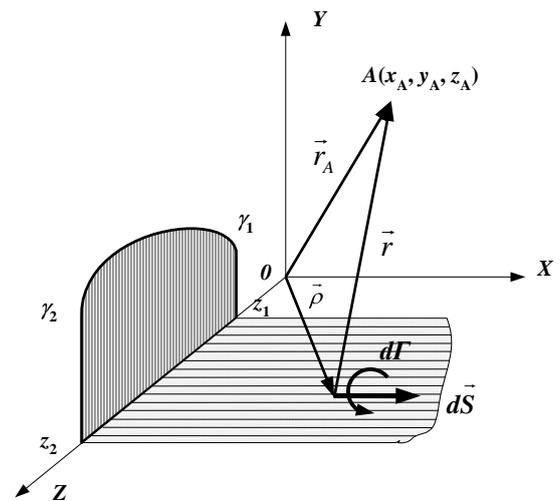


Рис. 2. К расчету индуктивной скорости от вихревой полосы

Раскрывая входящее в (12) векторное произведение и учитывая (10), получим выражение для вектора индуктивной скорости  $\mathbf{v}\{v_x, v_y, v_z\}$  через двойной интеграл по поверхности вихревой пелены. В проекциях на оси координат соотношение (12) распадается на три

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \gamma(z)(z - z_A) dz \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2 + (z_A - z)^2}^{3/2}} \\ v_z = \frac{1}{4\pi} y_A \int_{z_i}^{z_{i+1}} \gamma(z) dz \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2 + (z_A - z)^2}^{3/2}} \end{cases} \quad (13)$$

После интегрирования будем иметь в относительном виде для компонента  $v_y$

$$\begin{aligned} \bar{v}_y = \frac{1}{4\pi} \left\{ A \left[ \bar{x}_A \ln \left| \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_i + Q(\bar{z}_i)}{\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1} + Q(\bar{z}_{i+1})} \right| + \bar{y}_A \left( \arctg \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1}}{\bar{y}_A} - \arctg \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_i}{\bar{y}_A} \right) + (\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i) \right] + \right. \\ \left. + A \text{sign}(\bar{x}_A) \bar{y}_A \left[ \arctg \frac{|\bar{x}_A|(\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1})}{\bar{y}_A Q(\bar{z}_{i+1})} - \arctg \frac{|\bar{x}_A|(\bar{z}_A - \bar{z}_i)}{\bar{y}_A Q(\bar{z}_i)} \right] + (A\bar{z}_A + B) \ln \left| \frac{(Q(\bar{z}_{i+1}) - \bar{x}_A)(Q(\bar{z}_i) - \bar{x}_A)}{(\bar{z}_A - \bar{z}_i)^2 + \bar{y}_A^2} \right| \right\}, \end{aligned}$$

где  $Q(\bar{z}) = \sqrt{(\bar{z}_A - \bar{z})^2 + \bar{x}_A^2 + \bar{y}_A^2}$ .

Особый интерес представляет вычисление индуктивной скорости в плоскости XOZ, где находится вихревая поверхность. Для этого положим в полученном выражении  $\bar{y}_A = 0$ . Эта операция связана с раскрытием неопределенности типа  $0 \times \infty$ , что приводит к выражению

$$\bar{v}_y(\bar{x}_A, \bar{z}_A) = \frac{1}{4\pi} \left\{ A \left[ \bar{x}_A \ln \left| \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_i + Q(\bar{z}_i)}{\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1} + Q(\bar{z}_{i+1})} \right| + (\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i) \right] + (A\bar{z}_A + B) \ln \left| \frac{(Q(\bar{z}_{i+1}) - \bar{x}_A)(Q(\bar{z}_i) - \bar{x}_A)}{(\bar{z}_A - \bar{z}_i)^2 + \bar{y}_A^2} \right| \right\}.$$

Скорости в плоскости начала вихревой пелены находим, полагая  $\bar{x}_A = 0$

$$\bar{v}_{y0}(\bar{z}_A) = \frac{1}{4\pi} \left\{ A(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i) + (A\bar{z}_A + B) \ln \left| \frac{Q(\bar{z}_{i+1})Q_0(\bar{z}_i)}{(\bar{z}_A - \bar{z}_i)^2} \right| \right\}. \quad (14)$$

Здесь  $Q_0$  – функция  $Q(\bar{z})$  при  $\bar{x}_A = \bar{y}_A = 0$ :  $Q_0(\bar{z}_{i+1}) = |\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1}|$ ;  $Q_0(\bar{z}_i) = |\bar{z}_A - \bar{z}_i|$ .

Подставляя эти значения в (14), а также коэффициенты A и B по формулам (8), после упрощений получим выражение

$$\bar{v}_{y0}(\bar{z}_A) = \frac{1}{4\pi} \left[ (\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i) + \frac{\bar{\gamma}_{i+1}(\bar{z}_A - \bar{z}_i) - \bar{\gamma}_i(\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1})}{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i} \ln \left| \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_A - \bar{z}_i} \right| \right]. \quad (15)$$

Как видно из (15), на краях полосы при  $\bar{z}_A = \bar{z}_i$  и  $\bar{z}_A = \bar{z}_{i+1}$  имеет место особенность логарифмического типа. Это не дает возможности вычислить индуктивную скорость непосредственно на краю полосы при отличной от нуля циркуляции в этой точке. Если же циркуляция на краю полосы обращается в ноль, то скорость оказывается величиной конечной.

При расчете характеристик крыла задача упрощается, поскольку соседние полосы имеют общую границу, на которой особенность отсутствует и скорости конечны. Если рассмотреть две соседствующие друг с другом вихревые полосы  $(\bar{z}_{i-1}, \bar{z}_i)$  и  $(\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1})$ , то индуктивная скорость в начальной точке линии их соприкосновения  $\bar{z}_A = \bar{z}_i$  будет равна

$$\bar{v}_{y0}(\bar{z}_i) = \frac{1}{4\pi} \left[ (\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i) + \bar{\gamma}_i \ln \left| \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}} \right| \right]. \quad (16)$$

При равной ширине участков  $|\bar{z}_i - \bar{z}_{i+1}| = |\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}|$  скорость в точке  $\bar{z}_i$  не зависит от величины связанной с ней циркуляции и определяется только циркуляцией соседних точек.

Формулы (15) и (16) полностью решают задачу определения индуктивных скоростей во всех сечениях крыла ( $-1 < \bar{z}_A < 1$ ), в том числе и в тех, где заданы значения погонной циркуляции вихревого слоя ( $\bar{z}_A = \bar{z}_i$ ), за исключением точек, расположенных на концах крыла ( $\bar{z}_A = \bar{z}_1 = -1, \bar{z}_A = \bar{z}_N = 1$ ). Если точка  $\bar{z}_A$  не совпадает ни с одной из границ вихревых полос  $\bar{z}_i$ , то расчет сводится к суммированию индукции от всех полосок вихревой пелены крыла

$$\bar{v}_{y0}(\bar{z}_A) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[ (\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i) + \frac{\bar{\gamma}_{i+1}(\bar{z}_A - \bar{z}_i) - \bar{\gamma}_i(\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1})}{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i} \ln \left| \frac{\bar{z}_A - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_A - \bar{z}_i} \right| \right], \quad \bar{z}_A \neq \bar{z}_i. \quad (17)$$

Если точка  $\bar{z}_A$  совпадает с какой-либо из внутренних границ вихревых полос  $\bar{z}_k$  ( $1 < k < N$ ), то расчет сводится к суммированию по формуле (15) индукции от всех полосок вихревой пелены, за исключением двух, примыкающих к  $\bar{z}_k$ , и с учетом индуктивного воздействия двух последних по формуле (16)

$$\begin{aligned} \bar{v}_{y0}(\bar{z}_k) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} \left[ (\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i) + \frac{\bar{\gamma}_{i+1}(\bar{z}_k - \bar{z}_i) - \bar{\gamma}_i(\bar{z}_k - \bar{z}_{i+1})}{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i} \ln \left| \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_k - \bar{z}_i} \right| \right] + \right. \\ & + (\bar{\gamma}_{k+1} - \bar{\gamma}_{k-1}) + \bar{\gamma}_i \ln \left| \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{k+1}}{\bar{z}_k - \bar{z}_{k-1}} \right| + \\ & \left. + \sum_{i=k+1}^{N-1} \left[ (\bar{\gamma}_{i+1} - \bar{\gamma}_i) + \frac{\bar{\gamma}_{i+1}(\bar{z}_k - \bar{z}_i) - \bar{\gamma}_i(\bar{z}_k - \bar{z}_{i+1})}{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i} \ln \left| \frac{\bar{z}_k - \bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_k - \bar{z}_i} \right| \right] \right\} \quad (2 < k < N - 1). \quad (18) \end{aligned}$$

### Определение закона распределения циркуляции по размаху крыла

Расчет поля индуктивных скоростей сводится к выбору рационального закона распределения дискретных сечений  $\bar{z}_i$  по размаху крыла и вычислению в этих точках значений погонной циркуляции вихревого слоя  $\bar{\gamma}_i(\bar{z}_i)$  на основе известных циркуляций  $\bar{\Gamma}(\bar{z}_i)$ . В большинстве случаев законы распределения циркуляции по размаху крыла близки к эллиптическим, для корректного описания которых распределение расчетных точек должно сгущаться к концам крыла. Оптимальное их количество должно составлять 8 – 10 на полуразмах [1; 2].

Вычисление значений  $\bar{\gamma}_i(\bar{z}_i)$  по известным циркуляциям  $\bar{\Gamma}_i(\bar{z}_i)$  согласно (7) связано с численным дифференцированием зависимости  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  в точках  $\bar{z} = \bar{z}_i$ . Применим способ, предложенный А.В. Чесаловым [6], и опишем закон  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  на участке  $[\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}]$  полиномом

$$\bar{\Gamma}'(\bar{z}) = 0,5A\bar{z}^2 + B\bar{z} + C, \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i+1}. \quad (19)$$

Производная  $\bar{\Gamma}'(\bar{z})$  будет линейной функцией от  $\bar{z}$ , что соответствует допущению (8), принятому при выводе формул индуктивной скорости от вихревой полоски

$$\bar{\Gamma}'(\bar{z}) = \gamma(\bar{z}) = A\bar{z} + B, \quad \bar{z}_i \leq \bar{z} \leq \bar{z}_{i+1}. \quad (20)$$

Коэффициенты А, В, С найдем из условий, что парабола проходит через две заданные точки  $\bar{\Gamma}_i(\bar{z}_i)$ ,  $\bar{\Gamma}_{i+1}(\bar{z}_{i+1})$ , а в первой из них имеет заданную производную  $\bar{\Gamma}'_i(\bar{z}_i)$ :

$$\bar{\Gamma}(\bar{z}_i) = \bar{\Gamma}_i; \bar{\Gamma}(\bar{z}_{i+1}) = \bar{\Gamma}_{i+1}; \bar{\Gamma}'(\bar{z}_i) = \bar{\Gamma}'_i. \quad (21)$$

Определение коэффициентов А, В, С по условиям (21) сводится к системе линейных уравнений, решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{(\bar{\Gamma}_{i+1} - \bar{\Gamma}_i) - \bar{\Gamma}'_i(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i)}{(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i)^2}; \\ B &= \frac{\bar{\Gamma}'_i(\bar{z}_{i+1}^2 - \bar{z}_i^2) - 2\bar{z}_i(\bar{\Gamma}_{i+1} - \bar{\Gamma}_i)}{(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i)^2}; \\ C &= \bar{\Gamma}_i + \frac{\bar{\Gamma}'_i\bar{z}_i\bar{z}_{i+1}(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i) + \bar{z}_i^2(\bar{\Gamma}_{i+1} - \bar{\Gamma}_i)}{(\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, по (20) можно найти значение  $\bar{\Gamma}'(\bar{z}_{i+1})$  на конце отрезка  $[\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}]$

$$\bar{\Gamma}'(\bar{z}_{i+1}) = \bar{\gamma}(\bar{z}_{i+1}) = A\bar{z}_{i+1} + B = 2 \frac{\bar{\Gamma}_{i+1} - \bar{\Gamma}_i}{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_i} - \bar{\Gamma}'_i, \quad (23)$$

которое может быть принято в качестве начального условия для построения аппроксимирующего полинома на следующем отрезке  $[\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}]$ . Тем самым обеспечивается гладкость сплайна  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  во всем диапазоне задания точек  $\bar{\Gamma}_i(\bar{z}_i)$ .

Идея описанного приема аппроксимации закона  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  заключается в том, что при обтекании крыла невозмущенным потоком без скольжения этот закон всегда является симметричной функцией относительно корневого сечения крыла. Поэтому производная  $\bar{\Gamma}'(\bar{z})$  в этом сечении равна нулю, что позволяет построить аппроксимирующие сплайны  $\bar{\Gamma}_i(\bar{z}_i)$ , двигаясь влево и вправо от корневого сечения крыла.

Таким образом, алгоритм определения закона распределения циркуляции по размаху крыла сводится к последовательным приближениям. Переход к следующему приближению выполняется одновременно для всех сечений крыла, используя общий коэффициент релаксации  $\mu$

$$\bar{\Gamma}^{(v+1)}(\bar{z}_i) = \bar{\Gamma}^{(v)}(\bar{z}_i) + \mu(\bar{\Gamma}(\bar{z}_i) - \bar{\Gamma}^{(v)}(\bar{z}_i)), \quad 2 \leq i \leq N - 1. \quad (24)$$

Для устойчивой аperiodической сходимости на всех углах атаки крыла, включая закритические, коэффициент релаксации должен лежать в диапазоне  $0,05 \leq \mu \leq 0,2$ . Описанный алгоритм последовательных приближений устойчиво сходится как в линейной области зависимости  $c_{yp} = c_{yp}(\alpha)$ , так и на закритических углах атаки.

В качестве примера приведем результаты расчетов характеристик прямого крыла  $\lambda = 5$ ,  $\eta = 1$  на базе профиля NASA 0012 в диапазоне углов установки  $5^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$ . Как видно из рис. 3, зависимости  $\bar{\Gamma}(\bar{z})$  и  $\bar{v}_y(\bar{z})$  являются достаточно гладкими функциями, несмотря на то что по размаху крыла взято всего 17 сечений.

В соответствии с формулами (4) коэффициенты подъемной силы и сопротивления крыла вычисляются интегрированием по его размаху законов  $c_{yp}(\bar{z})$ ,  $c_{xp}(\bar{z})$ ,  $b(\bar{z})$ ,  $\bar{v}_y(\bar{z})$ ,  $\bar{W}(\bar{z})$ . Поскольку эти законы заданы значениями функций в дискретных точках  $\bar{z}_i$ , вычисление обоих интегралов может быть выполнено методом Симпсона, полагая, что значения подынтегральных функций на концах крыла равны нулю.

На рис. 4 показаны зависимости коэффициента подъемной силы крыла  $c_{yk}(\varphi, \lambda)$  и коэффициента сопротивления крыла  $c_{xk}(\varphi, \lambda)$  в диапазоне изменения угла установки  $-30^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$  для различных удлинений крыла  $\lambda = 3, 5, 7, 10$ . Видно, что качественный характер этих зависимостей полностью соответствует общепринятым представлениям теории крыла конечного размаха [1 – 4; 6; 8].

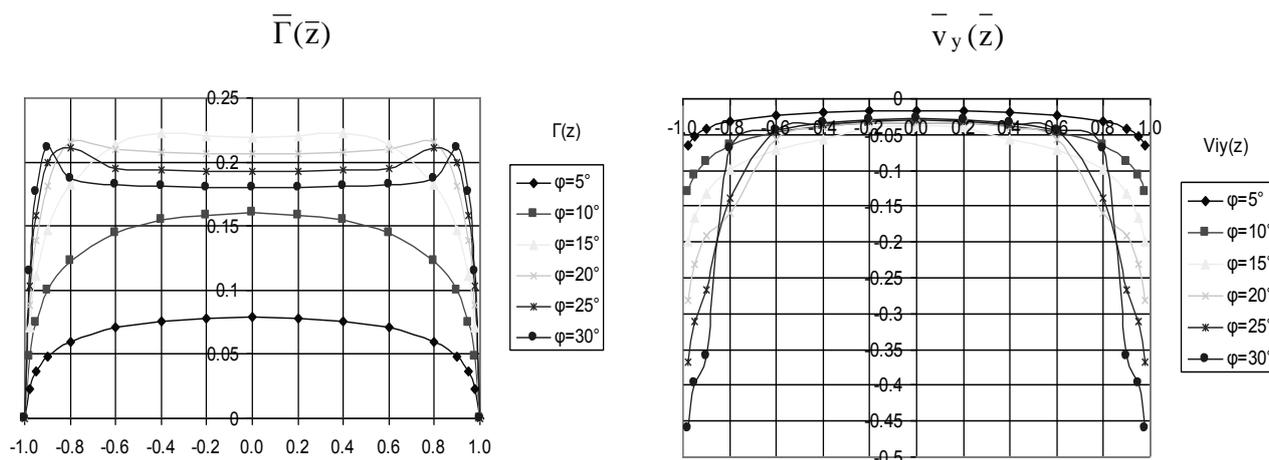


Рис. 3. Законы изменения циркуляции и индуктивной скорости по размаху крыла

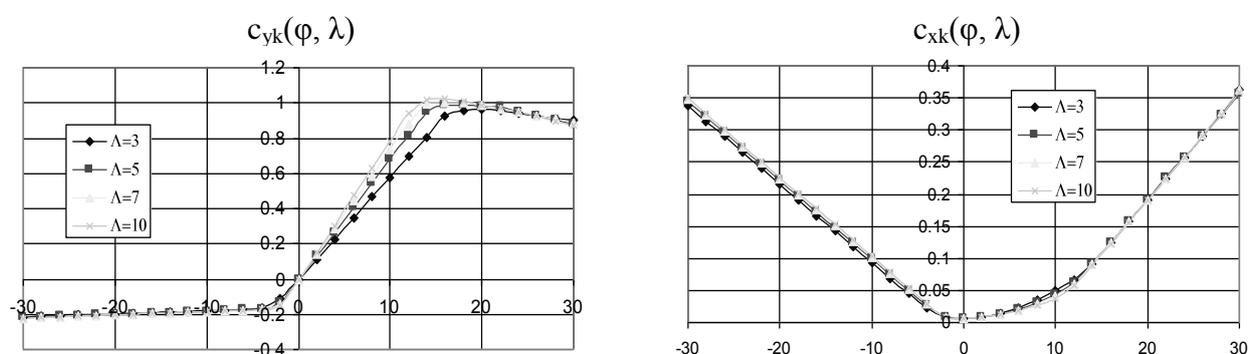


Рис. 4. Аэродинамические характеристики крыльев различных удлинений

## Выводы

1. Математическая модель крыла, построенная на основе вихревой пелены с непрерывно распределенной по ее участкам погонной циркуляцией, дает возможность вычислять индуктивные скорости в произвольной точке пространства, непосредственно на вихревой пелене и на поверхности, с которой сходит вихревой слой.

2. Алгоритм вычисления компонентов индуктивной скорости, сведенный к элементарным функциям, позволяет строить на его основе итерационные методы расчета воздушной нагрузки, распределенной по размаху несущей поверхности крыла, и его интегральные аэродинамические характеристики на режимах как досрывного, так и засрывного обтекания.

3. Работоспособность алгоритма продемонстрирована в широком диапазоне углов атаки профиля ( $-5^\circ \leq \alpha \leq 25^\circ$ ) и чисел Маха ( $0,3 \leq M \leq 0,9$ ), а достоверность подтверждена сопоставлением с результатами ЦАГИ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Юрьев Б.Н. Крыло с изменяющейся по размаху циркуляцией: избранные труды. - М.: Изд-во АН СССР, 1961. - Т. 2.
2. Бураго Г.Ф. Опыт расчета распределения подъемной силы по размаху крыла на закритических углах атаки // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. - 1944.
3. Майкапар Г.И. К аэродинамическому расчету крыла конечного удлинения // Труды ЦАГИ. - 1944. - № 547.
4. Каменков Г.В. Теория крыла в закритической области // Труды КАИ. - 1947. - Вып. 18.

5. Сиразетдинов Т.К. Крыло конечного размаха на больших углах атаки // Труды КАИ. - 1956. - Вып. 31.
6. Чесалов А.В. Построение поляры Лилиентала монопланного крыла произвольной формы // Труды ЦАГИ. - 1929. - № 342.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973.
8. Карафолли Е. Аэродинамика крыла самолета // Несжимаемая жидкость. - М.: Изд-во АН СССР, 1956.
9. Миль М.Л. и др. Вертолеты // Расчет и проектирование // Аэродинамика. - М.: Машиностроение, 1966. - Т. 1.

## VORTICAL MODEL OF THE WING COVERED WITH CONTINUOUSLY DISTRIBUTED CIRCULATION OF THE VORTICAL LAYER

Artamonov B.L.

The linear vortical model of the final scope of a wing is examined. It represents the flat rectangular spatial veil covered with continuously distributed vortical layer. Elements of digitization of a veil are the quadrangular panels laying on its surface. Method, algorithms and the program of calculation of three making vectors of inductive speed from any guided rectangular platform covered with a vortical layer are created. Its intensity linearly changes on the surface of a platform. The decision is received in elementary functions. The numerical way solves the task of a definition of the law of circulation of the attached whirlwinds in scope of a wing and calculation of its aerodynamic characteristics, being based on the accepted vortical model and a hypothesis of flat sections.

**Key words:** wing, circulation, vortical layer, linear vortical model.

### Сведения об авторе

**Артамонов Борис Лейзерович**, 1947 г.р., окончил МАИ (1972), старший научный сотрудник, кандидат технических наук, заместитель заведующего кафедрой проектирования вертолетов МАИ (НИУ), автор более 180 научных работ, область научных интересов – аэромеханика винтокрылых летательных аппаратов вертикального взлета и посадки.