УДК 621.396

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

А.И. КОЗЛОВ, В.Ю. МАСЛОВ

Исследуются свойства матрицы рассеяния объекта. Получена система дифференциальных уравнений, которая связывает изменения величины отношения собственных значений матрицы Грэйвса с соответствующими изменениями величин элементов матрицы рассеяния объекта.

Ключевые слова: поляризация радиоволн, матрица рассеяния радиоволн.

Рассмотрим однопозиционные характеристики рассеяния объектом радиоволн, когда комплексная матрица рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ симметрична $(\underline{s}_{12} = \underline{s}_{21})$. Тогда в приближении плоских электромагнитных волн связь отраженной объектом электромагнитной волны с падающей на этот объект волной определяется соотношением [1] $\underline{\mathbf{E}}_{\text{о}} = \underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$ или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}}_{\text{о}1} \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{о}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{s}_{11} & \underline{s}_{12} \\ \underline{s}_{12} & \underline{s}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}1} \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} e^{i\varphi_{11}} & s_{12} e^{i\varphi_{12}} \\ s_{12} e^{i\varphi_{12}} & s_{22} e^{i\varphi_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}1} \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}2} \end{pmatrix}.$$

Для анализа энергетических характеристик отраженной волны используется эрмитовая матрица Грэйвса $\underline{\mathbf{G}}$, определяемая следующим образом

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} g_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{\bar{g}}_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{S}}^* \underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} |\underline{s}_{11}|^2 + |\underline{s}_{12}|^2 & \underline{\bar{s}}_{11}\underline{s}_{12} + \underline{\bar{s}}_{12}\underline{s}_{22} \\ \underline{s}_{11}\underline{\bar{s}}_{12} + \underline{s}_{12}\underline{\bar{s}}_{22} & |\underline{s}_{12}|^2 + |\underline{s}_{22}|^2 \end{pmatrix},$$

где матрица $\underline{\mathbf{S}}^* = \overline{\underline{\mathbf{S}}}^T$ - сопряженная к матрице $\underline{\mathbf{S}}$.

Матрица Грэйвса устанавливает связь между плотностями мощностей падающей $\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$ и отраженной $\underline{\mathbf{E}}_{\text{о}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{о}}$ электромагнитных волн. Собственные значения $\nu_{1,2}$ матрицы $\underline{\mathbf{G}}$ находятся из равенства $\nu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(g_{11} + g_{22} \pm \sqrt{g_{11}^2 + g_{22}^2 + 4\underline{g}_{12}\underline{\bar{g}}_{12} - 2g_{11}g_{22}}\right)$.

Поскольку все собственные значения эрмитовой матрицы вещественны, будем в дальнейшем считать, что $\nu_1 \ge \nu_2$. Равенство собственных значений $\nu_1 = \nu_2$ возможно лишь при условии $\mathrm{g}_{11} = \mathrm{g}_{22}$ и $|\mathrm{g}_{12}| = 0$. Для собственных значений матрицы выполняется неравенство Рэлея [4] $\nu_2 \underline{\mathbf{E}}^* \underline{\mathbf{E}} \le \underline{\mathbf{E}}^* \underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{E}} \le \nu_1 \underline{\mathbf{E}}^* \underline{\mathbf{E}}$, справедливое для любых векторов $\underline{\mathbf{E}} \in \mathbf{C}^n$. Если $\underline{\mathbf{E}}$ - собственный вектор матрицы $\underline{\mathbf{G}}$, отвечающий собственному значению ν_1, то $\underline{\mathbf{E}}^* \mathbf{G}\underline{\mathbf{E}} = \nu_1 \underline{\mathbf{E}}^* \underline{\mathbf{E}}$. Аналогичное соотношение выполняется для ν_2. Плотность потока мощности отраженной электромагнитной волны будет $\Pi_{\text{о}} = (\underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}})^* \underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{S}}^* \underline{\mathbf{S}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$, что дает возможность записать $\nu_2 \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}} \le \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{G}}\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}} \le \nu_1 \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$ или $\nu_2 \Pi_{\text{п}} \le \Pi_{\text{о}} \le \nu_1 \Pi_{\text{п}}$, где $\Pi_{\text{п}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$ - плотность падающего на объект потока мощности, а $\Pi_{\text{о}} = \underline{\mathbf{E}}_{\text{о}}^* \underline{\mathbf{E}}_{\text{о}}$ - плотность потока отраженной мощности. Следовательно, можно написать неравенство $\Pi_0 / \Pi_n \le \nu_1$, которое обращается в равенство, когда $\underline{\mathbf{E}}_{\text{п}}$ является собственным вектором матрицы $\underline{\mathbf{G}}$, отвечающим собственному значению ν_1. Таким образом, ν_1 равно максимальному значению отношения отраженной мощности к падающей $\nu_1 = \max \Pi_{\text{о}} / \Pi_n$, а ν_2 равно минимальному значению этого отношения $\nu_2 = \min \Pi_{\text{о}} / \Pi_n$ для всех возможных состояний поляризации падающей электромагнитной волны. На основании полученных соотношений можно сделать вывод о локализации собственных значений матрицы Грейвса $0 \le \nu_2 \le \nu_1 \le 1$.

Введем положительный параметр κ, представляющий собой число обусловленности матрицы $\underline{\mathbf{G}}$, который равен отношению максимального значения отраженной мощности к ее минимальному значению $\kappa = \nu_1 / \nu_2 \ge 1$.

Параметр κ связан с элементами матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ соотношением

$$\kappa = \frac{s_{11}^2 + 2s_{12}^2 + s_{22}^2 + \sqrt{s_{11}^4 + 4s_{11}^2 s_{12}^2 - 2s_{11}^2 s_{22}^2 + 4s_{11}s_{12}^2 s_{22}\cos\varphi + 4s_{12}^2 s_{22}^2 + s_{22}^4}}{s_{11}^2 + 2s_{12}^2 + s_{22}^2 - \sqrt{s_{11}^4 + 4s_{11}^2 s_{12}^2 - 2s_{11}^2 s_{22}^2 + 4s_{11}s_{12}^2 s_{22}\cos\varphi + 4s_{12}^2 s_{22}^2 + s_{22}^4}}, \ \varphi = \varphi_{11} + \varphi_{22} - 2\varphi_{12}.$$

Как следует из полученных соотношений, собственные значения матрицы Грэйвса $\underline{\mathbf{G}}$ определяются рассевающими свойствами матрицы $\underline{\mathbf{S}}$. Поэтому определенный интерес представляет решение нижеследующей задачи. Для данных начальных значений величин элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ известна начальная величина параметра κ объекта. Затем происходит плавное изменение отражающих свойств этого объекта. Надо определить соответствующее этому изменению поведение элементов матрицы $\underline{\mathbf{S}}$.

Рассматривая выражение для $\kappa(\varphi)$ как неявную функцию, связывающую параметр κ с элементами матрицы $\underline{\mathbf{S}}$, можно найти следующие частные производные как функции параметра κ и элементов матрицы $\underline{\mathbf{S}}$: $\frac{\partial s_{11}}{\partial \kappa} = f_1(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi)$; $\frac{\partial s_{12}}{\partial \kappa} = f_2(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi)$; $\frac{\partial s_{22}}{\partial \kappa} = f_3(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi)$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \kappa} = f_4(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi)$.

Ввиду громоздкости функций $f_1(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi) - f_4(\kappa, s_{11}, s_{12}, s_{22}, \varphi)$ их явный вид не приводится. Рассмотрим численное решение этой системы дифференциальных уравнений. В качестве начальных задаются начальные значения элементов матрицы $\underline{\mathbf{S}}$, которые определяют элементы матрицы $\underline{\mathbf{G}}$ и тем самым начальное значение параметра κ.

На рис. 1, 2 приведены графики изменения модулей и аргументов $\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{22} - 2\varphi_{12}$ элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ для заданных начальных значений этих величин ($s_{11_0} = 0{,}23$; $s_{12_0} = 0{,}05$; $s_{22_0} = 0{,}2$; $\varphi_0 = -1{,}76$). Соответствующее этим величинам начальное значение параметра $\kappa_0 = 1{,}96$. На рисунках параметр n означает количество шагов численного метода интегрирования дифференциальных уравнений.

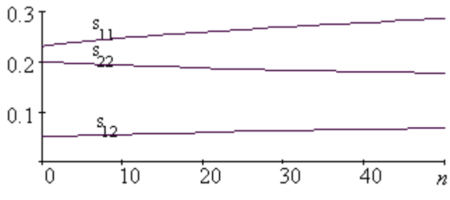

Рис. 1. Изменение модулей элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$

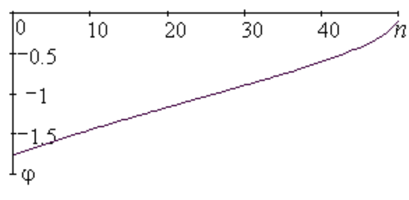

Рис. 2. Изменение аргумента φ матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$

При взаимном изменении элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ (рис. 1) происходит изменение собственных значений $\nu_{1,2}$ матрицы $\underline{\mathbf{G}}$ (рис. 3). Взаимное изменение приводит к изменению параметра κ рассеивающего объекта (рис. 4). В рассматриваемом примере предусматривается рост κ. Величину скорости можно определить из графика как $\Delta\kappa/\Delta n$.

След матрицы $\underline{\mathbf{G}}$ $\sigma_\Sigma = |\underline{s}_{11}|^2 + |\underline{s}_{22}|^2 + 2|\underline{s}_{12}|^2$ равен полной ЭПР рассеивателя [1]. На рис. 5 приведен график изменения нормированной полной ЭПР ($\sigma_\Sigma/\sigma_{\Sigma 0}$) матрицы $\underline{\mathbf{S}}$. Значение $\sigma_{\Sigma 0} = 0{,}1$ соответствует начальному значению полной ЭПР.

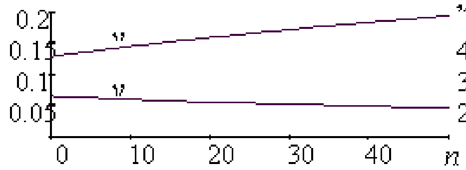

Рис. 3. Изменение собственных значений матрицы $\underline{\mathbf{G}}$

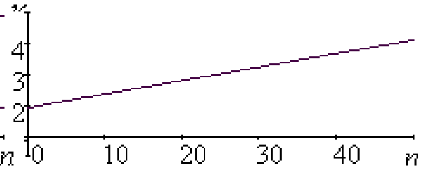

Рис. 4. Изменение параметра κ рассеивающего объекта

Чтобы исключить из рассмотрения абсолютные значения мощности, удобно ввести безразмерную величину $q = (\nu_1 - \nu_2)/(\nu_1 + \nu_2)$, характеризующую степень анизотропности рассеивающего объекта. На рис. 6 приведен график изменения q, связанный с изменениями элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ (рис. 1).

Таким образом, графики решений системы дифференциальных уравнений передают характер изменения элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$, вызванный ростом параметра κ. Характер этих изменений определяется начальными значениями величин элементов матрицы $\underline{\mathbf{S}}$, а также скоростью изменения параметра κ.

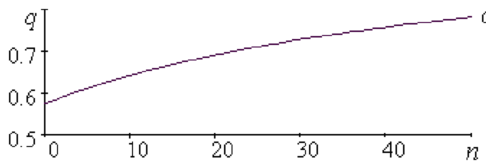

Рис. 5. Изменение нормированной полной ЭПР матрицы $\underline{\mathbf{S}}$

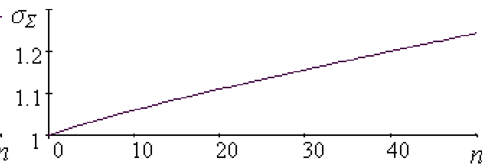

Рис. 6. Изменение степени анизотропности q рассеивающего объекта

В дальнейшем, если связать параметр κ матрицы $\underline{\mathbf{G}}$, который численно равен отношению максимального значения отраженной от объекта мощности к ее минимальному значению, с геометрическими параметрами рассеивающего объекта и его эволюцией относительно приемной антенны, то система дифференциальных уравнений позволит описать соответствующее временное изменение элементов матрицы рассеяния $\underline{\mathbf{S}}$ объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Козлов А.И., Логвин А.И., Сарычев В.А.** Поляризация радиоволн. Кн. 2. Радиолокационная поляриметрия. – М.: Радиотехника, 2007.

2. **Козлов А.И., Маслов В.Ю.** Дифференциальные свойства матрицы рассеяния // Научный Вестник МГТУ ГА, серия Радиофизика и радиотехника. – 2004. - №79. - С. 19-25.

3. **Маслов В.Ю.** Дифференциальные свойства поляризационного коэффициента электромагнитной волны // Научный Вестник МГТУ ГА, серия Радиофизика и радиотехника. - 2004. - №79. - С. 26-30.

DIFFERENTIAL EQUATION TO EVOLUTIONS OF THE SCATTERING MATRIX

Kozlov A.I., Maslov V.Yu.

The characteristics of object scattering matrix are analyzed. The system of differential equations is obtained. It correlates (links) changes in ratio magnitude of Grave’s own matrix values with the corresponding changes in matrix elements the magnitude scattering.

Keywords: radiowaves polarization, radiowaves scattering matrix.

Сведения об авторах

Козлов Анатолий Иванович, 1939 г.р., окончил МФТИ (1962), профессор, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки и техники РФ, академик Академии транспорта РФ и Международной академии информатизации, Соросовский профессор, профессор кафедры технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта МГТУ ГА, автор более 320 научных работ, область научных интересов - радиофизика, радиополяриметрия, радиолокация.

Маслов Виктор Юрьевич, 1945 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1968), доктор технических наук, профессор МГТУ МИРЭА, автор более 80 научных работ, область научных интересов - радиофизика, радиолокация, радиополяриметрия.