УДК 629.735

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ АВИОНИКИ КАК МАРКОВСКИЕ И ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

С.В. КУЗНЕЦОВ

Техническая эксплуатация самолета и его авионики рассматривается как процесс с последовательной сменой состояний эксплуатации. Предложены модели процессов и систем технической эксплуатации авионики в виде стационарных и нестационарных марковских и полумарковских процессов первого и высшего порядков.

Ключевые слова: математические модели, процессы и системы, техническая эксплуатация, авионика, марковские процессы, полумарковские процессы.

Модели процессов и систем технической эксплуатации авионики

Анализ структуры современных комплексов и систем авионики воздушных судов (ВС) гражданской авиации (ГА) приведен в [1]. *Система технической эксплуатации (СТЭ) авионики ВС* – это совокупность объектов и средств технической эксплуатации, программ технического обслуживания и ремонта, а также персонала, осуществляющего процедуры и организующего процессы технической эксплуатации авионики.

Качество СТЭ авионики проявляется в *процессе ТЭ* – совокупности процессов использования по назначению, эксплуатационного контроля, технического обслуживания, восстановления и ремонта.

В работе [2] показано, что техническую эксплуатацию самолета и его авионики можно рассматривать как процесс с последовательной сменой *состояний эксплуатации.* В качестве таких состояний при использовании по назначению могут быть выделены состояния работоспособности, исправности, неисправности и неработоспособности. Состояниями эксплуатационного контроля авионики являются состояния контроля в полете, послеполетного и предполетного контроля и контроля демонтированного оборудования для работоспособного, исправного, неработоспособного или неисправного состояния. Аналогичным образом могут быть выделены состояния оперативного и периодического ТО, аварийного и профилактического восстановления, состояния ремонта. При необходимости исследования процессов в реальном масштабе времени необходимо рассмотрение состояний ожидания, простоя и хранения. В работе [2] обосновывается применение марковских цепей (МЦ) как математических моделей процессов и систем технической эксплуатации авионики.

Марковский процесс (МП) – это случайный процесс с непрерывным временем, отличительной особенностью которого является экспоненциальный характер функций распределения времени нахождения процесса в своих состояниях перед переходом в другие состояния. Такой характер функций распределения ведет к обязательному существованию внутри МП вложенной в него МЦ, так что эволюции МП можно рассматривать, исследуя вложенную МЦ. Преимуществом МП является то, что кроме эволюций можно исследовать такие характеристики, как время пребывания МП в своих состояниях и другие временные параметры. По аналогии с МЦ простейшим МП является стационарный МП 1-го порядка (СМП). Разновидностями МП являются нестационарный МП 1-го порядка (НСМП), стационарный и нестационарный МП высшего порядка (СМПВ и НСМПВ). Таким образом, мы имеем четыре основных разновидности МП.

Полумарковский процесс (ПМП) отличается от МП тем, что функции распределения времени нахождения процесса в своих состояниях перед переходом в другие состояния могут быть произвольными. В этом заключается преимущество использования ПМП, так как существенно расширяется класс решаемых задач вследствие отсутствия ограничения на экспоненциальность функций распределения. Наличие вложенной МЦ для ПМП является обязательным. По аналогии с МЦ и МП простейшим ПМП является стационарный ПМП 1-го порядка (СПМП). Разновидностями ПМП являются нестационарный ПМП 1-го порядка (НСПМП), стационарный и нестационарный ПМП высшего порядка (СПМПВ и НСПМПВ).

По мере усложнения моделей МЦ, МП и ПМП, выбранных для описания тех или иных реальных процессов технической эксплуатации, возрастает их степень адекватности, но усложняется математический аппарат и возрастают трудности со статистикой, необходимой для описания моделей. Объем статистики значительно увеличивается. В связи с этим в каждом конкретном случае приходится выбирать компромисс, чтобы математическая модель достаточно точно описывала исследуемый процесс, и объемы математических расчетов были бы приемлемы.

Марковские и полумарковские процессы как модели процессов технической эксплуатации

Определение марковского процесса. Марковские цепи с непрерывным временем – это марковские и полумарковские процессы. Множество состояний S для них может быть конечно, счётно и непрерывно. Остановимся на конечном S.

Стационарный марковский процесс есть совокупность

$$\varphi_1^S = \left\{\mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{P}^{(S)}, \mathbf{F}_1^S(t)\right\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}_1^S(t) = \left\{F(S_j / S_i, t); S_i, S_j \in \mathbf{S}\right\}$ – матрица экспоненциальных функций распределения времени нахождения процесса в состоянии S_i перед переходом в состояние S_j.

Элементы матрицы $F_1^S(t)$ задают случайные экспоненциально распределенные моменты времени $\tau(S_j / S_i)$. Реализация стационарного марковского процесса φ_1^S имеет вид

$$h_{\varphi_1}^S(m) = P^{(0)}S^{(0)}p(S^{(1)}/S^{(0)})\tau(S^{(1)}/S^{(0)})S^{(1)}\ldots p(S^{(m)}/S^{(m-1)})\tau(S^{(m)}/S^{(m-1)})S^{(m)}, \quad t = \overline{0,m}. \tag{2}$$

Стационарный марковский процесс m-го порядка есть совокупность

$$\varphi_m^S = \left\{\mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathfrak{R}_m^S, \mathfrak{I}_m^S(t)\right\}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{I}_m^S(t) = \left\{\mathbf{F}_l^S(t), l = \overline{1,m}\right\}$ – совокупность матриц размерности $N \times (N)^l$ с элементами

$$F_l^S(t) = \left\{F(S_l / S_{l-1}, \ldots, S_0, t; S_l \in \mathbf{S}^{(l)}, S_{l-1} \in \mathbf{S}^{(l-1)}, S_0 \in \mathbf{S}^{(0)})\right\}, \quad l = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Реализация стационарного марковского процесса m-го порядка имеет вид

$$h_{\varphi_m}^S(m) = P^{(0)}S^{(0)}p\left(S^{(1)}/S^{(0)}\right)\tau\left(S^{(1)}/S^{(0)}\right)S^{(1)}\ldots$$
$$\ldots p(S^{(m)}/S^{(m-1)}, \ldots, S^{(1)}, S^{(0)})\tau(S^{(m)}/S^{(m-1)}, \ldots, S^{(1)}, S^{(0)})S^{(m)}, t = \overline{0,m}. \tag{5}$$

Определение полумарковского процесса. Стационарный полумарковский процесс m-го порядка есть совокупность

$$\phi_m^S = \left\{\mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathfrak{R}_m^S, \tilde{\mathbf{\Phi}}_1^S(t)\right\}, \tag{6}$$

где $\tilde{\mathbf{\Phi}}_m^S(t) = \left\{\mathbf{\Phi}_l^S(t), l = \overline{1,m}\right\}$ – совокупность матриц размерности $N \times (N)^l$ с элементами:

$$\mathbf{\Phi}_l^{NS}(t) = \left\{\Phi(S_l / S_{l-1}, t); S_l \in \mathbf{S}^{(l)}, S_{l-1} \in \mathbf{S}^{(l-1)}\right\}, l = \overline{1,m};$$

$$\mathbf{\Phi}_l^S(t) = \left\{\Phi(S_l / S_{l-1}, ..., S_0, t); S_l \in \mathbf{S}^{(l)}, S_{l-1} \in \mathbf{S}^{(l-1)}, S_0 \in \mathbf{S}^{(0)}\right\}, l = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Нестационарный полумарковский процесс есть совокупность

$$\phi_m^{NS} = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathfrak{R}_m^S, \tilde{\mathbf{\Phi}}_1^{NS}(t) \right\}, \tag{8}$$

где $\tilde{\mathbf{\Phi}}_m^{NS}(t) = \left\{ \mathbf{\Phi}_l^{NS}(t), l = \overline{1,m} \right\}$ – совокупность матриц размерности $N \times (N)^l$ с элементами

$$\mathbf{\Phi}_l^{NS}(t) = \left\{ \Phi^l(S_l / S_{l-1}, ..., S_0, t); S_l \in \mathbf{S}^{(l)}, S_{l-1} \in \mathbf{S}^{(l-1)}, S_0 \in \mathbf{S}^{(0)} \right\}, l = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Реализация нестационарного полумарковского процесса имеет вид

$$h_{\varphi_m}^S(m) = P^{(0)} S^{(0)} p(S^{(1)} / S^{(0)}) \mu(S^{(1)} / S^{(0)}) S^{(1)} ...$$

$$\ldots p(S^{(m)} / S^{(m-1)}, ..., S^{(1)}, S^{(0)}) \mu^{(m)}(S^{(m)} / S^{(m-1)}, ..., S^{(1)}, S^{(0)}) S^{(m)}, \quad t = \overline{0,m}. \tag{10}$$

Таким образом, даны формальные описания различных видов марковских и полумарковских процессов, которые возможно использовать для описания процессов технической эксплуатации авионики.

Непрерывные марковская и полумарковская модели процессов технической эксплуатации

Непрерывная марковская модель процесса технической эксплуатации является обобщением дискретной модели на основе марковской цепи в случае, когда время изменяется непрерывно. Для определения МП необходимо задать, также как и для МЦ, множество состояний $\mathbf{S}$ и распределение вероятностей состояний $\mathbf{P}^{(0)}$ в начальный момент времени.

Если в момент времени t МП находится в состоянии $S_i \in \mathbf{S}$, то последующая эволюция СМП задается матрицей интенсивностей перехода процесса в состояние $S_j \in \mathbf{S}$

$$\mathbf{\Lambda}_1^S = \left\{ \lambda(S_j / S_i); S_j, S_i \in \mathbf{S} \right\}, \tag{11}$$

элементы которой зависят только от текущего состояния S_i и не зависят ни от прошлых эволюций, ни от того способа, которым было достигнуто это состояние, ни от момента времени t.

Таким образом, СМП представляет собой совокупность

$$\boldsymbol{\varphi}_1^S = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \mathbf{\Lambda}_1^S \right\}. \tag{12}$$

Интенсивность выхода СМП из состояния S_i определяется следующим образом

$$\lambda(S_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(S_j / S_i), \quad S_i \in \mathbf{S}. \tag{13}$$

Элементы матрицы переходных вероятностей определяются через интенсивности перехода и интенсивности выхода

$$p(S_j / S_i) = \lambda(S_j / S_i) / \lambda(S_i), \quad S_j, S_i \in \mathbf{S}. \tag{14}$$

Среднее время нахождения СМП в состоянии S_i при условии, что следующий переход будет в состояние S_j, есть величина, обратная $\lambda(S_j / S_i)$

$$T(S_j / S_i) = 1 / \lambda(S_j / S_i), \quad S_j, S_i \in \mathbf{S}. \tag{15}$$

Обозначим $\mu(S_j / S_i)$ – среднее время возвращения СМП в состояние S_j из состояния S_i, которое можно определить следующим образом

$$\mu(S_j / S_i) = T(S_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p(S_k / S_i) \mu(S_j / S_k). \tag{16}$$

Реализация СМП $h_{\varphi_l^S}(t)$ имеет вид

$$h_{\varphi_l^S}(t) = S_{i_0}^{(t_0)}, S_{i_1}^{(t_1)}, \ldots, S_{i_m}^{(t_m)}, \qquad (17)$$

где $t_0, t_1, \ldots, t_m$ – случайные моменты времени изменения состояния СМП. То есть наряду с $h_{\varphi_l^S}(t)$ можно наблюдать реализацию интервалов времени

$$t_0, (t_1 - t_0), \ldots, (t_m - t_{m-1}), \qquad (18)$$

причем эти интервалы имеют экспоненциальные функции распределения.

Обозначим через $P^{(t)}(S_j / S_i)$ условную вероятность состояния S_j в момент t, если в момент $\tau < t$ процесс находился в состоянии S_i. Тогда уравнение Колмогорова-Чепмена записывается следующим образом

$$P^{(t+\tau)}(S_j / S_i) = \sum_{k=1}^{k} P^{(\tau)}(S_k / S_i) P^{(t)}(S_j / S_k).$$

Тогда получается уравнение для $P^{(t)}(S_j / S_i)$

$$\frac{dP^{(t)}(S_j / S_i)}{dt} = -\sum_{k=1}^{t} \lambda(S_k / S_i) P^{(t)}(S_j / S_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{t} \lambda(S_j / S_k) P^{(t)}(S_k / S_i),\ S_j \in \mathbf{S}. \qquad (19)$$

Если вложенная марковская цепь является неприводимой и эргодической, то среднее время возвращения СМП в состояние S_j определяется следующим образом

$$\mu(S_j) = \sum_{k=1}^{k} \pi(S_k) T(S_k) / \pi(S_j),\ S_j \in \mathbf{S}, \qquad (20)$$

где $\pi(S_k)$ – стационарные распределения вероятностей состояний МЦ.

Безусловные стационарные вероятности состояний СМП при $t \to \infty$ определяются через стационарные распределения вероятностей состояний МЦ и средние времена нахождения СМП в своих состояниях

$$P(S_j) = \pi(S_j) T(S_j) / \sum_{k=1}^{k} \pi(S_k) T(S_k). \qquad (21)$$

Рассмотрим нестационарный МП. Если в момент времени τ процесс находится в состоянии $S_i \in \mathbf{S}$, то последующая эволюция НСМП задается матрицей

$$\Lambda_1^{NS} = \left\{ \lambda\left(S_j / S_i, \tau \right); S_i, S_j \in S \right\}. \qquad (22)$$

НСМП представляет собой совокупность

$$\varphi_l^{NS} = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \Lambda_l^{NS} \right\}. \qquad (23)$$

Интенсивность выхода НСМП из состояния S_i определяется следующим образом

$$\lambda(S_i, t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(S_j / S_i, t),\ \ S_i \in \mathbf{S}. \qquad (24)$$

Элементы матрицы переходных вероятностей

$$p(S_j / S_i, t) = \lambda(S_j / S_i, t) / \lambda(S_i, t),\ \ S_j, S_i \in \mathbf{S}. \qquad (25)$$

Среднее время нахождения НСМП в S_i

$$T(S_i) = 1 / \lambda(S_i, t),\ \ S_i \in \mathbf{S}. \qquad (26)$$

Среднее время нахождения НСМП в S_i при условии, что следующий переход будет в S_j

$$T(S_j / S_i, t) = 1/\lambda(S_j / S_i, t), \quad S_j, S_i \in \mathbf{S}. \tag{27}$$

Среднее время возвращения НСМП в состояние S_j из состояния S_i

$$\mu(S_j / S_i, t) = T(S_i, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} p(S_k / S_i, t)\mu(S_j / S_k, t). \tag{28}$$

Обозначим через $P^{(t)}(S_j / S_i, \tau)$ условную вероятность состояния S_j в момент t, если в момент $\tau < t$ процесс находился в состоянии S_i. Уравнение Колмогорова-Чепмена записывается следующим образом

$$P^{(t+\tau)}(S_j / S_i, \tau) = \sum_{k=1}^{k} P^{(\tau)}(S_k / S_i, \tau)P^{(t)}(S_j / S_k, \tau). \tag{29}$$

С помощью (29) получается система дифференциальных уравнений для определения $P^{(t)}(S_j / S_i, \tau)$

$$\frac{dP^{(t)}(S_j / S_i, \tau)}{dt} = -\sum_{k=1}^{t} \lambda(S_k / S_i, t)P^{(t)}(S_j / S_i, \tau) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{t} \lambda(S_j / S_k, t)P^{(t)}(S_k / S_i, \tau), \; S_j \in \mathbf{S}. \tag{30}$$

Рассмотрим стационарный МП k-го порядка, который представляет собой совокупность

$$\boldsymbol{\varphi}_k^S = \left\{ \mathbf{S}, \mathbf{P}^{(0)}, \boldsymbol{\Lambda}_k^S \right\}, \tag{31}$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_k^S = \left\{ \Lambda_l^S, l = \overline{1, k} \right\}$ – совокупность матриц интенсивностей переходов от 1-го до k-го порядка, элементы которых

$$\Lambda_l^S = \left\{ \lambda(S_{l_k} / S_{l_{k-1}}, \ldots, S_{l_0}); S_{l_k}, S_{l_{k-1}}, \ldots, S_{l_0} \in \mathbf{S} \right\} \tag{32}$$

зависят от предыдущих $1 \le l < k$ состояний.

Интенсивности выхода СМПВ из состояния S_{l_k} при условии, что до этого процесс прошел через n "запомненных" состояний, определяются следующим образом

$$\lambda(S_{l_k}, S_{l_{k-1}}, \ldots, S_{l_1}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(S_j / S_{l_k}, \ldots, S_{l_1}). \tag{33}$$

Элементы матрицы переходных вероятностей определяются через интенсивности перехода и интенсивности выхода

$$p(S_j / S_{l_k}, \ldots, S_{l_1}) = \lambda(S_j / S_{l_k}, \ldots, S_{l_1}) / \lambda(S_{l_k}, S_{l_{k-1}}, \ldots, S_{l_1}). \tag{34}$$

Таким образом, определены непрерывные марковские и полумарковские модели процессов технической эксплуатации авионики.

Использование таких моделей при изучении процессов технической эксплуатации авионики позволяет существенным образом повысить адекватность математической модели реальным процессам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов С.В. Анализ структуры современных комплексов и системы авионики воздушных судов гражданской авиации // *Научный Вестник МГТУ ГА, серия Авионика*. 1998. № 3. С. 5-26.

2. Кузнецов С.В. Математические модели процессов и систем технической эксплуатации авионики как марковские цепи // *Научный Вестник МГТУ ГА*. 2014. № 201. С. 56-64.

PROCESSES AND SYSTEMS OF AVIONICS TECHNICAL OPERATION AS MARKOV AND SEMIMARKOV PROCESSES MATHEMATICAL MODELS

Kuznetsov S.V.

Technical operation of the aircraft and its avionics is investigated as a process with the succession of states of operation. The models of the processes and systems of technical operation of avionics in the form of stationary and non-stationary Markov chains of the first and higher order are proposed. There are examples of the processes for two states of operation – able to work and disabled states.

Keywords: mathematical models, processes and systems, technical operation, avionics, Markov processes, Semimarkov processes.

REFERENCES

1. **Kuznetsov S.V.** Analiz struktury sovremennykh kompleksov i sistemy avioniki vozdushnykh sudov grazhdanskoy aviatsii. *Nauchnyy Vestnik MGTU GA*, *seriya Avionika*. 1998. № 3. Pp. 5-26. (In Russian).
2. **Kuznetsov S.V.** Matematicheskiye modeli protsessov i sistem tekhnicheskoy ekspluatatsii avioniki kak markovskiye tsepi. *Nauchnyy Vestnik MGTU GA.* 2014. № 201. Pp. 56-64. (In Russian).

Сведения об авторе

Кузнецов Сергей Викторович, 1954 г.р., окончил МИИГА (1977), МГУ им. М.В. Ломоносова (1980), профессор, доктор технических наук, член-корреспондент Академии наук авиации и воздухоплавания, заведующий кафедрой технической эксплуатации авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов МГТУ ГА, автор более 200 научных работ, область научных интересов – техническая эксплуатация пилотажно-навигационного оборудования и авионики.