УДК 629.735.33.014.16:533.662.6

# ВИХРЕВАЯ МОДЕЛЬ ВОЗДУШНОГО ВИНТА С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВИХРЕВОГО СЛОЯ

**Б.Л. АРТАМОНОВ**

**Статья представлена доктором технических наук, профессором Ципенко В.Г.**

Рассматривается линейная вихревая модель винта, представляющая собой пространственную геликоидальную пелену заданной геометрии, покрытую непрерывно распределенным двухкомпонентным вихревым слоем. Элементами дискретизации пелены являются треугольные панели, произвольно ориентированные в пространстве. Созданы метод, алгоритмы и программы расчета трех составляющих вектора индуктивной скорости от произвольно ориентированной площадки, покрытой вихревым слоем, интенсивность которого линейно изменяется по поверхности площадки. Решение получено в элементарных функциях.

**Ключевые слова:** вихревая модель, воздушный винт, циркуляция, верхний слой.

Вихревая теория несущего винта, работающего на режимах осевого и косого обтекания в настоящее время разработана достаточно подробно. В монографиях [1; 2] дано подробное изложение отечественных дисковых и лопастных вихревых теорий в линейной и в нелинейной постановках, которые дают возможность определить создаваемую винтом индуктивную скорость как в плоскости диска винта, так и в произвольной точке пространства.

Известно, что в лопастных вихревых теориях имеет место ряд вычислительных трудностей, которые вызваны, в первую очередь, дискретностью вихревых моделей. Они связаны с необходимостью выбора определенного расположения расчетных точек, в которых вычисляется индуктивная скорость при определении циркуляции присоединенных вихрей относительно вихревой поверхности. Эти точки не должны совпадать с осями вихрей, от которых вычисляется индуктивная скорость.

Одним из путей решения этой проблемы является учет ядер вихрей, имеющих ограниченные размеры и линейное поле скоростей внутри себя. Такой подход имеет ряд сложностей, связанных с достоверностью определения размеров ядер на различных режимах обтекания лопастей и наличием излома на характеристиках поля индуктивных скоростей на границе ядра, что отрицательно сказывается на сходимости итерационных процессов как в линейной, так и в нелинейной постановке задачи [3]. Второй путь решения этой проблемы основан на учете диффузии вихрей, имеющей место в реальной жидкости. Здесь также присутствуют сложности вычислительного характера, связанные с трудоемкостью вычислительных алгоритмов, моделирующих диффузию. Это заставляет авторов такого подхода отказаться от непосредственного расчета поля скоростей от диффундирующего вихря и табулировать нормированное поле завихренности от ограниченного числа аргументов и параметров [4].

В настоящей работе предлагается новый подход к решению обозначенных проблем, основанный на описании вихревой пелены непрерывно распределенным вихревым слоем, что дает возможность вычислять индуктивные скорости непосредственно на вихревой пелене, в том числе и на границах вихревых ячеек. Такая вихревая модель лишена недостатков, связанных с проблемой сходимости метода дискретных вихрей [5]. Она позволяет получить выражения для компонентов индуктивной скорости в произвольной точке пространства, вызываемой площадкой, покрытой непрерывно распределенным вихревым слоем, через элементарные функции. Такие формулы получены для площадки в виде произвольно ориентированного треугольника, покрытого двухкомпонентным вихревым слоем, интенсивность которого в пределах площадки изменяется по линейному закону.

Опубликованные решения похожих задач относятся к панели с параллельными кромками, покрытой слоем диполей [6]. Это существенно ограничивает область применения панельных методов, использующих ячейки такой формы, вихревыми моделями крыла. Распространить их на вращающиеся лопасти винта не удается, т.к. вихревой след от них представляет собой пространственную геликоидальную поверхность.

**Общая постановка задачи**

Рассмотрим винт, расположенный в правой декартовой системе осей координат *OXYZ* и обдуваемый воздушным потоком *V* под углом атаки $\alpha_В$ (рис. 1). С лопасти винта, находящейся на азимуте $\psi_л$, сходит вихревая пелена, поверхность которой $S(x, y, z)$ в линейной постановке в пределах одного оборота лопасти описывается в безразмерных координатах системой уравнений [1]

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{r}\sin(\psi_л - \vartheta) - \vartheta\bar{V}_x(\bar{r},\vartheta); \\ \bar{y} = -\vartheta\bar{V}_y(\bar{r},\vartheta); \\ \bar{z} = \bar{r}\cos(\psi_л - \vartheta), \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 \le \bar{r} \le 1; \quad \psi_л \le \vartheta \le \psi_л + 2\pi, \tag{1}$$

где $\bar{V}_x(\bar{r},\vartheta)$, $\bar{V}_y(\bar{r},\vartheta)$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости протекания воздушного потока через диск винта, определяемые с учетом создаваемых винтом индуктивных скоростей, которые, в общем случае, могут быть функциями $\bar{r}$ и $\vartheta$:

$$\bar{V}_x(\bar{r},\vartheta) = \bar{V}\cos\alpha_В + \bar{v}_{1x}(\bar{r},\vartheta); \; \bar{V}_y(\bar{r},\vartheta) = \bar{V}\sin\alpha_В - \bar{v}_{1y}(\bar{r},\vartheta); \tag{2}$$

$\bar{v}_{1x}(\bar{r},\vartheta)$, $\bar{v}_{1y}(\bar{r},\vartheta)$ – индуктивные скорости, создаваемые несущим винтом, которые в нелинейной постановке задачи переменны по диску винта.

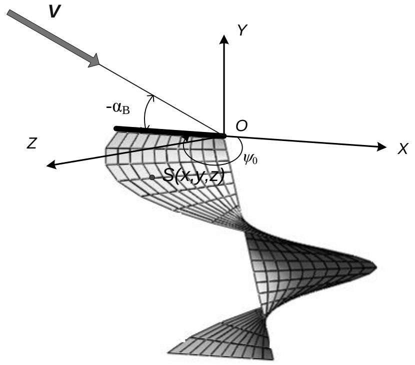



**Рис. 1.** Вихревая пелена за лопастью винта

В линейной постановке индуктивные скорости можно считать постоянными:

$$\bar{v}_{1x}(\bar{r},\vartheta) = \bar{v}_{1x}; \; \bar{v}_{1y}(\bar{r},\vartheta) = \bar{v}_{1y} \tag{3}$$

и находить на основе дисковой вихревой теории [7] по следующим соотношениям:

$$\bar{v}_{1y} = \bar{v}_{1в}\tilde{v}_{1y}; \quad \bar{v}_{1x} = \bar{v}_{1в}\tilde{v}_{1x}; \quad \bar{V} = \bar{v}_{1в}\tilde{V};$$

$$\tilde{v}_{1y} = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(\delta)\left[-\tilde{V}\cos(\alpha+\delta) + \sqrt{\tilde{V}^2\cos^2(\alpha+\delta) + 4\,\mathrm{sign}(\delta)}\right]; \; \tilde{v}_{1x} = \mathrm{sign}(\delta)k_\delta\tilde{v}_{1y}, \tag{4}$$

где $\bar{v}_{1в}$ – средняя по диску винта индуктивная скорость на режиме висения при заданном коэффициенте силы тяги винта

$$\bar{v}_{1в} = \frac{1}{2}\sqrt{c_т}\;;$$

$k_\delta$ – коэффициент режима работы винта

$$k_\delta = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{|\delta|}{2}\right);$$

$\delta$ – угол наклона вихревой системы винта, определяемый по дисковой теории из трансцендентного уравнения [7]

$$\tilde{V}^2 \left|2\cos\left(\alpha+\delta\right)k_\delta + \sin(\alpha+\delta)\right|\sin(\alpha+\delta) - 4k_\delta^2 = 0 .$$

В соответствии с принципами лопастной вихревой теории разобьем непрерывную вихревую поверхность $S(x, y, z)$ на $M\times N$ дискретных ячеек, сошедших с лопасти на радиусе $r_i$ $(0 \le i \le M)$, в тот момент, когда она находилась на азимуте $\psi_j$ $(0 \le j \le N)$.

Здесь $$\psi_j = \psi_л - \vartheta_j. \qquad (5)$$

Тогда дискретная поверхность $S_{i,j}(x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ будет описана системой уравнений

$$\begin{cases} \bar{x}_{i,j} = \bar{r}_i \sin(\psi_л - \vartheta_j) - \bar{V}_x \vartheta_j; \\ \bar{y}_{i,j} = -\bar{V}_y \vartheta_j; \\ \bar{z}_{i,j} = \bar{r}_i \cos(\psi_л - \vartheta_j), \end{cases} \quad \text{где } 0 \le \bar{r}_i \le 1; \quad \psi_л \le \vartheta_j \le \psi_л + 2\pi . \qquad (6)$$

На рис. 2 показаны формы линейных вихревых моделей двух-, трех- и четырехлопастного винтов в диапазоне $0 \le \bar{V} \le 0{,}3$ при $c_т = 0{,}04$.

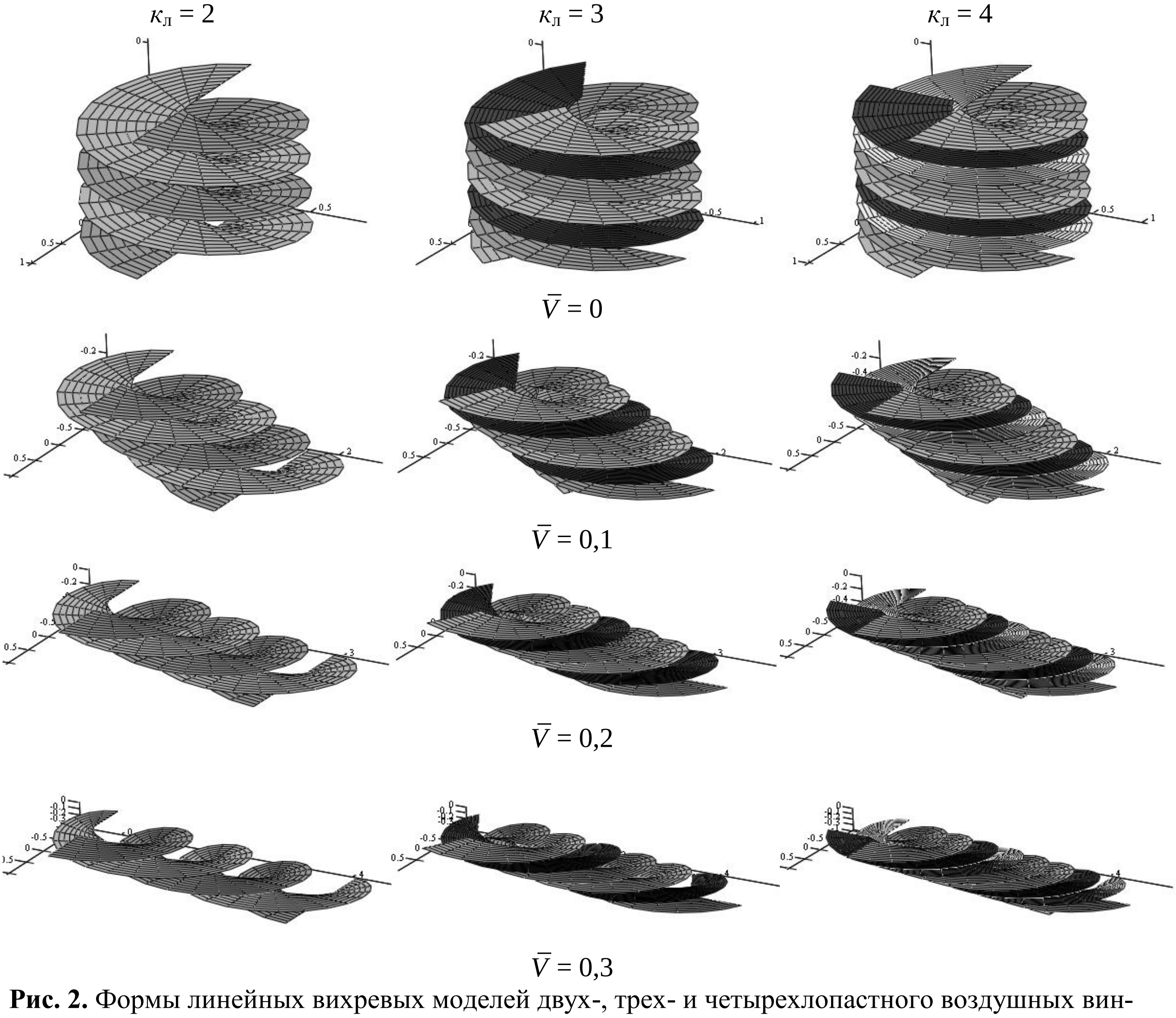



**Рис. 2.** Формы линейных вихревых моделей двух-, трех- и четырехлопастного воздушных винтов в диапазоне скоростей $0 \le \bar{V} \le 0{,}3$ при $c_т = 0{,}04$

Рассмотрим элементарную ячейку вихревого слоя (рис. 3), представляющую собой пространственный четырехугольник, вершинами которого являются точки $S_{i,j}$, $S_{i+1,j}$, $S_{i,j+1}$, $S_{i+1,j+1}$. В общем случае этот четырехугольник не является плоской фигурой, поэтому будем предполагать, что ячейка состоит из двух треугольников, образованных диагональю, проходящей через точки $S_{i,j}$ и $S_{i+1,j+1}$. В точке $S_{i,j}$ можно построить два вектора, направленные по нормалям к плоскости одного $\boldsymbol{n}_A$ и другого $\boldsymbol{n}_B$ треугольников.

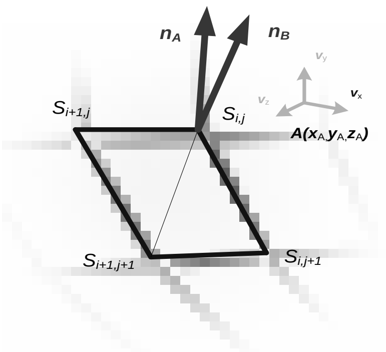



**Рис. 3.** Ячейка вихревого слоя в виде пространственного четырехугольника

Вершины первой треугольной панели определены векторами $\boldsymbol{S}_{i,j}$, $\boldsymbol{S}_{i+1,j}$ и $\boldsymbol{S}_{i+1,j+1}$, вершины второй панели - векторами $\boldsymbol{S}_{i,j}$, $\boldsymbol{S}_{i,j+1}$ и $\boldsymbol{S}_{i+1,j+1}$.

В произвольной точке пространства $\boldsymbol{A}(x_A, y_A, z_A)$ эта ячейка, покрытая распределенным по её поверхности вихревым слоем, создает индуктивную скорость $\boldsymbol{v}_A(x_A, y_A, z_A)$, которая подлежит определению.

Будем вычислять её по отдельности от каждого треугольника. Для этого необходимо определить координаты точки $\boldsymbol{A}(x_A, y_A, z_A)$ относительно систем осей координат, связанных с плоскостью треугольника. Опишем алгоритм этой операции.

Пусть в базовой декартовой системе осей координат *OXYZ* задана произвольная треугольная панель (рис. 8), вершины которой определены векторами $\boldsymbol{S}_{i,j}$, $\boldsymbol{S}_{i+1,j}$ и $\boldsymbol{S}_{i+1,j+1}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_{i,j} &= x_{i,j}\,\boldsymbol{i} + y_{i,j}\,\boldsymbol{j} + z_{i,j}\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{S}_{i+1,j} &= x_{i+1,j}\,\boldsymbol{i} + y_{i+1,j}\,\boldsymbol{j} + z_{i+1,j}\,\boldsymbol{k}; \\ \boldsymbol{S}_{i+1,j+1} &= x_{i+1,j+1}\,\boldsymbol{i} + y_{i+1,j+1}\,\boldsymbol{j} + z_{i+1,j+1}\,\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки $S_{i,j}$, $S_{i+1,j}$ и $S_{i+1,j+1}$

$$\begin{vmatrix} x - x_{i,j} & y - y_{i,j} & z - z_{i,j} \\ x_{i+1,j} - x_{i,j} & y_{i+1,j} - y_{i,j} & z_{i+1,j} - z_{i,j} \\ x_{i+1,j+1} - x_{i,j} & y_{i+1,j+1} - y_{i,j} & z_{i+1,j+1} - z_{i,j} \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Приводя уравнение (8) к каноническому виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{9}$$

можно показать, что его коэффициенты равны:

$$\begin{aligned} A &= y_{i,j}(z_{i+1,j} - z_{i+1,j+1}) + y_{i+1,j}(z_{i+1,j+1} - z_{i,j}) + y_{i+1,j+1}(z_{i,j} - z_{i+1,j}); \\ B &= z_{i,j}(x_{i+1,j} - x_{i+1,j+1}) + z_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) + z_{i+1,j+1}(x_{i,j} - x_{i+1,j}); \\ C &= x_{i,j}(y_{i+1,j} - y_{i+1,j+1}) + x_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i,j}) + x_{i+1,j+1}(y_{i,j} - y_{i+1,j}); \\ D &= -(x_{i,j}A + y_{i,j}B + z_{i,j}C). \end{aligned} \tag{10}$$

Эти коэффициенты однозначно определяют вектор нормали, восстановленной из начала координат *O* к плоскости (9)

$$\boldsymbol{n}_o = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}, \tag{11}$$

где

$$\cos\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = -sign(D)\frac{\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Зададим в плоскости $S_{i,j}$, $S_{i+1,j}$, $S_{i+1,j+1}$ новую правую декартову систему осей координат $O_1X_1Y_1Z_1$ таким образом, чтобы её центр $O_1$ совпадал с точкой $S_{i,j}$, ось $O_1X_1$ была направлена вдоль линии $S_{i,j}$, $S_{i+1,j+1}$, а ось $O_1Y_1$ – по нормали $\boldsymbol{n}_o$ к плоскости треугольника (рис. 4). Определим направления ортогональной системы её базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

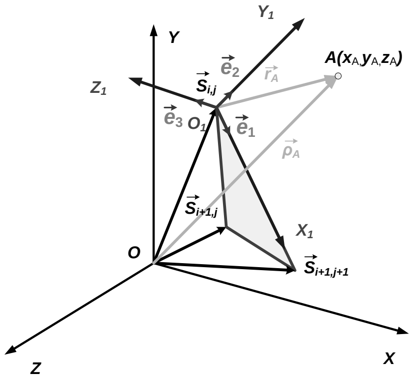



**Рис. 4.** К построению системы осей координат $O_1X_1Y_1Z_1$, связанной с плоскостью площадки

Вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен вдоль линии $S_{i,j}$, $S_{i+1,j+1}$, которая задана вектором

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{S}_{i+1,j+1} - \boldsymbol{S}_{i,j}.$$

Поэтому

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = e_{1x}\mathbf{i} + e_{1y}\mathbf{j} + e_{1z}\mathbf{k},$$

где $e_{1x} = \dfrac{R_x}{|R|}$; $e_{1y} = \dfrac{R_y}{|R|}$; $e_{1z} = \dfrac{R_z}{|R|}$

Вектор $\boldsymbol{e}_2$ совпадает с нормалью к плоскости, следовательно,

$$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n}_o = e_{2x}\boldsymbol{i} + e_{2y}\boldsymbol{j} + e_{2z}\boldsymbol{k}, \tag{12}$$

где $e_{2x} = \cos\alpha$; $e_{2y} = \cos\beta$; $e_{2z} = \cos\gamma$,

определяются по формуле (11)

Третий базисный вектор $\boldsymbol{e}_3$ образует с первыми двумя правую декартову систему координат, поэтому находится из условия

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2.$$

Его проекции на базовую систему осей координат будут равны

$$\boldsymbol{e}_3 = e_{3x}\boldsymbol{i} + e_{3y}\boldsymbol{j} + e_{3z}\boldsymbol{k}, \tag{13}$$

где

$$e_{3x} = \begin{vmatrix} e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2y} & e_{2z} \end{vmatrix}; \quad e_{3y} = -\begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2z} \end{vmatrix}; \quad e_{3z} = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{2y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{vmatrix}.$$

Составим матрицу перехода из системы осей $OXYZ$ в систему $O_1X_1Y_1Z_1$

$$C_{(0)}^{(1)} = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix} \tag{14}$$

и запишем окончательную формулу пересчета координат точки $\boldsymbol{A}(x_A, y_A, z_A)$.

Задавая её положение в системе осей $OXYZ$ вектором $\boldsymbol{\rho}_A$ (рис. 4)

$$\boldsymbol{\rho}_A = x_A\,\boldsymbol{i} + y_A\,\boldsymbol{j} + z_A\,\boldsymbol{k},$$

получим вектор

$$\mathbf{r}_A = C_{(0)}^{(1)}(\rho_A - \mathbf{S}_{i,j}). \tag{15}$$

Отметим, что обратный переход из системы осей $O_1X_1Y_1Z_1$ в систему $OXYZ$ выполняется с помощью матрицы, которая получается транспонированием матрицы (14).

### Индуктивная скорость от треугольной вихревой панели в произвольной точке пространства

Рассмотрим вихревую панель в виде треугольника $BCD$, произвольно расположенного в плоскости $XOZ$ правой декартовой системы осей координат (рис. 5). Треугольник ограничен отрезками прямых $L_1$, $L_2$, $L_3$, уравнения которых имеют вид:

$$z_k(x) = u_k x + v_k; \quad k = 1, 2, 3, \tag{16}$$

где
$$u_1 = \frac{z_D - z_B}{x_D - x_B};\quad u_2 = \frac{z_C - z_B}{x_C - x_B};\quad u_3 = \frac{z_D - z_C}{x_D - x_C};$$
$$v_1 = \frac{z_B x_D - z_D x_B}{x_D - x_B};\quad v_2 = \frac{z_B x_C - z_C x_B}{x_C - x_B};\quad v_3 = \frac{z_C x_D - z_D x_C}{x_D - x_C}.$$

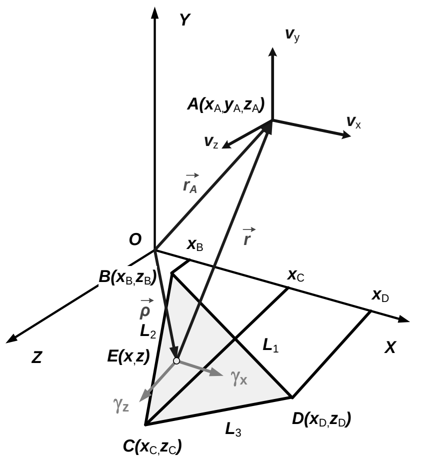



**Рис. 5.** Треугольная вихревая панель, произвольно расположенная в плоскости *XOZ*

В соответствии с теоремой Гельмгольца панель *BCD* покрыта непрерывным вихревым слоем, расположенным в той же плоскости
$$\vec{\gamma}(x,z) = \left\{\gamma_x(x,z), 0, \gamma_z(x,z)\right\}. \tag{17}$$

Будем предполагать, что каждая из компонент вихревого слоя описывается соответствующей линейной функцией от $x$ и $z$:
$$\gamma_\nu(x,z) = \alpha_\nu x + \beta_\nu z + \delta_\nu;\quad \nu = x, z, \tag{18}$$
коэффициенты $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\delta_\nu$ которой однозначно определяются значениями циркуляций $\gamma_{\nu B}$, $\gamma_{\nu C}$, $\gamma_{\nu D}$ в вершинах треугольника $B(x_B, z_B)$, $C(x_C, z_C)$, $D(x_B, z_B)$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки, для коэффициентов $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, $\delta_\nu$ можно получить следующие соотношения
$$\alpha_\nu = \frac{\Delta x_\nu}{\Delta_0};\quad \beta_\nu = \frac{\Delta z_\nu}{\Delta_0};\quad \delta_\nu = \frac{\Delta\gamma_\nu}{\Delta_0};\quad \nu = x, z,$$
где
$$\Delta x_\nu = \gamma_{\nu B}(z_C - z_D) + \gamma_{\nu C}(z_D - z_B) + \gamma_{\nu D}(z_B - z_C);$$
$$\Delta z_\nu = \gamma_{\nu B}(x_D - x_C) + \gamma_{\nu C}(x_C - x_D) + \gamma_{\nu D}(x_C - x_B);$$
$$\Delta\gamma_\nu = \gamma_{\nu B}(x_C z_D - x_D z_C) + \gamma_{\nu C}(x_D z_B - x_B z_D) + \gamma_{\nu D}(x_B z_C - x_C z_B);$$
$$\Delta_0 = x_C(z_D - x_B) + x_B(z_C - z_D) + x_D(z_B - z_C).$$

Получим выражение для вычисления индуктивной скорости в произвольной точке пространства $A(x_A, y_A, z_A)$ от панели *BCD*, покрытой вихревым слоем $\vec{\gamma}(x,z)$ (17)
$$\vec{\mathbf{v}} = \iint\limits_{F_{BCD}} d\vec{\mathbf{v}}. \tag{19}$$

Индуктивную скорость $d\vec{\mathbf{v}}$ от элемента вихря $d\boldsymbol{\Gamma}$ найдем по формуле Био-Савара [8] и перейдем в ней к непрерывно распределенному вихревому слою $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(x, z)$
$$d\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{\Gamma}} \times \vec{\boldsymbol{r}}}{4\pi|r|^3} = \frac{\vec{\gamma} \times \vec{\boldsymbol{r}}}{4\pi|r|^3} dxdz. \tag{20}$$

Подставим полученное выражение в интеграл (19), тогда
$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{F_{BCD}} \frac{\vec{\gamma}(x,z) \times \vec{\boldsymbol{r}}}{|r|^3} dxdz, \tag{21}$$
где $\vec{\boldsymbol{r}}$ – радиус-вектор, проведенный из текущей точки интегрирования $E(x, z)$ на панели *BCD* до точки *A*
$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_A - \vec{\rho}.$$

Принимая во внимание, что
$$\vec{\boldsymbol{r}}_A = \left\{x_A, y_A, z_A\right\} \text{ и } \vec{\rho} = \left\{x, 0, z\right\}, \tag{22}$$
раскроем в (21) векторное произведение с учетом (22) и запишем формулы для вычисления индуктивной скорости в проекциях на координатные оси системы *OXYZ:*

$$v_x = -\frac{y_A}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{\gamma_z(x,z)dxdz}{|r|^3}; v_z = \frac{y_A}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{\gamma_x(x,z)dxdz}{|r|^3};$$
$$v_y = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{\left[\gamma_z(x,z)(x_A - x) - \gamma_x(x,z)(z_A - z)\right]dxdz}{|r|^3}. \tag{23}$$

Вычислим модуль вектора $\vec{r}$ и запишем его как функцию от $z$

$$|r| = \sqrt{(x_A - x)^2 + y_A^2 + (z_A - z)^2} = \sqrt{z^2 + Bz + C(x)}, \tag{24}$$

где $B = -2z_A;\quad C(x) = x^2 + f_1 x + f_0;\quad f_1 = -2x_A;\quad f_0 = x_A{}^2 + y_A{}^2 + z_A{}^2.$

Подставив (24) в (23) и раскрыв законы изменения погонных циркуляций по поверхности панели в соответствии с выражением (17), будем иметь:

$$v_x = -\frac{y_A}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)dxdz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}};$$
$$v_y = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{\left[(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)(x_A - x) - (\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)(z_A - z)\right]dxdz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}}; \tag{25}$$
$$v_z = \frac{y_A}{4\pi}\iint\limits_{F_{BCD}} \frac{(\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)dxdz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Перейдем в формулах (25) от интеграла по поверхности $F_{\mathrm{BCD}}$ к двойному интегралу по координатам $x$ и $z$. Разобьем треугольник $BCD$ на два участка, и запишем внешний интеграл по переменной $x$, а внутренний – по переменной $z$. Получим:

$$v_x = -\frac{y_A}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}} + \int_{x_C}^{x_D} dx \int_{z_1(x)}^{z_3(x)} \frac{(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}}\right\};$$
$$v_y = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\left[(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)(x_A - x) - (\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)(z_A - z)\right]dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \int_{x_C}^{x_D} dx \int_{z_1(x)}^{z_3(x)} \frac{\left[(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)(x_A - x) - (\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)(z_A - z)\right]dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}; \tag{26}$$
$$v_z = \frac{y_A}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C} dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{(\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}} + \int_{x_C}^{x_D} dx \int_{z_1(x)}^{z_3(x)} \frac{(\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)dz}{\left[z^2 + Bz + C(x)\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Преобразуем числители в интегралах для $v_y$, выделив в них функции от $x$ и от $z$

$$(\alpha_z x + \beta_z z + \delta_z)(x_A - x) - (\alpha_x x + \beta_x z + \delta_x)(z_A - z) = Pz^2 + Q(x)z + R(x), \tag{27}$$

где
$$P = \beta_x, Q(x) = (\beta_z x_A - \beta_x z_A + \delta_x) + (\alpha_x - \beta_z)x;$$
$$R(x) = -\alpha_z x^2 + (\alpha_z x_A - \alpha_x z_A)x + x_A\delta_z - z_A\delta_x.$$

В интегралах для компонентов $v_x$ и $v_z$ выделим аналогичные функции от $x$ и от $z$:

$$S(x) = \alpha_z x + \delta_z;\quad T = \beta_z;\quad V = \beta_x;\quad U(x) = \alpha_x x + \delta_x. \tag{28}$$

Введем типовые интегралы по переменной $z$ вида

$$J_{\text{n}}(x)=\int_{z_H(x)}^{z_B(x)}\frac{z^n dz}{\left[z^2+Bz+C(x)\right]^{\frac{3}{2}}};\ n = 0,\ 1,\ 2. \tag{29}$$

Они берутся аналитически, что позволяет структурно записать формулы (26) в виде:

$$\begin{aligned}
v_x &= -\frac{y_A}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C}(S(x)J_0\left[z_1(x),z_2(x)\right]+TJ_1\left[z_1(x),z_2(x)\right])dx+\right.\\
&\qquad\left.+\int_{x_C}^{x_D}(S(x)J_0\left[z_1(x),z_3(x)\right]+TJ_1\left[z_1(x),z_3(x)\right])dx\right\};\\
v_y &= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C}(PJ_2\left[z_1(x),z_2(x)\right]+Q(x)J_1\left[z_1(x),z_2(x)\right]+R(x)J_0\left[z_1(x),z_2(x)\right])dx+\right.\\
&\qquad\left.+\int_{x_C}^{x_D}(PJ_2\left[z_1(x),z_3(x)\right]+Q(x)J_1\left[z_1(x),z_3(x)\right]+R(x)J_0\left[z_1(x),z_3(x)\right])dx\right\};\\
v_z &= \frac{y_A}{4\pi}\left\{\int_{x_B}^{x_C}(U(x)J_0\left[z_1(x),z_2(x)\right]+PJ_1\left[z_1(x),z_2(x)\right])dx+\right.\\
&\qquad\left.+\int_{x_C}^{x_D}(U(x)J_0\left[z_1(x),z_3(x)\right]+PJ_1\left[z_1(x),z_3(x)\right])dx\right\}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Выражения (30) для компонентов индуктивной скорости можно существенно упростить, преобразуя их с учетом коэффициентов $\alpha_x$, $\beta_x$, $\delta_x$, $\alpha_z$, $\beta_z$, $\delta_z$ в формулах (27) и (28), и вводя три типовых интеграла по переменной $x$ вида:

$$\begin{aligned}
P_{n,H,B}(G,H)&=\int_G^H J_0\left[z_H(x),z_B(x)\right]x^n dx, \quad n=0,1,2; \quad H=1; \quad B=2,3;\\
Q_{n,H,B}(G,H)&=\int_G^H J_1\left[z_H(x),z_B(x)\right]x^n dx, \quad n=0,1; \quad H=1; \quad B=2,3;\\
R_{n,H,B}(G,H)&=\int_G^H J_2\left[z_H(x),z_B(x)\right]x^n dx, \quad n=0; \quad H=1; \quad B=2,3.
\end{aligned} \tag{31}$$

Интегралы (31) сводятся к типовым интегралам вида:

$$I_n(a,b,c,G,H)=\int_G^H\frac{x^n dx}{[(x-x_A)^2+y_A{}^2]\sqrt{ax^2+bx+c}};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \tag{32}$$

$$S_n(a,b,c,G,H)=\int_G^H\frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};\ n = -1,0,\ 1, \tag{33}$$

где $a_k=u_k{}^2+1;\quad b_k=u_k(2v_k+B)+f_1;\quad c_k=v_k(v_k+B)+f_0;\ k=B,H$, (34)

которые взяты аналитически.

В результате выражения (30) приобретают вид:

$$\begin{aligned}
&v_x=-\frac{y_A}{4\pi}(\alpha_z\Delta P_1+\delta_z\Delta P_0+\beta_z\Delta Q_0);\ v_z=\frac{y_A}{4\pi}(\alpha_x\Delta P_1+\delta_x\Delta P_0+\beta_x\Delta Q_0);\\
&v_y=\frac{1}{4\pi}[\beta_x\Delta R_0+(\beta_z x_A-\beta_x z_A+\delta_x)\Delta Q_0+(\alpha_x-\beta_z)\Delta Q_1-\alpha_z\Delta P_2+\\
&\qquad+(\alpha_z x_A-\alpha_x z_A-\delta_z)\Delta P_1+(\delta_z x_A-\delta_x z_A)\Delta P_0],
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta P_0=P_{0,1,2}(x_B,x_C)+P_{0,1,3}(x_C,x_D); \quad \Delta P_1=P_{1,1,2}(x_B,x_C)+P_{1,1,3}(x_C,x_D);\\
&\Delta P_2=P_{2,1,2}(x_B,x_C)+P_{2,1,3}(x_C,x_D); \quad \Delta Q_0=Q_{0,1,2}(x_B,x_C)+Q_{0,1,3}(x_C,x_D);\\
&\Delta Q_1=Q_{1,1,2}(x_B,x_C)+Q_{1,1,3}(x_C,x_D); \quad \Delta R_0=R_{0,1,2}(x_B,x_C)+R_{0,1,3}(x_C,x_D).
\end{aligned}$$

Несмотря на структурную простоту формул (35), входящие в них коэффициенты $\Delta P_0$, $\Delta P_1$, $\Delta P_2$, $\Delta Q_0$, $\Delta Q_1$, $\Delta R_0$ представляют собой функции 15 переменных, которыми являются: координаты точки $A$ ($x_A$, $y_A$, $z_A$), вершин треугольника $BCD$ ($x_B$, $z_B$, $x_C$, $z_C$, $x_D$, $z_D$), а также значения в этих точках погонных циркуляций $\gamma_x$ и $\gamma_z$ ($\gamma_{xB}$, $\gamma_{xC}$, $\gamma_{xD}$, $\gamma_{zB}$, $\gamma_{zC}$, $\gamma_{zD}$). Вычисление коэффициентов $\Delta P_0$, $\Delta P_1$, $\Delta P_2$, $\Delta Q_0$, $\Delta Q_1$, $\Delta R_0$ сведено к элементарным функциям, но реализуется довольно объемным алгоритмом. Поэтому оптимальный по числу операторов и быстродействию алгоритм может быть создан в системах программирования, где разрешено описание одних процедур внутри других (иерархическая схема) в сочетании с возможностью использования во внутренних процедурах переменных, описанных во внешних и не являющихся формальными параметрами внутренних.

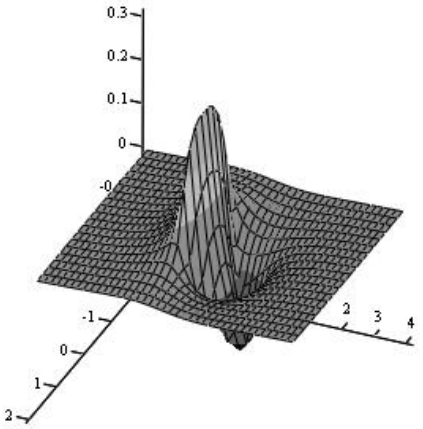
Рассмотрим в качестве примера площадку в виде равностороннего треугольника *BCD* с координатами вершин:

$$x_B = -\sqrt{3}/2; \quad z_B = -1/2; \quad x_C = 0; \quad z_C = 1; \quad x_D = \sqrt{3}/2; \quad z_D = -1/2, \qquad (36)$$

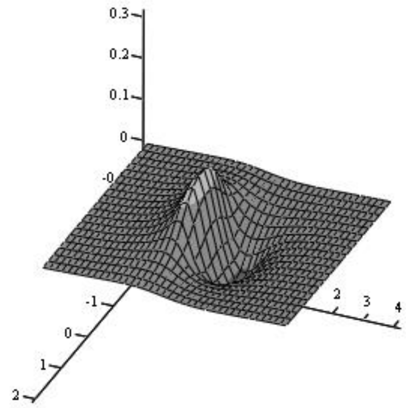
покрытого равномерно распределенным однокомпонентным вихревым слоем с погонной циркуляцией $\gamma_x(x,z) = 1, \quad \gamma_z(x,z) = 0$. Тогда в соответствии с формулами (18):

$$\alpha_x = 0; \beta_x = 0; \delta_x = 1; \alpha_z = 0; \beta_z = 0; \delta_z = 0.$$

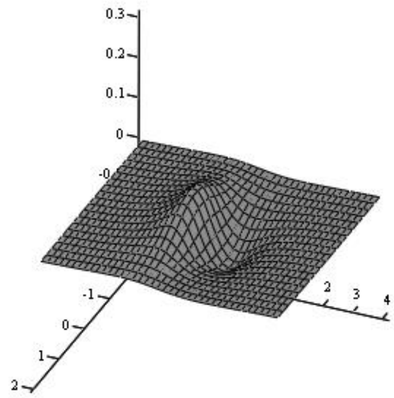
На рис. 6 показаны законы $v_y(x_A, z_A)$ на различных удалениях $y_A$ от плоскости треугольника *BCD*. Видно, что поле скоростей $v_y(x_A, z_A)$ на равных удалениях вверх и вниз от плоскости площадки идентично. При приближении к границам площадки абсолютные значения скорости возрастают, а при удалении от плоскости поля скоростей выравниваются.



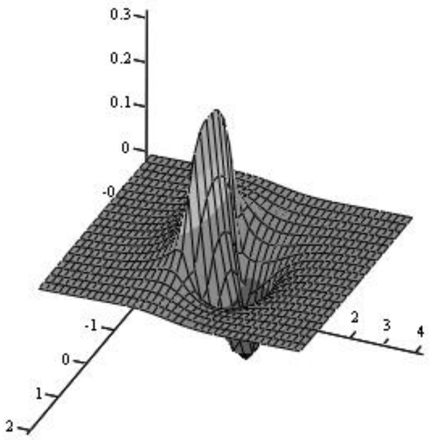

$y_A = 0{,}1$



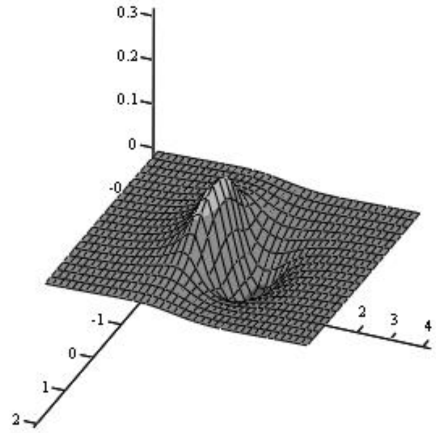

$y_A = 0{,}3$



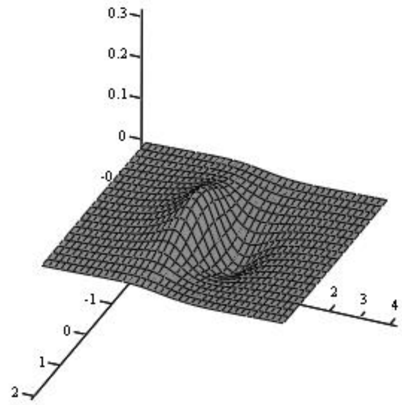

$y_A = 0{,}5$




$y_A = -0{,}1$




$y_A = -0{,}3$




$y_A = -0{,}5$

**Рис. 6.** Поле скоростей $v_y(x_A, z_A)$ на удалениях $y_A = \pm\, 0{,}1; \pm\, 0{,}3; \pm\, 0{,}5$ от плоскости панели при $\gamma_x(x,z) = 1, \quad \gamma_z(x,z) = 0$

Анализ показывает, что функции (31) $P_{n,H,B}(G,H)$, $Q_{n,H,B}(G,H)$, $R_{n,H,B}(G,H)$ имеют особенность при $y_A \to 0$, обусловленную входящими в них типовыми интегралами $I_n(a_k, b_k, c_k, G, H), \quad n = 0,1,2,3$. Поэтому точное значение скорости $v_y$ на поверхности площадки может быть определено путем вычисления пределов при $y_A \to 0$ по правилу Лопиталя так же, как это было сделано в вихревой модели крыла [9].

Будем рассматривать только нормальный компонент скорости $v_y$, т.к. компоненты $v_x$ и $v_z$

при $y_A = 0$ обращаются в ноль за границами треугольника *BCD*, где нет вихревого слоя, и терпят разрыв в его пределах, где вихревой слой присутствует.

Принадлежность точки *A* границам контура *BCD* определяется условиями:

$$z_A = z_k(x_A) = u_k x_A + v_k; \quad k = 1, 2, 3, \tag{37}$$

при которых выражения (34) для коэффициентов $a_k$, $b_k$, $c_k$ приобретают вид:

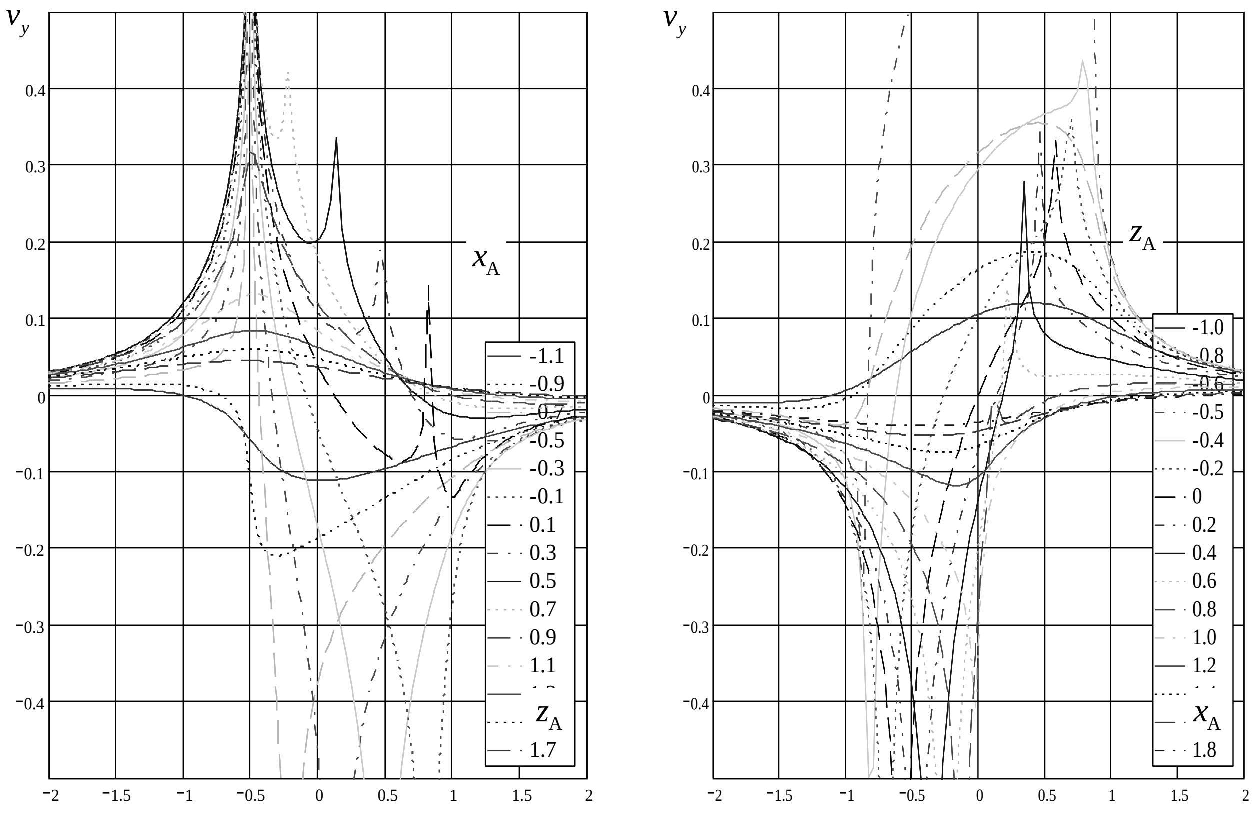
$$a_k = u_k^2 + 1; \; b_k = -2x_A a_k; \; c_k = x_A^2 a_k, \tag{38}$$

что существенно упрощает представление интегралов (32), (33) на границах контура.

Если точка *A* лежит на линии контура, но расположена вне границ участка интегрирования ($x_A < G$ или $x_A > H$), то интегралы (32), (33) имеют решение. В случае $G \le x_A \le H$ имеет место особенность, обусловленная разрывом второго рода подынтегральной функции на участке интегрирования.

Вскрытие неопределенности позволяет вычислить индуктивную скорость в плоскости треугольной вихревой панели через элементарные функции всюду, кроме границ контура. Рассмотрим в качестве примера панель в виде равностороннего треугольника (36), покрытого однокомпонентным вихревым слоем $\gamma_x = 1$.

На рис. 7 построены параметрические зависимости $v_y(x, z)$ при $y_A = 0$ в диапазонах $-2 \le x_A \le 2$, $-2 \le z_A \le 2$. Видно, что поле скоростей симметрично относительно оси *OZ* и имеет разрыв второго рода при пересечении границ контура треугольника *BCD*.




а б

**Рис. 7.** Законы изменения индуктивной скорости $v_y(x_A, z_A)$ в плоскости треугольной панели, покрытой равномерным однокомпонентным вихревым слоем $\gamma_x = 1$:
а – $v_y(z_A)$ при $x_A = \text{const}$; б – $v_y(x_A)$ при $z_A = \text{const}$

Подтверждением достоверности решения, полученного для случая расположения точки *A* в плоскости вихревой панели, служат зависимости вертикальной составляющей индуктивной скорости $v_y(y_A)$, показанные на рис. 8 в диапазоне $-2 \le y_A \le 2$. Они имеют гладкий характер при переходе через точку $y_A = 0$, несмотря на то что в этом случае работает отдельная ветвь алгоритма. При всех сочетаниях координат $x_A$ и $z_A$ зависимости $v_y(y_A)$ имеют в этой точке экстремум за исключением случаев, когда точка *A* совпадает с границами контура.

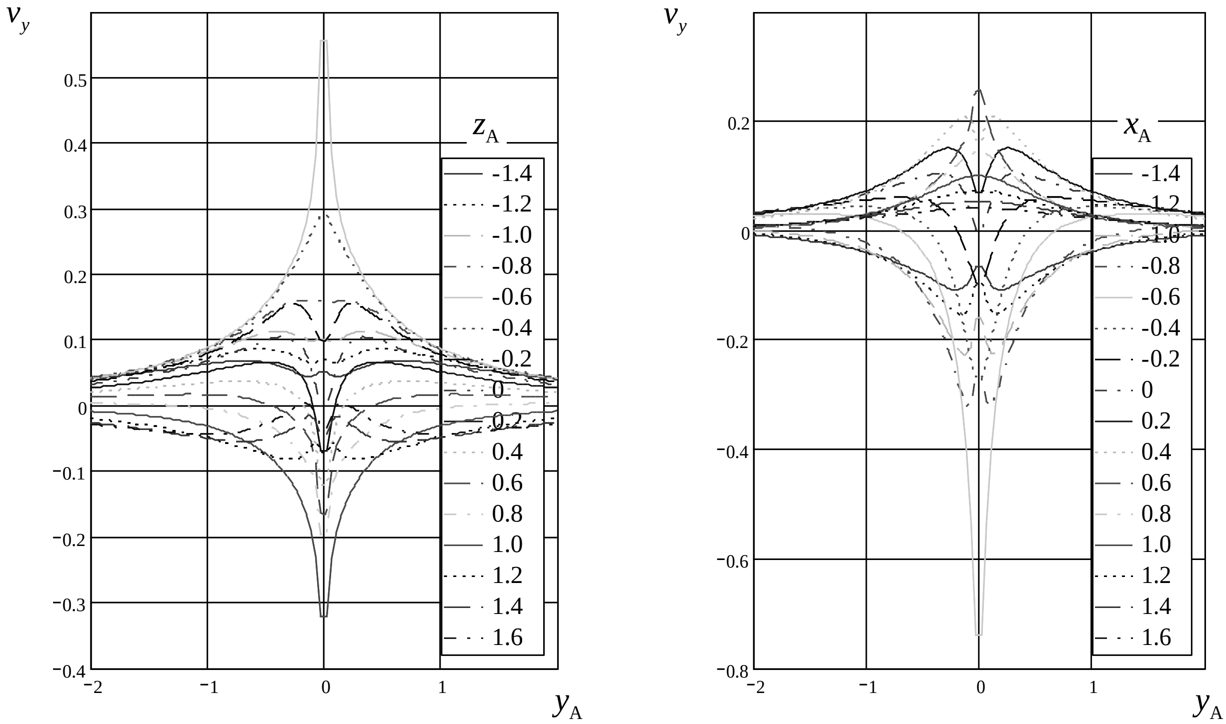



**Рис. 8.** Законы изменения вертикальной компоненты $v_y$ индуктивной скорости, направленной по нормали к плоскости треугольной панели, покрытой равномерным двухкомпонентным вихревым слоем $\gamma_x = \gamma_z = 1$:
а – $v_y(y_A)$ при $x_A = 0$, $z_A = \text{const}$; б – $v_y(y_A)$ при $z_A = 0$, $x_A = \text{const}$

Исключение составляет случай, когда точка *A* попадает на диагональ ячейки $S_{i,j}S_{i+1,j+1}$ и формулы расчета индуктивной скорости от обеих панелей имеют особенность.

В зависимости от формы ячейки возможны два варианта.

1. Ячейка плоская – в этом случае особенность является устранимой и решение находится численно, как среднее арифметическое от скоростей в двух точках $P_1$ и $P_2$, расположенных симметрично на расстоянии ε относительно диагонали $S_{i,j}S_{i+1,j+1}$.

2. Ячейка пространственная – в этом случае следует применить альтернативную разбивку ячейки на два треугольника диагональю $S_{i+1,j}S_{i,j+1}$. Тем самым точка *A* выводится из плоскостей обеих треугольных панелей и для вычисления индуктивной скорости можно воспользоваться алгоритмами, описанными выше для случая $|y_A| > 0$.

Для вычисления индуктивного воздействия от вихревой пелены необходимо просуммировать скорости, создаваемые всеми ячейками, образующими пелену

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{пел}}(A,\psi_{\text{л}}) = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{K-1}\vec{\boldsymbol{v}}_A(A,\, S_{i,j},\, S_{i+1,j},\, S_{i,j+1},\, S_{i+1,j+1})\,, \tag{39}$$

где $K$ – общее число расчетных полос по длине пелены, $K = N\, n_{\text{об}}$.

**Выводы**

1. Математическая модель винта, построенная на основе вихревой пелены с непрерывно распределенной по её участкам погонной циркуляцией двухкомпонентного вихревого слоя, да-

ет возможность вычислять индуктивные скорости в произвольной точке пространства непосредственно на вихревой пелене и на поверхности, с которой сходит вихревой слой.

2. Алгоритм вычисления компонентов индуктивной скорости, сведенный к элементарным функциям, показал устойчивую работу для треугольных вихревых панелей, что позволяет строить на их основе итерационные методы расчета воздушной нагрузки, распределенной по размаху лопасти, создающей подъемную силу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Баскин В.Э. и др.** Теория несущего винта. - М.: Машиностроение, 1973.
2. **Миль М.Л. и др.** Вертолеты. Расчет и проектирование. Т. 1. Аэродинамика. - М.: Машиностроение, 1966.
3. **Поляхов Н.Н., Шестернина З.Н.** К вопросу о сходимости метода дискретных вихрей // Вестник ЛГУ. - 1979. - №7.
4. **Игнаткин Ю.М., Гревцов Б.С., Макеев П.В., Шомов А.И.** Метод расчета аэродинамических характеристик несущих винтов на режимах осевого и косого обтекания на основе нелинейной лопастной вихревой модели // Труды Восьмого форума Российского вертолетного общества. - М.: МАИ, 2008.
5. **Белоцерковский С.М., Локтев Б.Е., Ништ М.И.** Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов. - М.: Машиностроение, 1992.
6. **Жилин Ю.Л., Лободина Л.Ф.** Вычисление поля скоростей от панели с параллельными кромками // Труды ЦАГИ. - 1989. - Вып. 2442.
7. **Шайдаков В.И.** Обобщенная дисковая вихревая теория и методы расчета индуктивных скоростей несущего винта вертолета // Проектирование вертолетов. - М.: МАИ, 1977. - Вып. 406.
8. **Лойцзянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973.
9. **Артамонов Б.Л.** Вихревая модель крыла с непрерывно распределенной циркуляцией вихревого слоя // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2014. - № 200.

## VORTEX MODEL OF ROTOR WITH CONTINUOUSLY DISTRIBUTED CIRCULATION OF VORTEX LAYER

**Artamonov B.L.**

The paper considers the linear vortex model of rotor which is the three-dimensional helicoid sheet of given geometry. This three-dimensional helicoid sheet is coated y continuously distributed two-component vortex layer. Triangular panels are the elements of discretization of the sheet. These triangular panels are arbitrarily oriented in space. The method, algorithms and programs of calculation of three components of induced velocity vector. Were created this velocity is induced by the elementary area, which is arbitrarily oriented and coated by a vortex layer. The intensity of the vortex layer varies linearly over the surface of the elementary area. The solution was obtained in elementary functions.

**Keywords:** vortex model, rotor, circulation, upper layer.

## Сведения об авторе

**Артамонов Борис Лейзерович**, 1947 г.р., окончил МАИ (1972), кандидат технических наук, старший научный сотрудник, заместитель заведующего кафедрой проектирования вертолетов МАИ (Национального исследовательского университета), автор более 180 научных работ, область научных интересов – аэромеханика винтокрылых летательных аппаратов вертикального взлета и посадки.