

УДК 532.5.011.12

ИНЕРЦИОННЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРЕ МАЛОЙ ВЫСОТЫ С ВРАЩАЮЩИМИСЯ ОСНОВАНИЯМИ

В.К. АХМЕТОВ, Ю.В. МЕДВЕДЕВ, В.Я. ШКАДОВ

В статье представлена схема численного решения задачи о движении несжимаемой жидкости в ограниченной цилиндрической области постоянного радиуса с вращающимися основаниями. Исследуются различные режимы течения и сопряженные эффекты возникновения рециркуляционных зон в цилиндрических областях малой высоты.

Ключевые слова: закрученные течения, численные методы, опорный подшипник.

Задача о течении жидкости в ограниченной цилиндрической области постоянного радиуса представляет большой интерес для различных технических устройств (биореакторов, опорных подшипников, конструкционных деталей турбореактивных двигателей и т.д.). Интересной особенностью закрученных течений является образование вихревых структур, называемых рециркуляционными зонами. Их изучению и свойствам закрученных течений в открытом канале и в ограниченной цилиндрической области посвящены работы [2; 11; 13; 18]. Несмотря на то что постановки задач имеют отличия, структуры течения (и в особенности рециркуляционных зон) проявляют сходство. Зоны возвратного течения исследуются на различных стадиях перехода от ламинарного режима [11] до периодического [16] и турбулентного [14]. Устойчивость закрученных течений исследовалась в работах [1; 4; 17].

Представленная работа является продолжением исследований [8] численного моделирования закрученных течений в цилиндре малой высоты. Основное внимание уделено изучению возникновения в потоке рециркуляционных зон и их влиянию на гидродинамику течения.

Задача движения жидкости в цилиндрической области с торцевыми протечками актуальна в теории смазки, ее начало было положено Н.П. Петровым. Теория смазки основана на стоковом приближении. В этой работе проводится сравнение математических моделей, используемых для описания течений жидкости в цилиндрической области с вращающимися основаниями. Схемы исследуемых течений изображены на рис. 1.

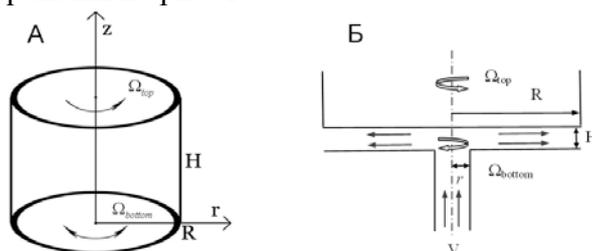


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии течения:
А – замкнутая область; Б – с наличием протока жидкости

Рассматриваемое осесимметричное течение несжимаемой жидкости в отсутствии массовых сил описывается системой уравнений Навье-Стокса и уравнением неразрывности, записанными для удобства в цилиндрической системе координат [3]; распределение температуры описывается уравнением теплопроводности.

В качестве безразмерных параметров задачи выбраны: $\omega = \frac{\Omega_{top}}{\Omega_{bottom}}$ – отношение угловой скорости верхнего цилиндра к угловой скорости нижнего цилиндра; $Re = \frac{\Omega_{top} RH}{\nu}$ – число Рейнольдса,

безразмерная высота цилиндра $h = \frac{H}{R}$ и $Pe = \frac{\Omega_{top}RH}{a}$ – число Пекле. При наличии протока жидкости дополнительно вводятся безразмерные параметры для радиуса канала подачи жидкости $R_0 = r/R$ и скорости подачи жидкости $V_0 = V/(\Omega_{top}R)$.

В безразмерных величинах система уравнений (1) – (4) для переменных функции тока ψ , циркуляции Γ , завихренности Ω , температуры T и давления p переписывается в следующем виде [5]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial(v_r \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(v_z \Omega)}{\partial z} = 2 \frac{\Gamma}{r^3} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Omega)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\Omega; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right); \quad (5)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad v_\varphi = \frac{\Gamma}{r}; \quad \Omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r};$$

где (r, φ, z) – координаты введенной цилиндрической системы координат; (v_r, v_φ, v_z) – радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости соответственно; t – время; ρ – плотность среды; p – давление; ν – кинематическая вязкость; T – температура среды; a – коэффициент температуропроводности.

Начальные и граничные условия для задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Omega(z, r) = \Omega_0(z, r); \\ \text{при } t = 0: & \Gamma(z, r) = \Gamma_0(z, r); \\ & T(z, r) = T_0(z, r); \\ & \Gamma(0, r) = r \cdot \Omega_{bottom}; \\ \text{при } z = 0; 0 \leq r \leq R: & \psi(0, r) = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}; \\ & v_r(0, r) = v_z(0, r) = 0; \\ & T(0, r) = T_{bottom}; \\ & \Gamma(H, r) = r \cdot \Omega_{top}; \\ \text{при } z = H; 0 \leq r \leq R: & \psi(H, r) = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}; \\ & v_r(H, r) = v_z(H, r) = 0; \\ & T(H, r) = T_{top}; \\ & \Gamma(z, 0) = 0; \\ \text{при } r = 0; 0 < z < H: & \psi(z, 0) = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \\ & v_r(z, 0) = v_z(z, 0) = 0; \\ & T(z, 0) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma(z, R) = 0; \\ & \psi(z, R) = 0; \\ & \text{при } r = R; 0 < z < H: \\ & v_r(z, R) = v_z(z, R) = 0; \\ & T(z, R) = 1; \end{aligned} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right);$$

В качестве граничных условий для завихренности Ω используется условие Тома [3]. Поскольку задача (1) – (6) решается методом установления по времени, то начальные условия $\Omega_0(z, r), \Gamma_0(z, r)$ выбираются из удобства для наиболее быстрого получения установившегося течения и отсутствия больших градиентов.

Численное решение поставленной задачи осуществляется по следующей схеме. Расчетная прямоугольная область покрывается равномерной сеткой, в узлах которой вычисляются искомые функции. Для каждого шага по времени эллиптическое уравнение типа Пуассона (3) решается прямым численным методом [15], основанным на разделении переменных и преобразовании Фурье по синусам. Проверка численного метода осуществлена сравнением с численными результатами, полученными в [15] для указанных значений параметров (рис. 2).

На рис. 3 приведены линии тока для указанного набора параметров задачи при наличии подачи жидкости [7; 10]. Как следует из иллюстраций, у нижнего основания цилиндра формируется пузырь – рециркуляционная зона, размеры которой увеличиваются с ростом числа Рейнольдса.

На рис. 4 (А) представлены профили давления на нижнем основании цилиндрической области при указанных значениях параметров в случае увеличения числа Рейнольдса.

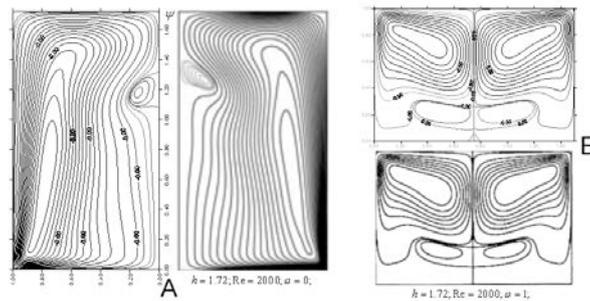


Рис. 2. Сравнение вычисленных линий тока с результатами расчетов [15] (А) и с экспериментальными результатами (Б) [15]

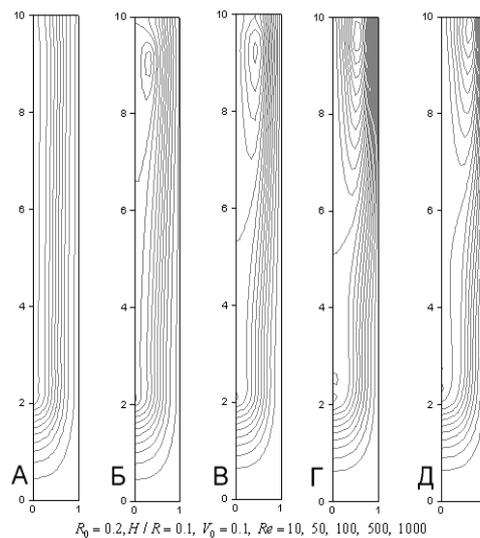


Рис. 3. Линии тока ψ при указанных значениях параметров.

Ось абсцисс – ось симметрии цилиндра, ось ординат – расстояние от оси цилиндра

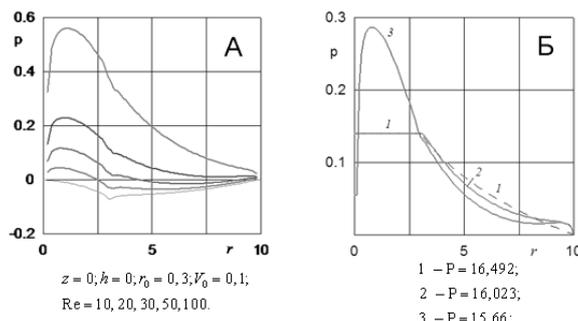


Рис. 4. Распределение давления при указанных параметрах (А) и профили давления (Б) при расчете по: 1 – модели Стокса; 2 – упрощенной модели; 3 – уравнению Пуассона

Для расчета давления и подъемной силы и последующего анализа выбрано несколько моделей разной степени сложности:

- 1) уравнение Пуассона для давления (5) в полной постановке;
- 2) упрощенная модель [13], в которой используется отдельное уравнение для давления при

$$z = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{v_\phi^2}{r};$$

- 3) аналитическое решение для расчета упорных подшипников [9], основанное на модели Стокса:

$$v_r = \frac{1}{2\mu} (z - h) \frac{dp}{dr}; \quad p = p_1 \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/r_0)};$$

Сравнение различных подходов к расчету давления и подъемной силы в упорном подшипнике [6] представлено на рис. 4 (Б). Результаты расчетов по полной модели дают меньшее на 5% значение удерживающей силы, чем по упрощенной теории.

При одних и тех же числах Рейнольдса и скорости подачи жидкости могут реализовываться как течения без образования линий тока, так и течения с зонами возвратно-рециркуляционного течения, размеры и положение которого будут определяться радиусом канала подачи жидкости. При увеличении радиуса R_0 и фиксированных остальных параметрах задачи размеры зоны возвратного течения уменьшаются вплоть до полного ее исчезновения.

Условие $\omega = 0$ влияет на более ранний переход к нестационарному режиму, т.е. пограничный слой, развивающийся у неподвижной стенки, более неустойчив по сравнению с пограничным слоем у подвижного основания цилиндра. Аналогичный результат описан в [17]. Таким образом, добавление вращения для этого основания приводит к повышению устойчивости течения, т.е. сохранения ламинарного режима течения для больших чисел Рейнольдса.

В случае совместного вращения обоих оснований цилиндрической области уменьшение радиуса канала подачи жидкости влияет на структуру линий тока таким же образом, как и в случае с вращением только верхнего основания: с уменьшением радиуса размеры и количество зон рециркуляции уменьшаются даже при относительно больших числах Рейнольдса. Существует критическое значение радиуса канала, при котором в рассматриваемой области зоны обратного тока отсутствуют.

В случае вращения обоих оснований цилиндра с одинаковой скоростью ($\omega=1$), неоднородность, вносимая притоком жидкости у оси цилиндра, быстро затухает при малых числах Рейнольдса. С ростом числа Рейнольдса этого не происходит, и картина течения остается неоднородной во всей рассматриваемой области. При этом с увеличением числа Рейнольдса относительные размеры зон рециркуляции увеличиваются. Уменьшение радиуса канала подачи жидкости таким же образом влияет на зоны обратного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. - Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003.
2. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Развитие и устойчивость закрученных течений // Известия Российской академии наук. Механика Жидкости и Газа. - 1988. - № 4. - С. 3-11.
3. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. Численное исследование рециркуляционных зон в вихревой камере // Аэромеханика и газовая динамика. - 2003. - № 3. - С. 39-45.
4. Ахметов В.К., Шкадов В.Я. О новой вязкой моде неустойчивости свободного вихря // Известия Российской академии наук. Механика Жидкости и Газа. - 1999. - № 6. - С. 76-80.
5. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. - М.: Физматлит, 2010.
6. Воскресенский В.А., Дьяков В.И. Расчет и проектирование опор скольжения (жидкостная смазка). - М.: Машиностроение, 1980.
7. Дроздович В.Н. Газодинамические подшипники. - Л.: Машиностроение, 1976.
8. Медведев Ю.В., Шкадов В.Я. Численное моделирование течений вязкой жидкости в ограниченной цилиндрической области с вращающимися основаниями // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2010. - № 153. - С. 9-12.
9. Чернавский С.А. Подшипники скольжения. - М.: Машгиз, 1963.
10. Шейнберг С.А., Жель В.П., Шишеев М.Д. Опоры скольжения с газовой смазкой. - М.: Машиностроение, 1969.
11. Brons M., Bisgaard A.V. Bifurcation of vortex breakdown patterns in a circular cylinder with two rotating covers // J. Fluid Mech. - 2006. - Vol. 568. - P. 329-349.
12. Brons M., Voigt L.K., Sorensen J.N. Topology of vortex breakdown bubbles in a cylinder with a rotating bottom and a free surface // J. Fluid Mech. - 2001. - Vol. 428. - P. 133-148.
13. Fletcher D.F., Guo B., Langrish T.G. Simulation of turbulent swirl flow in an axisymmetric sudden expansion // AIAA J. - 2001. - Vol. 39. - №1. - P. 96-102.
14. Herrada M.A., Fernandez-Feria R. On the development of the three-dimensional vortex breakdown in cylindrical regions // Physics of Fluids. - 2006.
15. Lopez J.M. Rotating and modulated rotating waves in transitions of an enclosed swirling flow // J. Fluid Mechanics. - 2006. - Vol. 553. - P. 323-346.
16. Lopez J.M., Cui Y.D., Lim T.T. Experimental and numerical investigation of the competition between axisymmetric time-periodic modes in an enclosed swirling flow // Physics of Fluids. - 2006. - Vol. 18.
17. Serre E., Bontoux P., Launder B.E. Direct numerical simulation of transitional turbulent flow in a closed rotor-stator cavity // Flow, Turbulence and Combustion. - 2002. - Vol. 69. - P. 35-50.
18. Shen W.Zh., Sorensen J.N., Michelsen J.A. Numerical study of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom // Physics of Fluids. - 2006. - Vol. 18.

**INERTIAL REGIMES OF VISCOUS FLUID FLOW
IN THE LOW-HEIGHT CYLINDER WITH ROTATING BASES**

Akhmetov V.K., Medvedev Yu.V., Shkhadov V.Ya.

The calculation procedure for numerical simulation of the swirled flow of the incompressible viscous fluid in the cylinder with rotating bases is presented. Different flow regimes and the corresponding recirculating zone evolution are investigated for the cylindrical domains with small heights.

Keywords: swirled flow, numerical methods, block bearing.

Сведения об авторах

Ахметов Вадим Каюмович, 1959 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1981), доктор технических наук, профессор кафедры информатики и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Московский государственный строительный университет», автор более 60 научных работ, область научных интересов – закрученные течения вязкой жидкости и газа, гидродинамическая неустойчивость, двухфазные течения, численные методы гидроаэродинамики.

Медведев Юрий Владимирович, 1985 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2007), младший научный сотрудник НИО-9 ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, автор 20 научных работ, область научных интересов – динамика вязких течений жидкостей и газов, численные методы, авиаэкология.

Шкадов Виктор Яковлевич, 1935 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1958), доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ, автор более 200 научных работ, область научных интересов – динамика вязких жидкостей и газов, гидродинамическая неустойчивость и волны, течения жидкости с поверхностями раздела, численные методы гидроаэродинамики.