УДК 621.391.01

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ СМЕСИ СИГНАЛА И НЕГАУССОВОЙ ПОМЕХИ

В.Д. РУБЦОВ, А.Л. СЕНЯВСКИЙ

В статье предложены методы вычисления плотностей вероятностей огибающей и фазы смеси сигнала и негауссовой помехи с произвольным законом распределения. Эффективность предложенных методов проиллюстрирована на примерах. Показано, что при большом отношении сигнал/помеха распределение огибающей смеси сигнала и помехи совпадает с распределением мгновенных значений помехи, смещенным на величину амплитуды сигнала, при произвольном распределении помехи.

Ключевые слова: огибающая, фаза, негауссова помеха, плотность вероятностей.

Негауссов характер имеют индустриальные и атмосферные помехи, являющиеся основными видами непреднамеренных помех в метровом (МВ) и декаметровом (ДКМВ) диапазонах волн и имеющие квазиимпульсный характер. К негауссовым помехам относятся и помехи от мешающих радиотехнических средств.

Вычисление одномерного распределения огибающей смеси сигнала и негауссовой помехи, как правило, вызывает значительные трудности. При расчете характеристики обнаружения сигнала для не слишком больших значений вероятности пропуска сигнала достаточно знать начальный участок распределения указанного распределения. Рассмотрим метод аппроксимации этого участка.

Представим помеху, зарегистрированную узкополосным приемником, в виде:

$$n(t) = E_n(t)\cos[\omega_0 t - \psi(t)] = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t, \tag{1}$$

где

$$X(t) = E_n(t)\cos\psi(t),\; Y(t) = E_n(t)\sin\psi(t) - \tag{2}$$

квадратурные составляющие помехи, $E_n(t)$ и $\psi(t)$ – ее огибающая и фаза.

Полагаем для простоты, что фаза помехи отсчитывается от фазы сигнала, которую без нарушения общности рассмотрения можно принять равной нулю, и представим сигнал в виде:

$$s(t) = E_s(t)\cos\omega_0 t, \tag{3}$$

где $E_s(t)$ – огибающая сигнала.

Полагая огибающую и фазу помехи статистически независимыми, а фазу – распределенной равномерно, интегральную функцию распределения огибающей смеси сигнала и помехи $F_E(E)$ как вероятность одновременного выполнения двух независимых событий, описываемых неравенствами:

$$\pi - \vartheta \le \psi \le \pi + \vartheta; \tag{4}$$

$$E_s - E \le E_n \le E_s + E, \tag{5}$$

где $E_s \le E$ и $\vartheta = \arcsin(E/E_s)$ – огибающая и фаза смеси сигнала и помехи

Вероятности выполнения этих событий равны:

$$P(\pi - \vartheta \le \psi \le \pi + \vartheta) = \vartheta/\pi = (1/\pi)\arcsin(E/E_s); \tag{6}$$

$$P(E_s - E \le E_n \le E_s + E) = F_{En}(E_s + E) - F_{En}(E_s - E), \quad (7)$$

где $F_{En}(\cdot)$ – интегральная функция распределения огибающей помехи.

Из равенств (6) и (7) для начального участка интегральной функции распределения огибающей помехи, определяемого неравенством $E \le E_s$, можно записать:

$$F_E(E) \approx P(\pi - \vartheta \le \psi \le \pi + \vartheta)\cdot P(E_s - E \le E_n \le E_s + E) =$$
$$= (1/\pi)\arcsin(E/E_s)\,[F_{En}(E_s + E) - F_{En}(E_s - E)],\ E \le E_s, \quad (8)$$

откуда для плотности вероятности огибающей смеси сигнала и помехи имеем:

$$W_E(E) = d\,F_E(E)/dE \approx \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{E_s^2 - E^2}}\left[F_{En}(E_s + E) - F_{En}(E_s - E)\right] + \right.$$
$$\left. + \arcsin(E/E_s)\left[W_{En}(E_s + E) - W_{En}(E_s - E)\right] - \right\},\ E \le E_s\ , \quad (9)$$

где $W_{En}(\cdot)$ – плотность вероятностей огибающей помехи. Как видим, в рамках рассматриваемой аппроксимации достаточно знать распределение огибающей помехи.

В качестве примера на рис. 1 приведены аппроксимации начальных участков функций плотности вероятностей смеси сигнала с нормальной помехой [1] (рис. 1, *а*) и помехой, описываемой моделью Холла и характерной для атмосферных помех в МВ диапазоне [2] (рис. 1, *б*). Штриховыми кривыми представлены аппроксимации (9), соответствующие распределениям огибающей смеси сигнала и помехи для различных значений отношения сигнал/помеха $S = E_s/\sigma$, показанным сплошными кривыми.

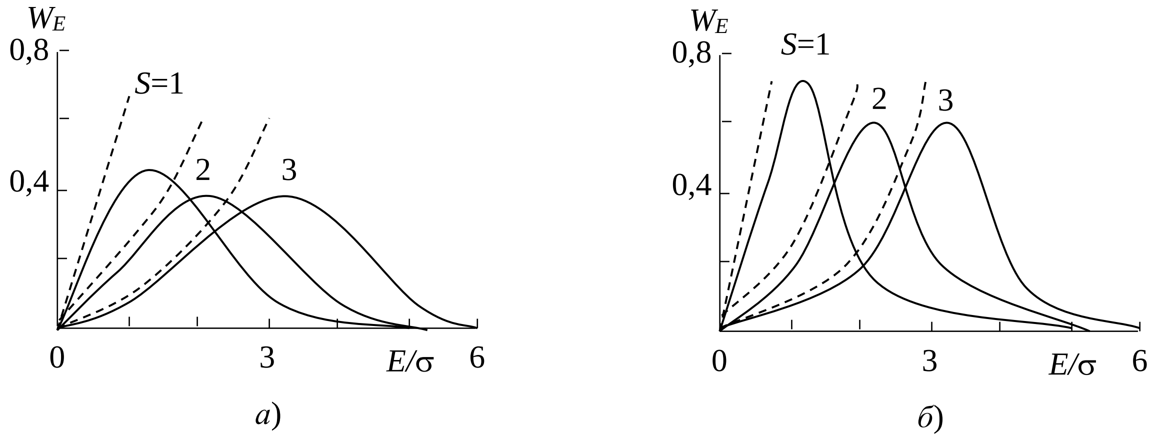

Рис. 1. Аппроксимация начального участка функции плотности вероятностей огибающей смеси сигнала с нормальной (*а*) и негауссовой (*б*) помехами

Известно [1], что при большом отношении сигнал/помеха на выходе узкополосного приемника огибающую смеси сигнала и помехи можно записать как

$$E(t) \approx E_s(t) + X(t). \quad (10)$$

При этом возможно существенное упрощение задачи и плотность вероятностей огибающей смеси сигнала и помехи может быть определена через плотность вероятностей квадратурной составляющей помехи следующим образом:

$$W_E(E) \approx W_X(E - E_s). \tag{11}$$

В [3] показано, что плотность вероятностей квадратурных составляющих помехи совпадает с плотностью вероятностей мгновенных значений при условии, что огибающая и фаза помехи статистически независимы, а фаза распределена равномерно на интервале [$-\pi$, π]. Таким образом, окончательно с учетом (11) получаем:

$$W_E(E) \approx W_n(n - E_s),\ E_s(t)/\sigma >> 1. \tag{12}$$

Отсюда видно, что при большом отношении сигнал/помеха распределение огибающей смеси сигнала и помеха совпадает с распределением мгновенных значений помехи, смещенным на величину амплитуды сигнала, то есть линейное детектирование смеси в этих условиях эквивалентно синхронному детектированию. При этом роль опорного сигнала по отношению к помехе играет полезный сигнал, который, существенно превышая помеху по уровню, обеспечивает параметрическое преобразование помехи, при котором сохраняется ее распределение.

Для случая нормальной помехи этот результат известен: при большом отношении сигнал/помеха распределение Райса переходит в смещенное распределение Гаусса. Проведенное в настоящей работе исследование позволяет обобщить этот результат на случай помехи с произвольным законом распределения.

В МВ и ДКМВ диапазонах волн основными видами непреднамеренных помех являются индустриальные и атмосферные помехи, имеющие квазиимпульсный характер и относящиеся к негауссову классу помех. Как правило, вычисление функции распределения фазы смеси сигнала и негауссовой помехи, необходимой для расчета вероятностей ошибок при передаче данных, достаточно сложное и приводит к громоздким результатам [4].

Ниже изложен простой метод вычисления этой функции по известной (аналитически или на основании экспериментальных данных) функции распределения огибающей помехи, применимый при следующем допущении, выполняющемся в большинстве практических случаев: фаза помехи статистически не зависит от ее огибающей и распределена равномерно на интервале [$-\pi$, π].

Рассмотрим векторную диаграмму смеси сигнала и помехи, представленную на рис. 2, где ψ и φ – фазы помехи и смеси, отсчитываемые от фазы сигнала, которая без нарушения общности может быть принята равной нулю; E_s, E_n и E – огибающие сигнала, помехи и их смеси.

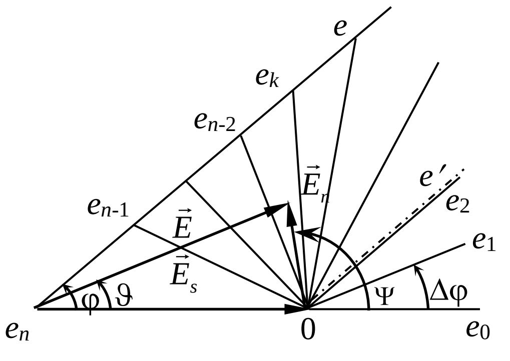

Рис. 2. К объяснению метода вычисления функции распределения фазы смеси сигнала и помехи

Вероятность того, что фаза смеси ϑ принимает значение, находящееся в интервале [0, φ], может быть определена как вероятность попадания конца вектора $\vec{E}$ в сектор ee_ne_0. Для нахождения этой вероятности разобьем сектор ee_ne_0 на n секторов: $e_0\,0e_1$, $e_1 0 e_2, \ldots, e_{n-1} 0 e_n$. Причем, будем полагать, что соответствующие углы равны: $\angle e_0\,0e_1 = \angle e_1 0 e_2 = \ldots \angle e_{n-1} 0 e_n = \Delta\varphi$. При этом искомую вероятность можно определить как сумму n попарно независимых событий, характеризующихся попаданием конца вектора $\vec{E}$ в один из указанных n секторов, ограниченных лучом e_ne.

Вероятность попадания конца вектора $\vec{E}$ в k-й сектор может быть приближенно определена как совместная вероятность двух независимых событий: фаза помехи ψ заключена в интервале $[k\Delta\varphi, (k + 1)\Delta\varphi]$, а ее огибающая E_n при $\psi > \varphi$ – в интервале $[0, E_k]$, где E_k – длина луча $0e_k$, а при $\psi \le \varphi$ – в интервале $[0, \infty]$, поскольку, как видно из рис. 2, конец вектора $\vec{E}$ находится в пределах сектора $e' 0e_0$, соответствующего $\psi \le \varphi$ при сколь угодно больших значениях E_k.

Вычисленное таким образом приближенное значение вероятности попадания фазы смеси сигнала и помехи в интервале $[0, \varphi]$ тем ближе к ее истинному значению, чем больше число интервалов разбиения n. В результате получаем:

$$P(0 \le \vartheta \le \varphi) = \sum_{k=0}^{m-1} P\,[k\Delta\varphi \le \psi < (k+1)\,\Delta\varphi]\, P(0 \le E_n \le \infty) +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n-1} P\,[k\Delta\varphi \le \psi < (k+1)\,\Delta\varphi]\, P(0 \le E_n \le E_k), \tag{13}$$

где $m = \varphi / \Delta\varphi$, $n = \pi / \Delta\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

С учетом допущения о равномерности распределения фазы помехи имеем:

$$P[k\Delta\varphi \le \psi < (k+1)\,\Delta\varphi] = \Delta\varphi / 2\pi. \tag{14}$$

Учитывая (14) и очевидное равенство $P(0 \le E_n \le \infty) = 1$, получаем:

$$P(0 \le \vartheta \le \varphi) \approx (m\Delta\varphi / 2\pi) + (\Delta\varphi / 2\pi) \sum_{k=m}^{n-1} P\,(0 \le E_n \le E_k),\ 0 \le \varphi \le \pi. \tag{15}$$

Из решения треугольника $e_n 0 e_k$ находим:

$$E_k = E_s \sin\varphi / [\sin(k\Delta\varphi - \varphi)]. \tag{16}$$

Переходя к нормированным (к среднеквадратическому значению помехи σ) значениям E_n / σ и E_k / σ и вводя для интегральной функции распределения огибающей помехи обозначение $F_П\,(E_k / \sigma) = \_P(0 \le E_n / \sigma \le E_n / \sigma)$, из (15) с учетом (16) и равенства $m = \varphi / \Delta\varphi$ получаем:

$$P(0 \le \vartheta \le \varphi) \approx \frac{1}{2\pi}\left[\varphi + \sum_{k=m}^{n-1} F_П\left(\frac{S \sin\varphi}{k\Delta\varphi - \varphi}\right)\Delta\varphi\right], \tag{17}$$

где $S = E_s / \sigma$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Учитывая, что распределение фазы симметрично относительно $\varphi = 0$, откуда следует $P(|\vartheta| \le \varphi) = 2P\ (0 \le \vartheta \le \varphi)$, переходя к пределу при $\Delta\varphi \to 0$ и вводя для интегральной функции распределения фазы обозначение $P(\varphi) = P(|\vartheta| \le \varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, из (17) получаем:

$$P(\varphi) = \frac{1}{\pi}\left[\varphi + \int_{\varphi}^{\pi} F_П\left(\frac{S \sin\varphi}{\sin(v - \varphi)}\right) dv\right]. \tag{18}$$

Заметим, что при $S = 0$ второй член в квадратных скобках в (18) равен нулю, так как $F_П(0) = 0$. Плотность вероятности фазы φ, рассматриваемой на интервале [–π, π], с учетом симметрии распределения фазы связана с $P(\varphi)$ соотношением:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{dP(\varphi)}{d\varphi}\bigg|_{\varphi = |\varphi|} . \tag{19}$$

Из выражения (19) при использовании (18) находим:

$$W(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|\varphi|}^{\pi} \frac{S\sin v}{\sin^2(v-|\varphi|)} W_П\left(\frac{S\sin|\varphi|}{\sin\,(v-|\varphi|)}\right)dv\,, & S > 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\,, & S = 0\,, \end{cases} \tag{20}$$

где $-\pi \le \varphi \le \pi$, $W_П(x) = dF_П(x)/\mathrm{d}x$ – плотность вероятностей огибающей помехи.

Справедливость полученного выражения проверена на примере гауссовой помехи. На рис. 3 показано распределение плотности вероятностей фазы смеси такой помехи и гармонического сигнала $s(t) = E_S \cos \omega_0 t$ [1] при разных значениях амплитуды сигнала S:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-s^2/2} + \frac{S\cos\varphi}{\sqrt{2\pi}} F(S\cos\varphi)\; e^{-S^2\sin^2\varphi/2}\,, -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{21}$$

где $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$ – табулированная функция Лапласа. Пунктиром показана плотность вероятностей фазы смеси, вычисленная по формуле (20), в которую подставлено рэлеевское распределение огибающей гауссовой помехи $W_п(x) = x\,e^{-x^2/2}$.

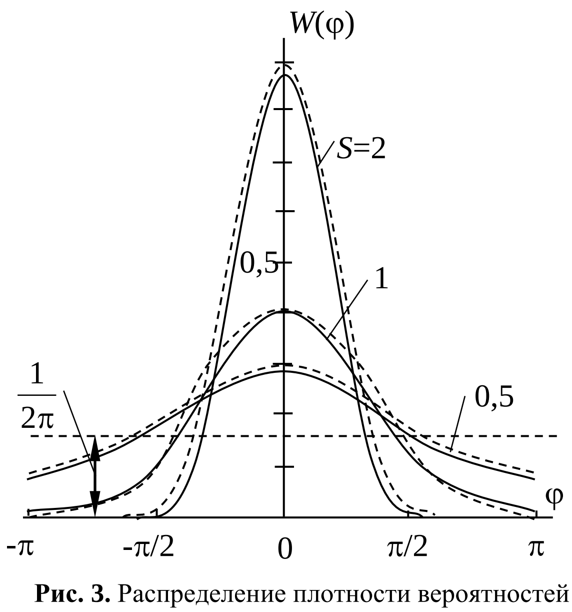

Рис. 3. Распределение плотности вероятностей фазы смеси сигнала и гауссовой помехи

Совпадение результатов расчетов с результатами, полученными на основании точного аналитического выражения, подтверждает правомерность предложенной методики вычисления функции распределения фазы смеси сигнала и помехи по известной функции распределения огибающей помехи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Советское радио, 1966. Т. 1.
2. **Рубцов В.Д.** Статистические характеристики смеси сигнала и атмосферного шума в ВЧ-диапазоне // Радиотехника и электроника. 1977. Т. XXII. № 4. С. 137-159.

3. **Рубцов В.Д., Зайцев А.Н.** Определение вероятностных характеристик помехи и ее смеси с узкополосным сигналом по экспериментальным данным // Радиотехника и электроника, 1985. Т. XXX. № 9. С. 23-32.
4. **Рубцов В.Д.** Статистические характеристики фазы смеси атмосферного шума и узкополосного сигнала // Радиотехника и электроника. 1974. Т. XIX. № 11. С. 47-56.

REFERENCES

1. **Levin B.R.** *Teoreticheskie osnovi statisticheskoy radiotexniki, t. 1* (Theoretical Foundations for Statistical Radiotechnics, vol. 1), Moscow, Sovetskoye radio, 1966, 344 p.
2. **Roubtsov V.D.** *Radiotexnika i elektronika,* 1977, vol. XXII, no. 4, pp. 137-159.
3. **Roubtsov V.D., Zaytsev A.N.** *Radiotexnika i elektronika*, 1985, vol. XXX, no. 9, pp. 23-32.
4. **Roubtsov V.D.** *Radiotexnika i elektronika,* 1974, vol. XIX, no. 11, pp. 47-56.

ON THE EVELOPE AND PHASE DISTRIBUTION OF THE MIXTURE OF SIGNAL AND NON-GAUSSIAN INTERFERENCE

Roubtsov V.D., Senyavskiy A.L.

For a mixture of a signal and non-Gaussian interference with arbitrary distribution law, a method of determining the envelope and phase probability densities is given. Efficiency of the proposed methods is illustrated by examples. In the case of a large signal-to-interference ratio it is shown that the distribution of the envelope for a mixture of signal and interference coincides with the distribution of instantaneous value of interference shifted by a value of signal amplitude for an arbitrary distribution of interference.

Keywords: envelope, phase, non-Gaussian interference, the probability densities.

Сведения об авторах

Рубцов Виталий Дмитриевич, 1938 г.р., окончил МАИ им. С. Орджоникидзе (1961), доктор технических наук, профессор, Почетный работник науки и техники РФ, профессор кафедры технической эксплуатации радиоэлектронного оборудования воздушного транспорта МГТУ ГА, автор более 200 научных работ, область научных интересов теоретическая радиотехника, радиосвязь, радионавигация, навигация и управление воздушным движением.

Сенявский Александр Леонидович, 1937 г.р., окончил МЭИС (1960), кандидат технических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой метрологии, стандартизации и измерений в инфокоммуникациях МТУСИ, автор более 100 научных работ, область научных интересов: метрология, радиосвязь, радионавигация, навигация и управление воздушным движением.