УДК 517.926.4

ТИПИЧНОЕ СВОЙСТВО УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

И.А. ГАЛИУЛЛИН, О.Г. ИЛЛАРИОНОВА

В работе на основании устойчивости линейной системы уравнений первого приближения доказана устойчивость исходной нелинейной системы лагранжевых уравнений продольного движения самолета. Доказательство использует теорему В.М. Миллионщикова о типичности по Бэру сохранения свойства условной экспоненциальной устойчивости.

Ключевые слова: типичность по Бэру, условная экспоненциальная устойчивость, продольное движении самолета.

1. Общепринятым в настоящее время стало определение голономной механической системы как тройки $\{M, T, \pi\}$,

где M – дифференцируемое многообразие размерности m, которое называется *конфигурационным многообразием*, а его касательное пространство TM - *фазовым пространством*;

T – дифференцируемая функция на TM, называемая традиционно *кинетической энергией*;

π – полубазисная форма Пфаффа на TM, которая определяет объект, называемый в механике *силовым полем;*

Если $q_1,\ldots,q_m$ – обобщённые координаты механической системы на некоторой карте M^m, то система называется *регулярной*, если

$$\det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0.$$

В дальнейшем механическая система будет предполагаться регулярной на каждой карте.

В [1] определяется *дифференциальное уравнение второго порядка* как особого вида векторное поле на касательном пространстве при условии, что система стационарна (склерономна); это определение модифицируется для произвольной голономной системы (т.е. включая реономные) в [2]. Таким образом, для каждой карты уравнения движения механической системы представляются в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,m, \tag{1}$$

где π имеет локальное выражение $\pi = Q_1 \delta q_1 + \ldots Q_m \delta q_m$, при этом величины Q_ν носят название *обобщённых сил*. Отметим, что фазовое пространство является чётным: $\dim TM = n = 2m$.

В силу регулярности система (1) лагранжевых уравнений второго порядка разрешима относительно вторых производных и поэтому может быть записана в виде системы в n - мерном евклидовом пространстве E^n

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1,\ldots,y_n,t), \quad i = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

где каждое уравнение имеет первый порядок, а правые части определяют диффеоморфизмы пространства на себя. Эти диффеоморфизмы ниже будут обозначаться f

и будет предполагаться, что у них имеется равномерно-непрерывная производная такая, что

$$\sup_{x\in E^n}\max\left\{\left\|\frac{df}{dx}\right\|,\left\|\left(\frac{df}{dx}\right)^{-1}\right\|\right\}<+\infty.$$

В этом множестве диффеоморфизмов, которое далее обозначается S^u, для всякого $j\in S^u$ через S_j^u обозначим множество всех $f\in S^u$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in E^n}|fx-jx|<+\infty$. В множестве S_j^u задаётся расстояние

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in E^n}\left(|fx-gx|+\left\|\frac{d(f-g)}{dx}\right\|\right).$$

2. Для того чтобы привести теорему Миллионщикова [3], напомним следующее определение.

Говорят, что диффеоморфизм $f:E^n\to E^n$ имеет в точке x экспоненциально устойчивое многообразие W^-, если существует погруженное в E^n многообразие W^-, содержащее точку x, такое, что

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\ln|f^ky-f^kx|<0$$

для всякого $y\in W^-$(полагается, что $\ln 0=-\infty$).

Теорема.

При всяком $j\in S^u$ в метрическом пространстве $S_j^u\times E^n$ типична условная экспоненциальная устойчивость по первому приближению, т.е. в пространстве $S_j^u\times E^n$ имеется всюду плотное множество D_j^u типа G_δ такое, что всякая точка $(f,x)\in D_j^u$ обладает следующим свойством: диффеоморфизм $f:E^n\to E^n$ имеет в точке x экспоненциально устойчивое многообразие, касательное линейное многообразие которого в точке x есть

$$\left\{y\in E^n:\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{k}\ln\left|\left(\frac{df^k}{dz}\right)_{z=x}(y-x)\right|<0\right\}.$$

Эта теорема устанавливает зависимость между исходной, вообще говоря, нелинейной системой и той, что получается её линеаризацией. Как известно, устойчивость по первому приближению не обеспечивает устойчивость исходной системы, и исследование линейной системы уравнений первого приближения в ряде случаев не даёт ответа на вопрос о том, как ведёт себя исходная система. Однако теорема утверждает, что связь между этими свойствами устойчивости является типичной (по Бэру).

В основе доказательства лежит фундаментальная теорема, доказанная Миллионщиковым [4] о том, что показатели Ляпунова в соответствующем метрическом пространстве являются бэровскими функциями второго класса и для них типична полунепрерывность сверху. Позже этот результат был установлен для других показателей, создающих инструмент для исследования устойчивости или различных видоизменений её определения: [5] и др.

3. Формализованное определение механической системы, приведённое выше, позволяет перенести утверждение теоремы на уравнения движения. Как правило, будучи нелинейными, эти уравнения на каждой карте представляют обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка и для регулярных систем могут быть представлены как определяющие диффеоморфизмы, указанные в формулировке теоремы.

В данной работе в качестве такой механической системы рассматривается самолёт, совершающий в вертикальной плоскости движение с постоянной по величине и направлению скоростью v центра масс O. Положение продольной оси самолёта определяется углом атаки α, которая здесь принимается за обобщённую координату. Главный момент аэродинамических сил, действующих на крыло пропорционален этому углу: $M_0 = k_0\alpha$; аналогично главный момент аэродинамических сил, действующих на хвостовое оперение, пропорционален углу между вектором скорости точки O_1 и продольной осью самолёта: $M_1 = k_1\delta$. Система осей $\{x, y, z_O\}$ – кёнигова левая, J – момент инерции относительно оси z_O; расстояние $OO_1 = l$; m – масса самолёта.

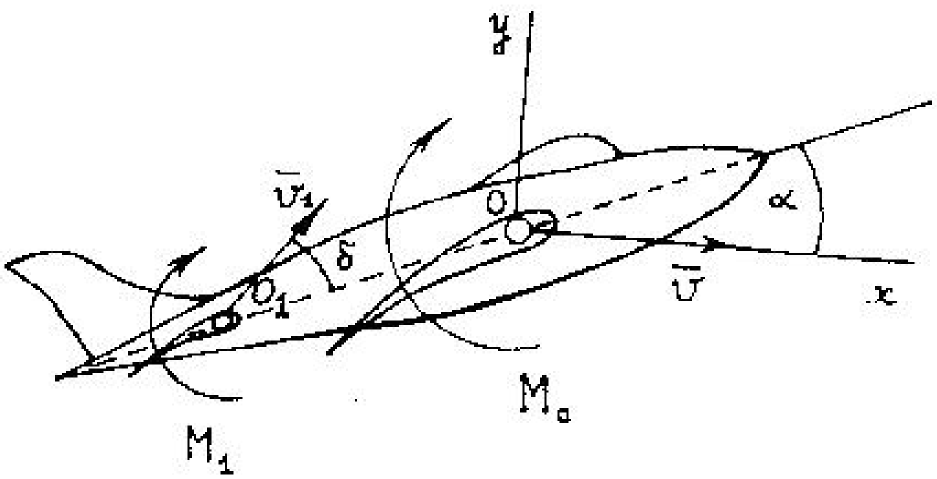

Рис. 1. Распределение моментов аэродинамических сил, действующих на самолет

Так как

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2, \quad Q = M_0 + M_1,$$

то уравнение Лагранжа (1) имеет вид

$$J\ddot{\alpha} = k_0\,\alpha + k_1\,\delta(\alpha, \dot{\alpha}).$$

Скорость точки O_1 вычисляется по известной формуле кинематики

$$v_{O_1} = v_O + v_{O_1/O}, \quad v_{O_1/O} = l\,\dot{\alpha},$$

причём второе слагаемое перпендикулярно отрезку OO_1, так что величина v_1 скорости точки O_1 находится из теоремы косинусов

$$l^2\dot{\alpha}^2 = v_1^2 + v^2 - 2v_1 v\cos(\delta - \alpha).$$

Полагая, как и выше, что $\delta = \delta(\alpha, \dot{\alpha})$ и дополнительно, что величина скорости $v_1 = const$, получим уравнение поверхности в фазовом пространстве $\{\alpha, \dot{\alpha}\}$:

$$l^2\dot{\alpha}^2 - v_1^2 - v^2 + 2v_1 v\cos[\delta(\alpha, \dot{\alpha}) - \alpha] = 0,$$

поэтому дальнейшее исследование устойчивости предусматривает именно условную устойчивость.

Считая, что центр масс самолёта мало отклоняется от прямолинейного движения вдоль горизонтальной оси x, будем предполагать, что величины углов δ и α малы, а также что первый из них линейно выражается через второй и его производную, причём их противоположное направление отсчёта определяет знаки коэффициентов:

$$\delta = a_1\alpha + a_2\dot{\alpha}, \quad a_1, a_2 < 0.$$

Наконец, разделив на J, получим известное уравнение затухающих малых колебаний

$$\ddot{\alpha} + 2n\dot{\alpha} + k^2\alpha = 0,$$

где $2n = k_1 a_2 / J > 0$ и $k^2 = (k_1 a_1 - k_0)/J$, которое по предположению больше нуля; кроме того предполагается, что $k^2 > n^2$.

Решение этого уравнения записывается в виде:

$$\alpha(t) = Ae^{-nt}\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k^2 - n^2}$$

и определяет экспоненциальную устойчивость, которая тогда по теореме Миллионщикова является типичным по Бэру свойством рассматриваемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годбийон К.** Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. - М.: Мир. 1973.
2. **Галиуллин И.А.** Бэровский класс показателей Ляпунова механических систем, содержащих параметры // Известия вузов. Математика. 2001. № 10(473). С. 11-17.
3. **Миллионщиков В.М.** Типичное свойство условной экспоненциальной устойчивости диффеоморфизмов // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. XIX. № 6. С. 1091.
4. **Миллионщиков В.М.** Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I. // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. XVI. № 8. С. 1408-1416.
5. **Илларионова О.Г.** Об устойчивости k-го центрального показателя линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 958-963.
6. **Миеле А.** Механика полёта. – М.: Наука. 1965. Т. I.

THE TYPICAL PROPERTY OF A CONDITIONAL STABILITY OF AN AIRCRAFT

Galiullin I.A., Illarionova O.G.

The conditional stability of the nonlinear Lagrange equations for a longitudinal flight of the aircraft is proved. The approach is based on the stability of the linear first approximation system of equations for such flights.

The proof is based on Millionschikov' theorem on generic conservation (by Baire) of the conditional exponential stability property.

Keywords: Baire typical property, conditional exponential stability, longitudinal flight of the aircraft.

REFERENCES

1. Godbijon K. *Differencial'naja geometrija i analiticheskaja mehanika* (Differential Geometry and Analytical Mechanics), Moscow, Mir, 1973, 215 p.
2. Galiullin I.A. *Izvestija Vuzov – Matematika*, 2001, vol. 10(473), pp. 11-17.
3. Millionshhikov V.M. *Differencial'nye uravnenija*, 1983, vol. XIX, № 6. p. 1091.
4. Millionshhikov V.M. *Differencial'nye uravnenija*, 1980. vol. XVI, № 8, pp. 1408-1416.
5. Illarionova O.G. *Differencial'nye uravnenija*, 1991, vol. 27, № 6, pp. 958-963.
6. Miele A. *Mehanika poljota. Tom I* (Mechanics of Flight. Volume I), Moscow, Nauka, 1965, 334 p.

Сведения об авторах

Галиуллин Ильяс Абдэльхакович, 1951 г.р., окончил МГУ им. Ломоносова (1973), доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), автор 66 научных работ, область научных интересов – аналитическая механика, математическая теория устойчивости, динамика твердого тела.

Илларионова Ольга Германовна, окончила МГУ им. Ломоносова (1982), кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, автор 10 научных работ, область научных интересов – качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости.