УДК 517.988.57+517.988.521

О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ СИЛЬНО УПЛОТНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Н.А. ЕРЗАКОВА

Приводятся два условия, равносильные полной непрерывности как производной Фреше в точке, так и асимптотической производной, в случае их существования.

Теорема М.А. Красносельского об асимптотических точках бифуркации для вполне непрерывных векторных полей обобщается на класс сильно ψ-уплотняющих на бесконечности векторных полей.

Ключевые слова: мера некомпактности Хаусдорфа, уплотняющий оператор, производная Фреше, асимптотически линейный оператор, точки бифуркации, вращение векторных полей, гомотопия.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть E, E_1 - банаховы пространства, а $B_\rho = \{u \in E : \|u\| \le \rho\}$ - шар радиуса $\rho > 0$ с центром в нуле θ, R_+ - множество всех положительных вещественных чисел. Пусть ψ - произвольная мера некомпактности [1].

В работе [2] был введен класс операторов:

Непрерывное отображение $f : M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ - уплотняющим на M, если существует функция $\lambda_{M,f} : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to 0} \lambda_{M,f}(r) = 0$, такая, что для любой точки $u \in M$, для каждого $r > 0$, **для произвольного** подмножества $U \subseteq (u + B_r) \cap M$ справедливо неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{M,f}(r)\psi_E(U)$.

В работе [3] был введен класс операторов:

Непрерывный оператор $f : G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ - уплотняющим **на бесконечности**, если существует число $R_f > 0$ функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty} \tilde{\lambda}_f(r) = 0,$ такая, что $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и **произвольного непустого подмножества** $U \subseteq M \cap (B_{R_2} \setminus B_{R_1})$.

Вышеуказанные классы включают наряду со всеми вполне непрерывными операторами также некоторые операторы, не являющиеся ψ-уплотняющими и даже (k, ψ)-ограниченными.

Напомним, что оператор называется вполне непрерывным [4], если он непрерывен и компактен.

В [2] была доказана полная непрерывность производной Фреше в точке для локально сильно ψ-уплотняющих на M операторов f, а в [3] то же самое для асимптотической производной для сильно ψ-уплотняющих на бесконечности операторов, в случае существования соответствующих производных. Эти результаты обобщают аналогичные результаты из [4], [5].

В настоящей работе приводятся два условия, являющиеся не только достаточными, но и необходимыми условиями полной непрерывности соответствующих производных.

Теорема 2 настоящей работы обобщает теорему об асимптотических точках бифуркации для вполне непрерывных векторных полей [4, глава IV, теорема 3.1] на класс сильно ψ-уплотняющих на бесконечности векторных полей.

1. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В настоящей работе используются понятия в удобной для изложения форме, определения которых приведены в [1].

Неотрицательная числовая функция ψ, заданная на множестве подмножеств банахова пространства E, называется мерой некомпактности, если она инвариантна относительно перехода к замыканию выпуклой оболочки любого подмножества U из E, т.е. $\psi(\overline{co}\,U) = \psi(U)$.

Напомним [1], что мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества U называется инфимум всех ε > 0, при которых U имеет в E конечную ε - сеть.

Непрерывный оператор $f : G \subseteq E \to E_1$ называется уплотняющим [1], если для любого ограниченного подмножества U из G, замыкание которого некомпактно, выполняется неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) < \psi_E(U)$.

Непрерывный оператор $f : G \subseteq E \to E_1$ называется (k,ψ)-ограниченным, если существует такая постоянная $k > 0$, что для всех подмножеств U из G выполняется неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) \le k\psi_E(U).$$

В работе [6] определяются классы операторов:

(λ_2) Непрерывный оператор $f : M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим оператором **в точке** $u_1 \in M$, если существуют число $r_1 > 0$ и функция $\lambda_{u_1,f} : R_+ \to R_+$ такие что для любых чисел $0 < \rho < r < r_1$ и множества $U = (u_1 + B_\rho) \cap M$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{u_1,f}(r)\psi_E(U)$.

$(\tilde{\lambda}_2)$ Непрерывный оператор $f : G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ-уплотняющим **на бесконечности (на сферических прослойках)**, если существуют число $R_f > 0$ и функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r) = 0,$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и $U = G \cap (B_{R_2} \setminus B_{R_1})$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$.

В работе [7] определяются классы операторов:

(λ_3) Непрерывный оператор $f : M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим оператором **в точке** $u_1 \in M$ (**на сферах**), если существуют число $r_1 > 0$ и функция $\lambda_{u_1,f} : R_+ \to R_+$ такие что для любых чисел $0 < \rho < r < r_1$ и множества $U = (u_1 + S_\rho) \cap M$ выполнено неравенство $\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{u_1,f}(r)\psi_E(U)$.

$(\tilde{\lambda}_3)$ Непрерывный оператор $f : G \subseteq E \to E_1$ называется сильно ψ-уплотняющим **на бесконечности (на сферах)**, если существуют число $R_f > 0$ и функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r) = 0,$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и $U = G \cap S_{R_2}$ выполнено неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U).$$

Будем предполагать, что мера некомпактности ψ обладает свойствами χ (см., например, [1], 1.1.4, 1.1.6):

1) полуоднородности, т.е. $\psi_E(tU) = |t|\psi_E(U)$ (t — число);

2) алгебраической полуаддитивности, т.е. $\psi_E(U+V) \le \psi_E(U)+\psi_E(V)$, где $U+V=\{u+v: u\in U, v\in V\}$;

3) регулярности, т.е. $\psi_E(U)=0$, если и только если множество U относительно компактно;

4) полуаддитивности, т.е. $\psi_E(U\cup V)=\max\{\psi_E(U),\psi_E(V)\}$;

5) инвариантности относительно сдвигов, т.е. $\psi_E(U+u)=\psi_E(U)$ ($u\in E$).

Меры некомпактности ψ_1 и ψ_2 называются эквивалентными, если существуют постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$ такие, что $c_1\psi_1(U)\le\psi_2(U)\le c_2\psi_1(U)$ для любых подмножеств U из E.

2. КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ

Заметим, что в силу монотонности ψ имеем $\psi(f(u+S_\rho))\le\psi(f(u+B_\rho))$ для всех u и ρ, а в силу определения и свойств ψ справедливо равенство $\psi(S_\rho)=\psi(B_\rho)$. Поэтому класс операторов (λ_3) включает класс операторов (λ_2). Аналогично, класс операторов $(\tilde{\lambda}_3)$ включает класс операторов $(\tilde{\lambda}_2)$.

В следующей теореме полагаем $\psi=\chi$, хотя утверждение остается верным для любой меры некомпактности ψ, эквивалентной χ.

Теорема 1. Пусть для оператора $f:E\to E$ в точке u_1 существует производная Фреше $f'(u_1)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(λ_1). Производная Фреше $f'(u_1)$ является вполне непрерывным оператором.

(λ_2). f является локально сильно χ-уплотняющим в точке u_1 оператором.

(λ_3). f является локально сильно χ-уплотняющим в точке u_1 (на сферах) оператором.

Аналогично, пусть для непрерывного оператора $f:E\to E$ существует непрерывная асимптотическая производная $f'(\infty)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$(\tilde{\lambda}_1)$. Асимптотическая производная $f'(\infty)$ является вполне непрерывным оператором.

$(\tilde{\lambda}_2)$. f является сильно χ-уплотняющим на бесконечности (на сферических прослойках) оператором.

$(\tilde{\lambda}_3)$. f является сильно χ-уплотняющим на бесконечности (на сферах) оператором.

Доказательство. В силу замечания, сделанного выше, (λ_2) влечет (λ_3), соответственно, $(\tilde{\lambda}_2)$ влечет $(\tilde{\lambda}_3)$. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что из (λ_1) следует (λ_2), а из (λ_3) следует (λ_1). Аналогично, достаточно показать, что из $(\tilde{\lambda}_1)$ следует $(\tilde{\lambda}_2)$, а из $(\tilde{\lambda}_3)$ следует $(\tilde{\lambda}_1)$.

По определению производной Фреше в точке u_1 имеем $f'(u_1)h=f(u_1+h)-f(u_1)+\omega(h)$ при достаточно малых $h\in E$. Здесь $\omega(h)/\|h\|_E\to 0$ при $\|h\|_E\to 0$.

Пусть выполнено (λ_1). Тогда по определению производной Фреше справедливо включение $f(u_1+B_\rho)\subseteq f'(u_1)B_\rho+f(u_1)-\omega(B_\rho)$. Отсюда и из монотонности, алгебраической полуаддитивности и регулярности χ

$$\chi(f(u_1+B_\rho))\le\chi(f'(u_1)B_\rho)+\chi(f(u_1))+\chi(\omega(B_\rho))\le\chi(\omega(B_\rho)),$$

так как $\chi(f'(u_1)B_\rho)=0$ в силу предположения (λ_1) и $\chi(f(u_1))=0$ как на одноэлементном множестве. Определим функцию $\lambda_{u_1,f}(r)=\sup\limits_{\|u\|\le r}\dfrac{\|\omega(u)\|}{\|u\|}$. По определению производной Фреше $\lim\limits_{r\to0}\lambda_{u_1,f}(r)=0$. Более того,

$$\chi(f(u_1+B_\rho))\le\chi(\omega(B_\rho))\le\rho\sup_{\|u\|\le\rho}\frac{\|\omega(u)\|}{\|u\|}\le\chi(B_\rho)\sup_{\|u\|\le r}\frac{\|\omega(u)\|}{\|u\|}\le\lambda_{u_1,f}(r)\chi(B_\rho),$$

т.е. выполнено (λ_2).

Пусть выполнено (λ_3) и $0<\rho<r$. Покажем справедливость (λ_1). По определению производной Фреше справедливо включение $f'(u_1)S_\rho\subseteq f(u_1+S_\rho)-f(u_1)+\omega(S_\rho)$. Отсюда в силу линейности оператора $f'(u_1)$ следует $f'(u_1)S_1\subseteq\dfrac{1}{\rho}f(u_1+S_\rho)-\dfrac{1}{\rho}f(u_1)+\dfrac{1}{\rho}\omega(S_\rho)$. В силу монотонности, алгебраической полуаддитивности, полуоднородности и инвариантности относительно сдвигов χ из последнего включения получаем

$$\chi(f'(u_1)S_1)\le\frac{1}{\rho}\chi(f(u_1+S_\rho))+\chi\left(\frac{1}{\rho}\omega(S_\rho)\right).$$

Следовательно, в силу предположения (λ_3) и равенства $\chi(S_\rho)=\rho$

$$\chi(f'(u_1)S_1)\le\lambda_{u_1,f}(r)+\chi\left(\frac{1}{\rho}\omega(S_\rho)\right).$$

Устремляя в последнем неравенстве $r\to0$ и вместе с ним $\rho\to0$, заключаем $\chi(f'(u_1)S_1)=0$, так как $\lim\limits_{r\to0}\lambda_{u_1,f}(r)=0$ и $\chi\left(\dfrac{1}{\rho}\omega(S_\rho)\right)$ стремится к нулю при $\rho\to0$ в силу определения ω. Равенство $\chi(f'(u_1)S_1)=0$ влечет (λ_1).

Первая часть утверждения теоремы 1 доказана.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что из $(\tilde\lambda_1)$ следует $(\tilde\lambda_2)$, а из $(\tilde\lambda_3)$ следует $(\tilde\lambda_1)$.

По определению асимптотической производной $f'(\infty)$

$$f'(\infty)h=f(h)-\tilde\omega(h),\ h\in E,$$

где $\tilde\omega(h)/\|h\|\to0$ при $\|h\|\to\infty$.

Пусть выполнено $(\widetilde{\lambda}_1)$ и $R_2 > R_1$. Тогда по определению асимптотической производной справедливо включение $f(B_{R_2} \setminus B_{R_1}) \subseteq f'(\infty)(B_{R_2} \setminus B_{R_1}) - \widetilde{\omega}(B_{R_2} \setminus B_{R_1})$. Отсюда и из монотонности, алгебраической полуаддитивности и регулярности χ

$$\chi(f(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) \le \chi(f'(\infty)(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) + \chi(\widetilde{\omega}(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) \le \chi(\widetilde{\omega}(B_{R_2} \setminus B_{R_1})),$$

так как $\chi(f'(\infty)(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) = 0$ в силу предположения $(\widetilde{\lambda}_1)$.

Определим функцию $\widetilde{\lambda}_f(r) = \sup\limits_{\|u\| \ge r} \dfrac{\|\widetilde{\omega}(u)\|}{\|u\|}$.

По определению асимптотической производной $\lim\limits_{r\to\infty} \widetilde{\lambda}_f(r) = 0$. Более того, $\chi(f(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) \le \chi(\widetilde{\omega}(B_{R_2} \setminus B_{R_1})) \le R_2 \sup\limits_{\|u\| \ge R_2} \dfrac{\|\widetilde{\omega}(u)\|}{\|u\|} \le \chi(B_{R_2} \setminus B_{R_1}) \sup\limits_{\|u\| \ge R_1} \dfrac{\|\widetilde{\omega}(u)\|}{\|u\|} \le \widetilde{\lambda}_f(R_1)\chi(B_{R_2} \setminus B_{R_1})$, т.е. выполнено $(\widetilde{\lambda}_2)$.

Пусть выполнено $(\widetilde{\lambda}_3)$ и $R_2 > R_1$. Покажем справедливость $(\widetilde{\lambda}_1)$.

По определению производной справедливо включение $f'(\infty)S_{R_2} \subseteq f(S_{R_2}) + \widetilde{\omega}(S_{R_2})$. Отсюда в силу линейности оператора $f'(\infty)$ следует $f'(\infty)S_1 \subseteq \dfrac{1}{R_2} f(S_{R_2}) + \dfrac{1}{R_2}\widetilde{\omega}(S_{R_2})$. В силу монотонности, алгебраической полуаддитивности, полуоднородности и инвариантности относительно сдвигов χ из последнего включения получаем

$$\chi(f'(\infty)S_1) \le \frac{1}{R_2}\chi(f(S_{R_2})) + \chi\left(\frac{1}{R_2}\widetilde{\omega}(S_{R_2})\right).$$

Следовательно, в силу предположения $(\widetilde{\lambda}_3)$ и равенства $\chi(S_{R_2}) = R_2$ справедливо неравенство

$$\chi(f'(\infty)S_1) \le \widetilde{\lambda}_f(R_1) + \chi\left(\frac{1}{R_2}\widetilde{\omega}(S_{R_2})\right).$$

Устремляя в последнем неравенстве $R_1 \to \infty$ и вместе с ним $R_2 \to \infty$, заключаем $\chi(f'(\infty)S_1) = 0$, так как $\lim\limits_{r\to\infty} \widetilde{\lambda}_f(r) = 0$ и $\chi\left(\dfrac{1}{R_2}\widetilde{\omega}(S_{R_2})\right)$ стремится к нулю при $R_2 \to \infty$ в силу определения $\widetilde{\omega}$. Равенство $\chi(f'(\infty)S_1) = 0$ влечет $(\widetilde{\lambda}_1)$.

Теорема доказана.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Напомним [4], что число μ_0 называется асимптотической точкой бифуркации f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует шар B_r, такой что граница каждого ограниченного открытого множества $U \supset B_r$ содержит собственные векторы f с характеристическими числами $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$, т.е. уравнение $u = \mu f(u)$ имеет непрерывную ветвь собственных векторов, уходящую в бесконечность.

Теорема 2. Пусть мера некомпактности ψ эквивалентна χ. Пусть для непрерывного оператора $f : E \to E$ существует непрерывная асимптотическая производная и пусть f является к тому же сильно ψ-уплотняющим на бесконечности оператором. Тогда каждое характеристическое число нечетной кратности асимптотической производной $f'(\infty)$ оператора f будет асимптотической точкой бифуркации f, которой отвечает уходящая в бесконечность непрерывная ветвь собственных векторов.

Доказательство. Пусть $A = f'(\infty)$ и пусть μ_0 - характеристическое число нечетной кратности производной A оператора f. Можно считать, что на сегменте $[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ нет характеристических чисел оператора A, отличных от μ_0. Поэтому операторы $[I - (\mu_0 - \varepsilon)A]^{-1}$ и $[I - (\mu_0 + \varepsilon)A]^{-1}$ ограничены, и найдется такое $\delta > 0$, что

$$\begin{cases} \|I - (\mu_0 - \varepsilon)A\| \ge \delta \|u\|, \\ \|I - (\mu_0 + \varepsilon)A\| \ge \delta \|u\| \end{cases} \quad (\forall u \in E). \tag{1}$$

По условию теоремы оператор f является сильно ψ-уплотняющим на бесконечности. Поэтому в силу теоремы 1 производная A вполне непрерывна. Обозначим через $0 < \rho_2 < \rho_1$ достаточно большие числа, что при $\|u\| \ge \rho_2$

$$\| f(u) - Au\| \le \frac{\delta}{2(|\mu_0| + \varepsilon)} \|u\|, \tag{2}$$

$(|\mu_0| + \varepsilon)\tilde{\lambda}_f(\rho) = k < 1$ для всех $\rho \ge \rho_2$. Из последнего следует, что на $E \setminus B_{\rho_2}$ операторы $(|\mu_0| + \varepsilon) f$ являются $(k,\psi)-$ограниченными с константой $k < 1$, а потому являются $\psi-$уплотняющими с константой $k < 1$.

Рассмотрим оператор $\tilde{f}$, совпадающий с f на $E \setminus B_{\rho_1}$, тождественно равный нулю на шаре B_{ρ_2} и $\dfrac{\|u\| - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} f(u)$, если $\rho_2 \le \|u\| < \rho_1$.

Так как операторы $(|\mu_0| \pm \varepsilon) f$ на $E \setminus B_{\rho_2}$ являются $(k,\psi)-$ограниченными с константой $k < 1$, то и операторы $(|\mu_0| \pm \varepsilon)\tilde{f}$ в силу полуоднородности и монотонности ψ являются $(k,\psi)-$ограниченными с константой $k < 1$, но уже на всем пространстве E наряду с вполне непрерывными операторами $(|\mu_0| \pm \varepsilon)A$. Так как мера некомпактности ψ инвариантна относительно перехода к выпуклой оболочке, то получаем ψ-уплотняющие векторные поля $I - (\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)\tilde{f} + tA)$ $(0 \le t \le 1)$ на E и, в частности, на B_{ρ_1} (см. также [8], лемма 32.1). Покажем, что все операторы $(\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)\tilde{f} + tA)$ $(0 \le t \le 1)$ не имеют неподвижных точек на границе шара B_{ρ_1}, т.е. на сфере $\|u\| = \rho_1$. Из совпадения $\tilde{f}$ и f на сфере $\|u\| = \rho_1$, а также из (1) и (2) следует

$$\delta\|u\| \le \|u - (\mu_0 \pm \varepsilon)Au\| = \|u - (\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)Au + tAu)\| \le$$
$$\le \left\|u - (\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)\tilde{f}(u) + tAu)\right\| + \left\|(\mu_0 \pm \varepsilon)(1-t)(\tilde{f}(u) - Au)\right\|$$

и

$$\left\|u - (\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)\tilde{f}(u) + tAu)\right\| \ge \delta\|u\| - \left\|(\mu_0 \pm \varepsilon)(1-t)(\tilde{f}(u) - Au)\right\| \ge \frac{\delta}{2}\|u\|.$$

Следовательно, на сфере $\|u\| = \rho_1$ ψ-уплотняющие векторные поля $I - (\mu_0 \pm \varepsilon)((1-t)\tilde{f} + tA)$ $(0 \le t \le 1)$ не имеют нулевых векторов, т.е. векторные поля $I - (\mu_0 - \varepsilon)\tilde{f}$ и $I - (\mu_0 - \varepsilon)A$ гомотопны и также $I - (\mu_0 + \varepsilon)\tilde{f}$ и $I - (\mu_0 + \varepsilon)A$ гомотопны и соответственно имеют одинаковое вращение. В силу ([4], теорема 4.6 главы II) вращение вполне непрерывных линейных векторных полей $\Phi = I - (\mu_0 \pm \varepsilon)A$ на сфере $\|u\| = \rho_1$ равно $(-1)^k$, где k - сумма кратностей всех собственных чисел A, того же знака, что $\dfrac{1}{\mu_0 \pm \varepsilon}$, и больших по абсолютной величине, чем $\left|\dfrac{1}{\mu_0 \pm \varepsilon}\right|$. Так как на сегменте $[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ нет характеристических чисел оператора A, отличных от μ_0, то нечетная кратность собственного числа $\dfrac{1}{\mu_0}$ добавляется к показателю степени $(-1)^k$ только у одного поля. Поэтому вращение линейных вполне непрерывных полей $u - (\mu_0 - \varepsilon)Au$ и $u - (\mu_0 + \varepsilon)Au$ на сфере $\|u\| = \rho_1$ различно, также как у гомотопных им соответственно полей $u - (\mu_0 - \varepsilon)\tilde{f}(u)$ и $u - (\mu_0 + \varepsilon)\tilde{f}(u)$. Поэтому найдется такая точка u_0 на сфере $\|u\| = \rho_1$, в которой векторы $u_0 - (\mu_0 - \varepsilon)\tilde{f}(u_0)$ и $u_0 - (\mu_0 + \varepsilon)\tilde{f}(u_0)$ направлены противоположно в силу теоремы 3.2.5 из [1], утверждающей, что если ψ-уплотняющие операторы $f_1 = (\mu_0 - \varepsilon)\tilde{f}$ и $f_2 = (\mu_0 + \varepsilon)\tilde{f}$, действующие из замкнутого шара $\overline{B}_{\rho_1}$ в E и не имеющие на $\|u\| = \rho_1$ неподвижных точек, таковы, что равенство $u - f_1(u) = \tilde{\sigma}[u - f_2(u)]$ на сфере $\|u\| = \rho_1$ может иметь место лишь для $\tilde{\sigma} > 0$, то их вращение совпадает. Значит, найдется такое $\tilde{\sigma} < 0$ или $\sigma = -\tilde{\sigma} > 0$, что

$$u_0 - (\mu_0 - \varepsilon)\tilde{f}(u_0) + \sigma u_0 - \sigma(\mu_0 + \varepsilon)\tilde{f}(u_0) = 0,$$

откуда $u_0 = \left(\mu_0 + \dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\varepsilon\right)\tilde{f}(u_0)$.

Таким образом, u_0 является собственным вектором оператора $\tilde{f}$, которому отвечает характеристическое число из сегмента $[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$, так как $\left|\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\right| < 1$, а, следовательно, то же самое имеет место и для оператора f, совпадающим с $\tilde{f}$ на $E \setminus B_{\rho_1}$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 3. Пусть для непрерывного оператора $f:E\to E$ ($f(\theta)=\theta$) существует непрерывная производная Фреше f' оператора f в точке θ и пусть f является к тому же сильно ψ-уплотняющим в окрестности точки θ. Тогда каждое характеристическое число μ_0 нечетной кратности оператора $f'(\theta)$ является точкой бифуркации оператора f, причем этой точке бифуркации соответствует непрерывная ветвь собственных векторов оператора f.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теореме 1 из [6] доказывается только равносильность (λ_1) и (λ_2), соответственно, $(\tilde{\lambda}_1)$ и $(\tilde{\lambda}_2)$, а в теореме 1 из [7] доказывается только равносильность (λ_1) и (λ_3), соответственно, $(\tilde{\lambda}_1)$ и $(\tilde{\lambda}_3)$, в отличие от теоремы 1 настоящей работы. Вопрос об эквивалентности условий (λ_2) и (λ_3), соответственно, $(\tilde{\lambda}_2)$ и $(\tilde{\lambda}_3)$, в случае, когда не существует соответствующая производная оператора f, остается открытым. Теорема 2 формулируется в [6] для меры некомпактности χ и приводится без доказательства. Теорема 3 обобщает аналогичный результат из [4] для вполне непрерывных векторных полей на сильно ψ-уплотняющие векторные поля. Примеры операторов из классов (λ_2), (λ_3), $(\tilde{\lambda}_2)$ и $(\tilde{\lambda}_3)$ приводятся в [2], [3], [6], [7], [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Садовский Б.Н., Родкина А.Е.** Меры некомпактности и уплотняющие операторы. - Новосибирск: Наука, 1986.
2. **Erzakova N.A**. On locally condensing operators // Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications. - 2012. vol. 75. № 8. - pp. 3552-3557.
3. **Ерзакова Н.**А. О сильно уплотняющих на бесконечности операторах // Научный вестник МГТУ ГА, 2014. № 207. С. 110-117.
4. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1956.
5. **Меламед В.Б., Перов А.И**. Обобщение теоремы М.А. Красносельского о полной непрерывности производной Фреше вполне непрерывного оператора // Сиб. мат. журн. - 1963. Т. 4. № 3. С. 702–704.
6. **Ерзакова Н.**А. Об одном критерии полной непрерывности производной Фреше // Функциональный анализ и его приложения (в печати).
7. **Erzakova N.A**. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2015, DOI information:10.1016/j.jmaa.2015.03.063.
8. **Красносельский М.А., Забрейко П.П.** Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975.
9. **Ерзакова Н.А.** О компактных по мере операторах // Известия ВУЗов. Математика. - 2011. № 9. С. 44-51.

ON BIFURCATION POINTS OF STRONGLY CONDENSING OPERATORS

Erzakova N.A.

Two conditions equivalent to complete continuity of Frechet derivative at a point and the asymptotic derivative in the case of their existence are given. Theorem of M.A. Krasnosel’skii on asymptotic bifurcation points for completely continuous fields to class of strongly ψ - condensing at infinity vector fields is generalized.

Keywords: the Hausdorff measure of noncompactness, condensing operator, the Frechet derivative, the asymptotic linear operator, bifurcation points, rotation of vector fields, homotopy.

REFERENCES

1. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. B irkhaser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.
2. Erzakova N.A. On locally condensing operators // *Nonlinear Analysis: Theory Methods& Applications*, 2012, vol. 75, no. 8, pp. 3552-3557.
3. Erzakova N. A. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, 2014, no. 207, pp.110-117.
4. Krasnosel'skii, M. A. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York, 1964.
5. Melamed, V.B., Perov, A.I. A generalization of a theorem of M.A. Krasnosel'skii on the complete continuity of the Frechet derivative of a completely continuous operator // *Sibirskij matematiceskij zurnal*, 1963, no. 4.3, pp. 702-704.
6. Erzakova N. A. On a criterion for the complete continuity of the Frechet derivative // *Functional Analysis and its Applications* (in print).
7. Erzakova N.A. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, DOI information:10.1016/j.jmaa.2015.03.063.
8. Krasnosel'skii M. A.; Zabreiko P.P. Geometric Methods of Nonlinear Analysis, Grundlehrer der mathematischen Wissenschaften Vol. 263, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1984.
9. Erzakova N.A. On Measure-Compact Operators / *Russian Mathematics (Iz. VUZ.)*, 2011, vol. 55, no. 9. pp. 37-45.

Сведения об авторе

Ерзакова Нина Александровна, окончила Новосибирский государственный университет (1976), доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики МГТУ ГА, автор более 60 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.