

УДК 517.988.8:519.632

О РЕШЕНИИ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ СО СТАЦИОНАРНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ НАВЬЕ – СТОКСА

А.А. ФОНАРЁВ

Исследуется проекционный итерационный процесс, сочетающий в себе метод Бубнова – Галёркина и итерационный процесс, для отыскания решения слабо нелинейной вариационной задачи, связанной со стационарной однородной задачей Навье – Стокса. На каждом шаге проекционного итерационного процесса решается линейная вариационная задача. Приводится оценка скорости сходимости последовательности проекционного итерационного процесса.

Ключевые слова: проекционный итерационный процесс, задача Навье – Стокса, решение.

ВВЕДЕНИЕ

Теория вязких течений несжимаемой жидкости представляет собой один из важнейших для практики и наиболее интересный для математических исследований раздел гидродинамики. В задачах динамики вязких течений Лерэ и Шаудером были сделаны первые шаги по применению методов функционального анализа. В монографии [1] при исследовании динамики вязкой несжимаемой жидкости доказывается с использованием метода Лерэ – Шаудера существование решения стационарной задачи Навье – Стокса.

В монографии [2], являющейся хорошим дополнением к монографии [1], рассматриваются вопросы существования, единственности и регулярности решений краевых задач для уравнений Навье – Стокса. И разобрано большое количество алгоритмов (метод Бубнова – Галёркина, метод конечных элементов, экономичные разностные схемы) для отыскания решений краевых задач для уравнений Навье – Стокса.

В статье исследуется проекционный итерационный процесс, сочетающий в себе метод Бубнова – Галёркина и итерационный процесс, для отыскания решения слабо нелинейной вариационной задачи, связанной со стационарной однородной задачей Навье – Стокса. Использование проекционного итерационного процесса при практических вычислениях может дать уменьшение времени счёта и объёма вычислений.

Приводится оценка скорости сходимости последовательности проекционного итерационного процесса к решению исследуемой слабо нелинейной вариационной задачи.

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ СО СТАЦИОНАРНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Пусть $\square^n$ – n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \square^n$ ($n = 2$ или 3), $\Omega \subset \square^n$ – ограниченная липшицева [2] область с границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$;

$L^2(\Omega)$ – пространство Лебега со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$,

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2} \quad (u, v \in L^2(\Omega));$$

$(L^2(\Omega))^n$ – гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$,

$$(u, v)_0 = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i), \quad \|u\|_0 = (u, u)_0^{1/2} \quad (u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in (L^2(\Omega))^n);$$

$H^1(\Omega)$ – гильбертово пространство Соболева функций из $L^2(\Omega)$ с частными производными первого порядка, принадлежащими $L^2(\Omega)$, со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H^1(\Omega)}$ и нормой $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)_0, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2} \quad (u, v \in H^1(\Omega));$$

$H_0^1(\Omega)$ – подпространство пространства $H^1(\Omega)$, являющееся замыканием в $H^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω , со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$ и нормой $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, эквивалентной в $H_0^1(\Omega)$ норме $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$,

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_0, \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (u, u)_{H_0^1(\Omega)}^{1/2} \quad (u, v \in H_0^1(\Omega));$$

$(H_0^1(\Omega))^n$ – гильбертово пространство вектор-функций со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$ и нормой $\|\cdot\|_1$,

$$(u, v)_1 = \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)_{H_0^1(\Omega)}, \quad \|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2} \quad (u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in (H_0^1(\Omega))^n);$$

$$V = \left\{ u \in (H_0^1(\Omega))^n, \nabla \cdot u = 0 \text{ в } \Omega \right\}.$$

Рассмотрим стационарную однородную задачу Навье - Стокса [1], [2]:

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = f \text{ в } \Omega; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \text{ в } \Omega; \quad (2)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\nu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости, $f \in (L^2(\Omega))^n$ – заданная вектор-функция, $u = (u_1, \dots, u_n)$ – вектор скорости жидкости, q – давление.

В [1], [2] задача о существовании решения стационарной однородной задачи Навье – Стокса (1) – (3) сводится к задаче о существовании решения $u \in V$ слабо нелинейной вариационной задачи

$$\nu(u, w)_1 = (f, w)_0 - b(u, u, w) \quad (\forall w \in V), \quad (4)$$

где

$$b(u, w, h) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) w \cdot h \, dx \quad (u, w, h \in V).$$

При этом вектор-функция $u_0 \in V$ называется решением вариационной задачи (4), если равенство в (4) выполняется при $u = u_0$ и $\forall w \in V$.

В [1], [2] установлено, что

$$|b(u, w, h)| \leq c \|u\|_1 \|w\|_1 \|h\|_1 \quad (5)$$

для $\forall u, w, h \in V$ с зависящей от n постоянной $c > 0$ (используемой далее) и что при

$$\nu^2 > c \|f\|_{V'},$$

где $\|f\|_{V'} = \sup \{ (f, h)_0 / \|h\|_1 \} \quad (h \in V, h \neq 0 \in V)$, существует единственное решение вариационной задачи (4).

Отметим, что $\|f\|_{V'} \leq \sqrt{\mu} \|f\|_0$, где $\mu > 0$ – постоянная из неравенства Пуанкаре

$$\|u\|^2 \leq \mu \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

для функций $u \in H_0^1(\Omega)$.

Пусть $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V .

Введём операторы F_i из V в V_i ($i \geq 0, V_0 = V$),

$$\nu(F_i u, w)_1 = (f, w)_0 - b(u, u, w)$$

для $\forall w \in V_i$. Т.е. $F_i u \in V_i$ ($u \in V$) является решением линейной вариационной задачи

$$\nu(h, w)_1 = (f, w)_0 - b(u, u, w) \quad (\forall w \in V_i), \quad (6)$$

состоящей в отыскании такого элемента $h = h_0 \in V_i$, что равенство в (6) выполняется при $h = h_0$ для $\forall w \in V_i$.

Операторы F_i ($i \geq 0$) корректно определены и при $i \geq 1$ решение линейной вариационной задачи (6) является решением метода Бубнова – Галёркина [2], [3].

С использованием неравенства (5) имеем при $i \geq 0$ неравенства:

$$\|F_i u\|_1 \leq \nu^{-1} (c \|u\|_1^2 + \|f\|_{V'}) \quad (\forall u \in V) \quad (\forall u \in V); \quad (7)$$

$$\|F_i u - F_i w\|_1 \leq \nu^{-1} c (\|u\|_1 + \|w\|_1) \|u - w\|_1 \quad (\forall u, w \in V). \quad (8)$$

Проекционный итерационный процесс для отыскания приближений к решению нелинейной вариационной задачи (4), являющийся комбинацией метода Бубнова – Галёркина и итерационного процесса, строится с использованием операторов F_i ($i \geq 0$).

ПРОЕКЦИОННЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$1) \nu^2 > 4c \|f\|_{V'};$$

2) последовательность $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что при $i=1, 2, \dots$ для приближений Бубнова – Галёркина $z_i \in V_i$ ($i \geq 1$) к решению u_0 вариационной задачи (4) имеем

$$\|z_i - u_0\|_1 \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Из условия 1) вытекает, что вариационная задача (4) имеет единственное решение $u_0 \in V$.

Говоря о приближении Бубнова – Галёркина к решению вариационной задачи (4) в условии 2) имеем в виду при $i \geq 1$ такую вектор-функцию $z_i \in V_i$, что выполняется равенство

$$\nu(z_i, w)_1 = (f, w)_0 - b(z_i, z_i, w)$$

для $\forall w \in V_i$, т.е. $F_i z_i = z_i$.

В силу условия 1) при каждом $i \geq 1$ приближение Бубнова – Галёркина к решению вариационной задачи (4) существует и единственно [2].

Из неравенств (7) и условия 1) вытекает, что оператор F_i ($i \geq 0$) отображает шар

$$D_r = \{u \in V, \|u\|_1 \leq r\}$$

в $D_r \cap V_i$, где

$$r \in \left[\frac{\nu - d}{2c}, \frac{\nu - d}{2c} \right], \quad d = \sqrt{\nu^2 - 4c \|f\|_{V'}}.$$

Следовательно, в силу неравенств (8) оператор $F_i : D_r \rightarrow D_r \cap V_i$ ($i \geq 0$) является сжимающим с коэффициентом сжатия [4]

$$\gamma = 2\nu^{-1}cr \in (0, 1),$$

где

$$r \in \left[\frac{\nu - d}{2c}, \frac{\nu}{2c} \right). \quad (9)$$

При доказательстве основного результата статьи используются две леммы.

Лемма 1. Пусть

$$\lambda_{i+1} \leq \theta \lambda_i + \tau_i \quad (i \geq 1) \quad (10)$$

с постоянной $\theta \in (0, 1)$, где $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ - последовательность неотрицательных чисел, а $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$ - ограниченная последовательность неотрицательных чисел.

Тогда последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченная и

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \leq (1 - \theta)^{-1} \limsup_{i \rightarrow \infty} \tau_i \quad (11)$$

($\limsup$ - верхний предел).

Доказательство. Для всех $i, k \geq 1$ имеем

$$\lambda_{i+k} \leq \theta^k \lambda_i + \sum_{j=i}^{i+k-1} \theta^{i+k-1-j} \tau_j. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$\lambda_{i+1} \leq \theta^i \lambda_1 + \sum_{j=1}^i \theta^{i-j} \tau_j \quad (i \geq 1). \quad (13)$$

Из (13) вытекает, что последовательность $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченная. Значит, существует $\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \in \mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^1$ – одномерное евклидово пространство) Из (10) имеем

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_{i+1} \leq \theta \limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda_i + \theta \limsup_{i \rightarrow \infty} \tau_i,$$

что влечёт (11). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполняется условие леммы 1 и

$$\tau_i \leq C \theta_0^i \quad (i \geq 1)$$

с постоянными $\theta_0 \in (0, \theta)$, $C > 0$. Тогда

$$\lambda_{i+1} \leq C_0 \theta^i$$

для всех $i \geq 1$ с постоянной $C_0 = \lambda_1 + C \theta_0 / (\theta - \theta_0)$.

Доказательство. Для каждого $i \geq 1$ с использованием (13) имеем

$$\lambda_{i+1} \leq \theta^i \left(\lambda_1 + C \sum_{j=1}^i \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^j \right) \leq \theta^i \left(\lambda_1 + \frac{C \theta_0}{\theta - \theta_0} \right).$$

Лемма 2 доказана.

Справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом статьи.

Теорема. Если число r принадлежит полуинтервалу из (9), то для последовательности итерационного процесса

$$u_{i+1} = F_{i+1} u_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

с произвольным начальным элементом $u_1 \in D_r$ имеем

$$u_i \in D_r \cap V_i$$

для $\forall i \geq 2$ и

$$\|u_i - u_0\|_1 \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty) \quad (15)$$

(u_0 – решение вариационной задачи (4)). И если, дополнительно,

$$\|F_{i+1}u_0 - u_0\|_1 \leq C\gamma_0^i \quad (\forall i \geq 1)$$

с постоянными $\gamma_0 \in (0, \gamma)$, $C > 0$, то для последовательности итерационного процесса (14) с $u_1 \in D_r \cap V_1$ имеем следующую оценку скорости сходимости к решению u_0 вариационной задачи (4):

$$\|u_{i+1} - u_0\|_1 \leq C_0\gamma^i \quad (16)$$

для $\forall i \geq 1$ с постоянной $C_0 = \|u_1 - u_0\|_1 + C\gamma_0/(\gamma - \gamma_0)$.

Доказательство. С использованием приближений Бубнова – Галёркина

$$z_i \in V_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

к решению u_0 вариационной задачи (4) имеем

$$\|u_{i+1} - z_{i+1}\|_1 \leq \gamma \|u_i - z_{i+1}\|_1 \leq \gamma \|u_i - z_i\|_1 + \gamma \|z_i - z_{i+1}\|_1.$$

Следовательно, в силу леммы 1 $\|u_i - z_i\|_1 \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, что влечет (15).

Для каждого $i \geq 1$ имеем

$$\|u_{i+1} - u_0\|_1 \leq \gamma \|u_i - u_0\|_1 + \|F_{i+1}u_0 - u_0\|_1.$$

Следовательно, с использованием леммы 2 имеем оценку (16). Теорема доказана.

Итерационный процесс (14) является проекционным итерационным процессом, совмещающая в себе метод Бубнова – Галёркина и итерационный процесс. Вводя при $i \geq 2$ базис

$$\varphi_1^i, \varphi_2^i, \dots, \varphi_{n_i}^i$$

в пространстве V_i и представив u_{i+1} в итерационном процессе (14) в виде $u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n_{j+1}} \alpha_j^{i+1} \varphi_j^{i+1}$, сводим задачу об отыскании u_{i+1} к задаче об отыскании решения системы линейных уравнений метода Бубнова – Галёркина

$$\nu \left(\sum_{j=1}^{n_{i+1}} \alpha_j^{i+1} \varphi_j^{i+1}, \varphi_k^{i+1} \right)_1 = \left(f, \varphi_k^{i+1} \right)_0 - b(u_i, u_i, \varphi_k^{i+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, n_{i+1})$$

с неизвестными $\alpha_1^{i+1}, \dots, \alpha_{n_{i+1}}^{i+1}$, что эквивалентно задаче об отыскании решения линейной вариационной задачи (6).

Предположим, что число r принадлежит полуинтервалу из (9) и $\gamma_0 \in (0, \gamma)$.

Предположим, что для скорости сходимости приближений Бубнова – Галёркина z_i ($i \geq 1$) к решению u_0 вариационной задачи (4) имеем оценку

$$\|z_i - u_0\|_1 \leq c_1 \gamma_0^i \quad (17)$$

с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от i .

Следовательно,

$$\|Fu_0 - u_0\|_1 \leq (\gamma + 1) \|z_i - u_0\|_1 \leq C \gamma_0^i \quad (i \geq 1)$$

с постоянной $C = c_1(\gamma + 1)$, что обеспечивает сходимость последовательности проекционно-итерационного процесса к решению вариационной задачи (4) со скоростью сходимости (16).

Оценку (17) можно получить с использованием аппроксимаций пространства V его подпространствами V_i ($i = 1, 2, \dots$) [2], [3].

Проекционный итерационный процесс (14) совмещает в себе метод Бубнова – Галёркина и итерационный процесс модифицированного метода Ньютона.

Исследование проекционного итерационного процесса (14) анонсировано в [5].

Далее рассмотрим внутреннюю аппроксимацию пространства V при $n = 2$ с использованием метода конечных элементов.

Предположим, что Ω – открытая ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей.

В двумерном случае условие $\nabla \cdot u = 0$ ($u = (u_1, u_2) \in (H_0^1(\Omega))^2$) означает, что существует такая функция ψ (функция тока), что $u_1 = \partial \psi / \partial x_2$, $u_2 = -\partial \psi / \partial x_1$.

Пусть, как обычно, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $D^\alpha = \partial^\alpha / \partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

В рассматриваемом случае каждой функции из V сопоставляется соответствующая функция тока ψ . Условие $u = 0$ на $\partial\Omega$ означает, что касательная и нормальная производные от ψ на $\partial\Omega$ равны нулю. Следовательно, ψ постоянна на $\partial\Omega$, а поскольку ψ определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной, то можно предположить, что $u = 0$ на $\partial\Omega$. Значит, $\psi \in H_0^2(\Omega)$, где $H_0^2(\Omega)$ – подпространство пространства $H^1(\Omega)$, являющееся замыканием в $H^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω , а $H^2(\Omega)$ – гильбертово пространство Соболева функций из $L^2(\Omega)$ с частными производными первого и второго порядков, принадлежащими $L^2(\Omega)$, со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{H^2(\Omega)}$ и нормой $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$,

$$(u, w)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^\alpha u, D^\alpha w), \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} = (u, u)_{H^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Поэтому отображение

$$\psi \mapsto u = (\partial\psi/\partial x_2, -\partial\psi/\partial x_1) \quad (18)$$

есть изоморфизм из $H_0^2(\Omega)$ на V .

В [2] строится аппроксимация пространства $H_0^2(\Omega)$ с помощью кусочно-полиномиальных функций степени 5, а затем получается с помощью изоморфизма (18) внутренняя аппроксимация пространства V .

Далее рассматривается последовательность триангуляций области Ω и приводится ссылка о построении подпространств V_i ($i \geq 1$) пространства V в [2].

Пусть $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность допустимых триангуляций области Ω и $\Omega_i = \bigcup_{\Lambda \in T_i} \Lambda$.

Триангуляция T_i ($i \geq 1$) является допустимой [2], если T_i – семейство таких треугольников, что $\Omega_i \subset \Omega$. И если треугольники $\Lambda, \Lambda' \in T_i$, то $\dot{\Lambda} \cap \dot{\Lambda}' = \emptyset$ (где $\dot{\Lambda}$ – внутренность Λ) и $\Lambda \cap \Lambda'$ либо пусто, либо вершина или сторона одновременно для Λ и Λ' .

С триангуляцией T_i ($i \geq 1$) свяжем следующие три числа:

$$\rho_i = \sup_{\Lambda \in T_i} \rho_\Lambda, \quad \rho'_i = \inf_{\Lambda \in T_i} \rho'_\Lambda, \quad \sigma_i = \sup_{\Lambda \in T_i} (\rho_\Lambda / \rho'_\Lambda),$$

где ρ_Λ – диаметр наименьшего круга, содержащего треугольник $\Lambda \in T_i$, а ρ'_Λ – диаметр наибольшего круга, содержащегося в Λ .

Предположим, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = 0$,

$$\sigma_i \leq \sigma \quad (\forall i \geq 1) \quad (19)$$

с постоянной $\sigma > 0$ и что Ω_i сходится к Ω в следующем смысле: для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует такое $\delta(K) > 0$, что $K \subset \Omega_i$ при $\rho_i \leq \delta(K)$.

Для треугольника $\Lambda \in T_i$ ($i \geq 1$) имеем

$$1/(2 \operatorname{tg}(\beta/2)) \leq \rho_\Lambda / \rho'_\Lambda \leq 2/\sin \beta,$$

где β – наименьший угол в Λ . Поэтому условие (19) означает, что наименьший угол для всех треугольников $\Lambda \in T_i$ ($i = 1, 2, \dots$) ограничен снизу: $\beta \geq \beta_0 > 0$.

Пусть $\Lambda \in T_i$ – некоторый треугольник с вершинами A_1, A_2, A_3 и A_{23}, A_{13}, A_{12} – средние точки сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 . И пусть ν_{kj} – единичный вектор, нормальный к стороне A_kA_j ($1 \leq k, j \leq 3$).

Справедлива следующая лемма [2, с. 90].

Лемма 3. В $\square^2$ определяется единственным образом полином φ степени 5 своими значениями и значениями своих производных:

$$D^\alpha \varphi(A_k), 1 \leq k \leq 3, |\alpha| \leq 2; \frac{\partial \varphi}{\partial v_{kj}}(A_{kj}), 1 \leq k, j \leq 3, k \neq j.$$

Здесь, как и выше, A_k – вершины треугольника Λ , а A_{kj} – средние точки его сторон.

В [2, с. 91-92] с использованием леммы 3 для каждого $i \geq 1$ строится такое конечномерное подпространство X_i пространства $H_0^2(\Omega)$, что существует единственное приближение Бубнова – Галеркина $z_i \in V_i$ к решению u_0 вариационной задачи (4), где V_i – образ X_i при изоморфизме (18), и выполняется условие 2) [2, с. 172-173]. При этом внутренняя аппроксимация пространства V его конечномерными подпространствами V_i ($i \geq 1$) называется в [2] аппроксимацией АПР4.

Если граница области Ω – многоугольник, то можно выбрать триангуляцию T_i с $\Omega_i = \Omega$ для $\forall i \geq 1$. И если, дополнительно, решение вариационной задачи (4) $u_0 \in C^5(\bar{\Omega})$ (т.е. u_0 имеет в $\bar{\Omega}$ непрерывные производные до 5-го порядка включительно), то

$$\|z_i - u_0\|_1 \leq c_2 \rho_i^3 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

с постоянной $c_2 > 0$, где $z_i \in V_i$ – приближение Бубнова – Галеркина к u_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автором предложен проекционный итерационный процесс, сочетающий в себе метод Бубнова – Галёркина и итерационный процесс, для отыскания приближений к решению слабо нелинейной вариационной задачи, связанной со стационарной однородной задачей Навье – Стокса. На каждом шаге проекционного итерационного процесса предлагается решать линейную вариационную задачу. Приводится оценка скорости сходимости последовательности проекционного итерационного процесса к решению слабо нелинейной вариационной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970.
2. Темам Р. Уравнения Навье – Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981.
3. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
5. Фонарёв А.А. О решении квазилинейной вариационной задачи, связанной со стационарными однородными уравнениями Навье – Стокса // Труды 57-й научной конференции МФТИ / Управление и прикладная математика. МФТИ, 2014. Т. 1. С. 35-36.

ON THE SOLUTION OF WEAK NONLINEAR VARIATIONAL PROBLEM CONNECTED WITH NAVIER – STOKES STATIONARY HOMOGENEOUS PROBLEM

Fonarev A.A.

Projection iterative process that combines the Bubnov – Galerkin method and iterative process for finding approximations to the solution of weakly nonlinear variational problem associated with a stationary homogeneous Navier - Stokes

problem is proposed. At each step of the projection iterative process is proposed to solve linear variational problem. The estimate of the rate of convergence of the projection iterative process is given.

Keywords: projection iterative process, Navier - Stokes problem, solution.

REFERENCES

1. **Ladyzhenskaja O.A.** *Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neszimaemoj zhidkosti*. M.: Nauka. 1970. 288 p. (In Russian).
2. **Temam R.** *Uravnenija Nav'e – Stoksa. Teorija i chislennyj analiz*. M.: Mir. 1981. 408 p. (In Russian).
3. **Shajdurov V.V.** *Mnogosetochnye metody konechnyh jelementov*. M.: Nauka. 1989. 288 p. (In Russian).
4. **Trenogin V.A.** *Funkcional'nyj analiz*. M.: Nauka. 1980. 496 p. (In Russian).
5. **Fonarjov A.A.** O reshenii kvazilinejnoj variacionnoj zadachi, svjazannoj so stacionarnymi jedno-rodnyimi uravnenijami Nav'e – Stoksa. *Trudy 57-j nauchnoj konferencii MFTI. Upravlenie i prikladnaja matematika. Tom 1*. M.: MFTI. 2014. Pp. 35-36. (In Russian).

Сведения об авторе

Фонарёв Анатолий Афанасьевич, 1942 г.р., окончил МАИ (1968), МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института, автор 129 научных работ, область научных интересов – нелинейные уравнения в нормированных пространствах, приближенные методы нелинейного функционального анализа, решение нелинейных эллиптических краевых задач.