УДК 336

НАКОПИТЕЛЬНЫЕ ПЕНСИОННЫЕ СХЕМЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ДЕКРЕМЕНТНЫМИ ФАКТОРАМИ

М.С. АЛЬ-НАТОР, С.В. АЛЬ-НАТОР, Н.А. ОЛЕНЧЕНКО

Рассматриваются накопительные пенсионные схемы с установленными размерами взносов пренумерандо и единовременной выплатой в случае дожития до пенсионного возраста, отличающиеся отношением к наследованию и предусматривающие различные факторы выбытия. Разработана имитационная модель для анализа построенных схем.

Ключевые слова: пенсионное страхование, уравнение баланса, брутто - премия, взносы пренумерандо, единовременная выплата, пенсионные схемы с установленными взносами.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотренные в данной работе накопительные схемы с единовременной выплатой в случае достижения пенсионного возраста в нашей стране не предусмотрены, хотя в мировой практике деятельности Негосударственных Пенсионных Фондов широко используются. По популярности эти схемы практически не уступают пожизненной пенсии и срочным выплатам. Вероятно, в будущем такие схемы появятся, ведь для многих выход на пенсию может быть связан с необходимостью совершить крупные приобретения, например, покупку жилья, бытовой техники или же дорогостоящее лечение, или желание пожилых родителей обеспечить будущее своих несовершеннолетних детей.

Работа посвящена построению накопительных схем с установленными (фиксированными) размерами взносов пренумерандо и единовременной выплатой в случае дожития до пенсионного возраста, которые отличаются отношением к наследованию. В этих схемах предусмотрен выход из числа участников фонда по причине смерти или по причинам смерти либо выход на пенсию по инвалидности.

Для каждой схемы построено уравнение баланса, найдено выражение для расчета брутто-премии и с помощью имитационной модели вычислено ее значение при различных значениях параметров, входящих в уравнение. Исходя из полученных численных результатов сделаны соответствующие выводы и рекомендации.

Результаты по схемам, учитывающим один фактор выбытия, были анонсированы в [1].

1. НАКОПИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ПЕНСИОННОМ СТРАХОВАНИИ С УЧЕТОМ ОДНОГО ФАКТОРА СМЕРТИ

Ниже строятся три накопительные схемы с установленными (фиксированными) размерами взносов пренумерандо и единовременной выплатой в случае дожития до пенсионного возраста, которые отличаются отношением к наследованию. Для каждой модели построено уравнение баланса, найдено выражение для расчета брутто-премии. В основу составления уравнения баланса лег принцип эквивалентности финансовых обязательств фонда и застрахованного лица. В общем виде этот принцип реализуется приравниванием нетто-премий, которые получает страховщик (обязательства страхователя) к общей сумме выплачиваемых пенсий (обязательства страховщика).

Во всех рассматриваемых схемах выплаты в случае смерти страхователя до достижения им пенсионного возраста будут производиться не в момент смерти, а в конце периода последнего взноса, в котором происходит смерть (иначе говоря, мы рассматриваем так называемые дискретные модели пенсионного страхования). Долгосрочное страхование учитывает доход от инвестирования собранных премий и характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. В частности, сопоставляя обязательства страхователя и страховщика, требуется приводить их к одному моменту времени [2-5]. Для наших схем в качестве такого момента можно выбрать момент заключения договора пенсионного страхования.

В этом пункте используются следующие обозначения:

x – возраст застрахованного;

y – возраст выхода на пенсию (например, мужчины-60, женщины-55);

B – ежегодная брутто-премия, выплачиваемая страхователем в начале года вплоть до выхода на пенсию;

P – единовременная нетто-премия пенсионной выплаты, приведенная на день заключения договора;

$\alpha_1,\ldots,\alpha_{y-x}$ – коэффициенты нагрузки по годам действия договора;

i – сложная годовая процентная ставка;

$\upsilon = 1/(1+i)$ – дисконтирующий множитель;

P_V – взносы, возвращаемые в случае смерти и приведенные на день заключения договора с учетом накопленных процентов и за вычетом нагрузки (выплачивается в конце периода смерти).

Напомним следующие актуарные обозначения (подробнее см. [3], [5]):

l_z – число активных участников в возрасте z;

${}_t p_x = l_{x+t}/l_x$ – вероятность того, что лицо возраста x проживет, по крайней мере t лет;

${}_t q_x = 1 - {}_t p_x$ - вероятность того, что лицо возраста x умрет в течение ближайших t лет,

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^k \, {}_k p_x$ – страховой аннуитет со сроком выплат $n = y - x$ лет пренумерандо.

1.1. Накопительная схема с взносами m раз в год

Нам удобнее начать с этой общей схемы. Остальные получатся как частные случаи.

Рассмотрим совокупность людей, которые с возраста x начинают выплачивать страховые премии размера B в начале каждого периода вплоть до выхода на пенсию, т.е. до возраста y. Периодичность внесения премий определяется непосредственно страхователем и, как правило, это каждый месяц, каждый квартал или каждые полгода. В случае достижения возраста y застрахованные лица получают единовременную выплату размера P. В случае смерти внутри интервала накопления наследникам возвращается сумма размера P_V в конце периода, в котором произошла смерть.

Схема накопительной модели с выплатами m раз в год представлена на рис. 1.1:

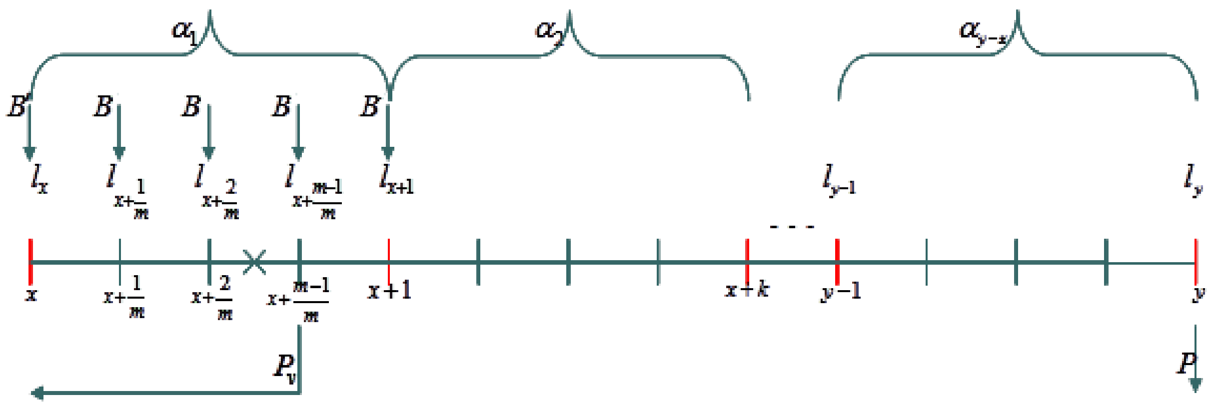

Рис. 1.1. Схема модели с выплатами m раз в год

Поскольку (по данным таблицы смертности) функция l_z известна только для целых значений z, а в нашем случае имеются и дробные, то возникает задача интерполяции. Для нашей задачи была использована линейная интерполяция [3], [5]: $l_{x+t} = (1-t)l_x + tl_{x+1}$, x – целое, $t \in [0,1]$.

Ближайшая цель – показать, что уравнение баланса имеет вид:

$$B\sum_{k=0}^{y-x-1}(1-\alpha_{k+1})\sum_{j=0}^{m-1}\upsilon^{k+\frac{j}{m}}({}_k p_x-\frac{j}{m}{}_k q_x)=\frac{B}{m}P_V+P_{y-x}\,p_x\upsilon^{(y-x)}, \tag{1.1}$$

где взносы, возвращаемые в случае смерти, есть

$$P_V=\sum_{k=1}^{m(y-x)-1}{}_{\left\lfloor\frac{(k-1)}{m}\right\rfloor}q_x\sum_{n=1}^{k}(1-\alpha_{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+1})\upsilon^{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+\frac{(n-1)\bmod m}{m}}, \tag{1.2}$$

а $\lfloor z\rfloor$ – целая часть числа z.

В частности, брутто-премия вычисляется по формуле:

$$B=\frac{P_{y-x}\,p_x\upsilon^{(y-x)}}{\sum_{k=0}^{y-x-1}(1-\alpha_{k+1})\sum_{j=0}^{m-1}\upsilon^{k+\frac{j}{m}}({}_k p_x-\frac{j}{m}{}_k q_x)-\frac{1}{m}P_V}. \tag{1.3}$$

Согласно рис. 1.1, приведенная стоимость взносов к моменту заключения договора (или текущая стоимость потока взносов) равна:

$$\begin{aligned}&l_xB(1-\alpha_1)\upsilon^0+l_{x+\frac{1}{m}}B(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}}+l_{x+\frac{2}{m}}B(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{2}{m}}+\dots+l_{x+1}B(1-\alpha_2)\upsilon^1+\\&+l_{x+1+\frac{1}{m}}B(1-\alpha_2)\upsilon^{1+\frac{1}{m}}+\dots+l_{y-1+\frac{1}{m}}B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{1}{m}}+\dots+l_{y-1+\frac{m-1}{m}}B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{m-1}{m}}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

В случае смерти внутри интервала (x,y) происходит выплата внесенных взносов с учетом накопленных процентов и за вычетом нагрузки. Приведенная стоимость этих выплат к моменту заключения договора равна:

$$\begin{aligned}&(l_x-l_{x+\frac{1}{m}})B(1-\alpha_1)\upsilon^0+(l_{x+\frac{1}{m}}-l_{x+\frac{2}{m}})B[(1-\alpha_1)\upsilon^0+(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}}]+\dots+\\&+(l_{x+\frac{m-1}{m}}-l_{x+1})B[(1-\alpha_1)\upsilon^0+(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}}+(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{2}{m}}+(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{m-1}{m}}]+\\&+\dots+(l_{y-1}-l_{y-1+\frac{1}{m}})B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1}+(1-\alpha_{y-x-1})\upsilon^{y-x-1-\frac{1}{m}}+\dots+\\&+(1-\alpha_1)\upsilon^0]+\dots+(l_{y-1+\frac{m-2}{m}}-l_{y-1+\frac{m-1}{m}})B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{2}{m}}+\\&+(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{1}{m}}+(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1}+\dots+(1-\alpha_1)\upsilon^0],\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $l_{x+k+j}-l_{x+k+j+1}$, $k=\overline{0,y-x-1}$, $j=\overline{0,\frac{m-1}{m}}$ – число выбывших по причине смерти в период между $(x+k+j)$ и $(x+k+j+1)$.

Приведенная стоимость выплат по окончании периода страхования составит величину:

$$Pl_y \upsilon^{(y-x)}. \tag{1.6}$$

Из выражений (1.4), (1.5) и (1.6) составим уравнение баланса:

$$\begin{aligned}
& l_x B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + l_{x+\frac{1}{m}} B(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}} + l_{x+\frac{2}{m}} B(1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{2}{m}} + \dots + l_{x+1} B(1-\alpha_2)\upsilon^1 + \\
& + l_{x+1+\frac{1}{m}} B(1-\alpha_2)\upsilon^{1+\frac{1}{m}} + \dots + l_{y-1+\frac{1}{m}} B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{1}{m}} + \dots + \\
& + l_{y-1+\frac{m-1}{m}} B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{m-1}{m}} = \\
& \quad = (l_x - l_{x+\frac{1}{m}}) B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (l_{x+\frac{1}{m}} - l_{x+\frac{2}{m}}) B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}}] + \dots + \\
& \quad + (l_{x+\frac{m-1}{m}} - l_{x+1}) B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}} + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{2}{m}} + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{m-1}{m}}] + \\
& \quad + \dots + (l_{y-1} - l_{y-1+\frac{1}{m}}) B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1} + (1-\alpha_{y-x-1})\upsilon^{y-x-1-\frac{1}{m}} + \dots + \\
& \quad + (1-\alpha_1)\upsilon^0] + \dots + (l_{y-1+\frac{m-2}{m}} - l_{y-1+\frac{m-1}{m}}) B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{2}{m}} + \\
& \quad + (1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{1}{m}} + (1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1} + \dots + (1-\alpha_1)\upsilon^0] + Pl_y \upsilon^{m(y-x)}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Применяя линейную интерполяцию к правой части, получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m}(l_x - l_{x+1}) B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + \frac{1}{m}(l_x - l_{x+1}) B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}}] + \dots + \\
& + \frac{1}{m}(l_x - l_{x+1}) B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{1}{m}} + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{2}{m}} + \\
& + (1-\alpha_1)\upsilon^{\frac{m-1}{m}}] + \dots + \frac{1}{m}(l_{y-1} - l_y) B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1} + \\
& + (1-\alpha_{y-x-1})\upsilon^{y-x-1-\frac{1}{m}} + \dots + (1-\alpha_1)\upsilon^0] + \\
& + \frac{1}{m}(l_{y-1} - l_y) B[(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{2}{m}} + (1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1+\frac{1}{m}} + \\
& + (1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1} + \dots + (1-\alpha_1)\upsilon^0] + Pl_y \upsilon^{(y-x)}.
\end{aligned}$$

Домножим обе части уравнения на $1/l_x$. Левая часть преобразуется в

$$B \sum_{k=0}^{y-x-1} (1-\alpha_{k+1}) \sum_{j=0}^{m-1} \upsilon^{k+\frac{j}{m}} ({}_k p_x - \frac{j}{m}\, {}_k q_x), \tag{1.8}$$

а правая – в

$$\frac{B}{m}\sum_{k=1}^{m(y-x)-1} {}_{\left\lfloor\frac{(k-1)}{m}\right\rfloor} q_x \sum_{n=1}^{k}(1-\alpha_{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+1})\upsilon^{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+\frac{(n-1)\bmod m}{m}} + P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{(y-x)}. \tag{1.9}$$

Соединяем обе части уравнения:

$$B\sum_{k=0}^{y-x-1}(1-\alpha_{k+1})\sum_{j=0}^{m-1}\upsilon^{k+\frac{j}{m}}({}_k p_x - \frac{j}{m}\,{}_k q_x) = \frac{B}{m}P_V + P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{(y-x)}, \tag{1.10}$$

где

$$P_V = \sum_{k=1}^{m(y-x)-1} {}_{\left\lfloor\frac{(k-1)}{m}\right\rfloor} q_x \sum_{n=1}^{k}(1-\alpha_{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+1})\upsilon^{\left\lfloor\frac{(n-1)}{m}\right\rfloor+\frac{(n-1)\bmod m}{m}}. \tag{1.11}$$

Это доказывает (1.1) - (1.3).

Если для этой схемы положить $P_V = 0$, то получим схему без возможности наследования. В частности, из (1.1) и (1.3) получим, соответственно, уравнение баланса и формулу для брутто-премии.

1.2. Накопительная схема с годовыми взносами

Как было отмечено выше, если в предыдущей схеме положить $P_V = 0$, то получим схему без возможности наследования. В частности, для годовых взносов ($m = 1$) уравнение баланса имеет вид:

$$B\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}} = B\sum_{k=0}^{y-x-1}\alpha_{k+1}\upsilon^k\,{}_k p_x + P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{y-x}, \tag{1.12}$$

а ежегодная брутто-премия вычисляется по формуле:

$$B = \frac{P\upsilon^{y-x}\,{}_{y-x}p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}} - \sum_{k=0}^{y-x-1}\alpha_{k+1}\upsilon^k\,{}_k p_x}. \tag{1.13}$$

Аналогично, положив в схеме п. 1.1 $P_V \neq 0$, получим схему с возможностью наследования. В частности, для годовых взносов ($m = 1$) уравнение баланса имеет вид:

$$B\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}} = B\sum_{k=0}^{y-x-1}\alpha_{k+1}\upsilon^k\,{}_k p_x + P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{y-x} + P_V, \tag{1.14}$$

где взносы, возвращаемые в случае смерти, есть

$$P_V = B\sum_{s=1}^{y-x-1}{}_{s-1}q_x\sum_{k=1}^{s}(1-\alpha_k)\upsilon^{k-1}, \tag{1.15}$$

а ежегодная брутто-премия вычисляется по формуле:

$$B = \frac{P_{\,y-x}\, p_x \upsilon^{y-x}}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x|}} - \sum_{k=0}^{y-x-1} \alpha_{k+1}\upsilon^k\ {}_k p_x - \sum_{s=1}^{y-x-1} {}_{s-1}q_x \sum_{k=1}^{s}(1-\alpha_k)\upsilon^{k-1}}. \qquad (1.16)$$

Отметим, что при $m = 1$ и целом x линейная интерполяция не понадобится.

2. НАКОПИТЕЛЬНАЯ ПЕНСИОННАЯ СХЕМА С ВОЗМОЖНОСТЬЮ НАСЛЕДОВАНИЯ И ДВУМЯ ФАКТОРАМИ ВЫБЫТИЯ

Рассмотрим совокупность людей, которые в возрасте x начинают выплачивать в начале года страховые премии размера B вплоть до выхода на пенсию, т.е. до возраста y. В случае достижения этого возраста – получают единовременную выплату размера P. В случае *смерти/выхода* на пенсию по инвалидности внутри интервала накопления наследникам/непосредственно ставшим инвалидами возвращается сумма размера P_V. Таким образом, P_V – взносы, возвращаемые в случае смерти/выхода на пенсию по инвалидности и приведенные на день заключения договора с учетом накопленных процентов и за вычетом нагрузки (выплачивается в конце года смерти/выхода на пенсию по инвалидности). Схема накопительной модели с возможностью наследования и двумя факторами выбытия представлена на рис. 2.1.

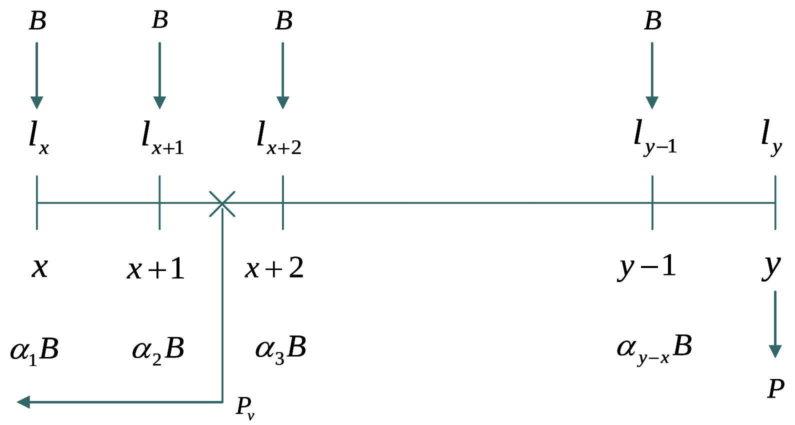

Рис. 2.1. Схема модели с возможностью наследования и двумя факторами выбытия

Текущая стоимость взносов составит величину:

$$l_x B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + l_{x+1}B(1-\alpha_2)\upsilon^1 + l_{x+2}B(1-\alpha_3)\upsilon^2 + \cdots + l_{y-1}B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1}. \qquad (2.1)$$

В случае смерти/выхода на пенсию по инвалидности внутри интервала (x, y) происходит выплата внесенных взносов с учетом накопленных процентов и за вычетом нагрузки. А именно, выплата суммы

$$\begin{aligned}&(d_x + i_x)B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (d_{x+1}+i_{x+1})B\left[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_2)\upsilon^1\right] + \cdots +\\ &+(d_{y-2}+i_{y-2})B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_2)\upsilon^1 + \cdots + (1-\alpha_{y-x-1})\upsilon^{y-x-2}],\end{aligned} \qquad (2.2)$$

где d_{x+k}, $k = \overline{0, y-x-2}$ – число выбывших по причине смерти в период между x и $x+k$, i_{x+k}, $k = \overline{0, y-x-2}$ – число выбывших по причине выхода на пенсию по инвалидности в период между x и $x+k$.

Выплаты по окончании периода страхования составят величину:

$$Pl_y\upsilon^{y-x}. \tag{2.3}$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) составим уравнение баланса:

$$\begin{aligned} &l_xB(1-\alpha_1)\upsilon^0 + l_{x+1}B(1-\alpha_2)\upsilon^1 + l_{x+2}B(1-\alpha_3)\upsilon^2 + \cdots + l_{y-1}B(1-\alpha_{y-x})\upsilon^{y-x-1} = \\ &= (d_x + i_x)B(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (d_{x+1} + i_{x+1})B\left[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_2)\upsilon^1\right] + \cdots + \\ &+ (d_{y-2} + i_{y-2})B[(1-\alpha_1)\upsilon^0 + (1-\alpha_2)\upsilon^1 + \cdots + (1-\alpha_{y-x-1})\upsilon^{y-x-2}] + Pl_y\upsilon^{y-x}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Выпишем явное выражение для ежегодной брутто-премии B в терминах функции декрементной таблицы с двумя факторами (оно получается после несложных преобразований формулы (2.4):

Подробнее о функциях декрементных таблиц можно найти в [3], [5], [6].

$$B = \frac{P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{y-x}}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} - \sum\limits_{k=0}^{y-x-1}\alpha_{k+1}\upsilon^k\,{}_kp_x - \sum\limits_{s=1}^{y-x-1}{}_{s-1}q_x\sum\limits_{k=1}^{s}(1-\alpha_k)\upsilon^{k-1}}, \tag{2.5}$$

где

$$P_V = B\sum_{s=1}^{y-x-1}{}_{s-1}q_x\sum_{k=1}^{s}(1-\alpha_k)\upsilon^{k-1},$$

$${}_np_x = 1 - \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1}(d_{x+j} + i_{x+j})}{l_x}$$

– вероятность того, что застрахованный возраста x останется активным участником пенсионного фонда по крайней мере до возраста $x+n$; ${}_nq_x = 1 - {}_np_x$ – вероятность того, что застрахованный возраста x перестает быть активным участником пенсионного фонда (по причине смерти или инвалидности) в возрастном интервале между x и $x+n$

$$\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} = \sum_{k=0}^{n-1}\upsilon^k\,{}_kp_x,\ n = y-x$$

– страховой аннуитет пренумерандо со сроком выплат n лет.

Хотя формулы (2.5) и (1.16) с виду совпадают, они все-таки имеют разный смысл, поскольку в (2.5) используются декрементные функции и вероятности. В частности, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ понимается как страховой *декрементный* аннуитет пренумерандо со сроком выплат n лет.

Для схемы без возможности наследования ($P_V = 0$) брутто-премия, согласно (2.5) равна:

$$B = \frac{P\,{}_{y-x}p_x\upsilon^{y-x}}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} - \sum\limits_{k=0}^{y-x-1}\alpha_{k+1}\upsilon^k\,{}_kp_x}. \tag{2.5}$$

3. ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ БРУТТО-ПРЕМИИ

Разработана имитационная модель на языке макропрограммирования VBA программы Excel, с помощью которой на основе таблицы смертности РФ 2011 для первых трех схем и таблицы выбытия для схемы с двумя факторами был проведен расчет ежегодной брутто-премии при различных значениях параметров, входящих в полученные аналитические формулы:

– возраст выхода на пенсию для женщин $y = 55$; для мужчин $y = 60$;

– для коэффициентов нагрузки $\alpha_1 ... \alpha_{y\text{-}x}$ рассмотрены два варианта их выбора:

а) коэффициент нагрузки каждый год увеличивается по детерминированному правилу (например, коэффициенты нагрузки образуют арифметическую прогрессию с разумным начальным коэффициентом и разумным шагом);

б) коэффициент нагрузки меняется случайно согласно равномерному распределению на разумном интервале;

– значения l_{x+k}, $k = \overline{0, y-x}$ находятся по таблицам смертности и выбытия соответственно для мужчин и для женщин;

– процентная ставка равна 3, 4, 5 и 10%;

– размер единовременной выплаты может принимать любые неотрицательные значения.

Результаты расчета показали, что все построенные модели являются качественно адекватными, а именно:

1) чем меньше период накопления, тем размер взносов больше при прочих равных условиях. Таким образом, размер взносов для женщин всегда больше, чем для мужчин. Поскольку женщины достигают пенсионного возраста раньше, чем мужчины, то и возможный период накопления у женщин всегда меньше;

2) чем меньше желаемая сумма накопления, тем меньше размер взносов при прочих равных условиях;

3) в модели с выплатами m раз в год: чем меньше количество взносов в год, тем выше их размер.

Сравнивая построенные схемы между собой, можем отметить:

а) для обоих полов при уплате взносов 1 раз в год и учете только смертности «дешевле» оказывается схема без наследования;

б) для схем с наследованием и учетом только смертности для обоих полов схема с уплатой взносов 1 раз в год «дороже», чем схема хотя бы с двумя взносами;

в) для схем с наследованием и уплатой взносов 1 раз в год «дешевле» оказывается схема, учитывающая два фактора выбытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аль-Натор М.С., Аль-Натор С.В., Оленченко Н.А.** Накопительные модели в пенсионном страховании // Сб. тезисов Всероссийской конференции "Прикладная теория вероятности и теоретическая информатика". ИПИ РАН 2012. С. 5-7
2. **Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н.** Основы финансовых вычислений: факты, формулы, примеры, задачи и тесты. Ч. I. – М.: Финансовый университет, 2012.
3. **Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.** Актуарная математика. – М.: Янус-К, 2001.
4. **Касимов Ю.Ф.** Финансовая математика. – М.: Юрайт, 2014.
5. **Касимов Ю.Ф.** Введение в актуарную математику (страхования жизни и пенсионных схем). – М.: Анкил, 2001.
6. **Четыркин Е.М.** Актуарные расчеты в негосударственном пенсионном и медицинском страховании. – М.: Дело, 2009.

ACCUMULATIVE PENSION SCHEMES WITH VARIOUS DECREMENTAL FACTORS

Al-Nator M.S., Al-Nator S.V., Olenchenko N.A.

We consider accumulative defined contribution pension schemes with a lump sum payment on retirement. These schemes differ in relation to inheritance and provide various decremental factors. A simulation model was developed to analyze the constructed schemes.

Keywords: pension insurance, balance equation, gross premium, premium prenumerando, lump sum. defined contribution pension schemes.

REFERENCES

1. **Al-Nator M.S., Al-Nator S.V., Olenchenko N.A.** *Nakopitelnyy modeli v pensionnom strakhovanii* // Sbornik tezisov Vserosseiskoy konferentsii “Prikladnaya teoriya veroyatnostei i teoreticheskaya informatika”, IPI RAN, 2012, pp. 5-7. (In Russian).
2. **Al-Nator M.S., Kasimov Yu.F., Kolesnkov A.N.** *Osnovy finansovykh vychisleniy: fakty, formuly, primery, zadachi i testy*. Chast I. Moscow, Finansovyy universitet, 2012. (In Russian).
3. **Bowers N., Gerber H., Jones D., Nesbitt C., Hickman J.** *Aktyarnaya matematika*. M. Yanus-K, 2001. (In Russian).
4. **Kasimov Yu.F.** *Finansovaya matematika*. M. Urait, 2014. (In Russian).
5. **Kasimov Yu.F.** *Vvedenye v aktyarnyu matematiku (strakhovanya jizni i pensionnikh skhem)*. M. Ankil, 2001. (In Russian).
6. **Chetyrkin E.M.** *Aktyarnyy rashuty v negosudarstvennom pensionnom i meditsiskom starakhovanii.* M. Delo, 2009. (In Russian).

Сведения об авторах

Аль-Натор Мухаммед Субхи, 1968 г.р., окончил физико-математический факультет РУДН (1992), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Финансового университета при Правительстве РФ, автор более 50 научных публикаций, область научных интересов – актуарная математика, теория риска, стохастические модели в финансах.

Аль-Натор Софья Владимировна, окончила физико-математический факультет РУДН (1992), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Финансового университета при Правительстве РФ, автор более 20 научных публикаций, область научных интересов – актуарная математика, теория риска, стохастические модели в финансах, актуарные расчеты.

Оленченко Наталья Александровна, окончила МГТУ ГА (2010), область научных интересов – актуарная математика, теория риска, актуарные расчеты.