УДК 514.7

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ $k-\varepsilon$–МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Н.Г. ХОРЬКОВА

В статье метод поиска инвариантных решений применяется к системе уравнений, описывающих $k-\varepsilon$– модель турбулентности. Найдены точные решения этой системы. Методика построения точных решений, использованная в данной работе, применима и к другим моделям турбулентности.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений в частных производных, локальные симметрии, инвариантные решения, $k-\varepsilon$ –модель турбулентности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Разнообразные процессы в физике, технике, биологии, экономике и других областях человеческой деятельности часто моделируются с использованием систем дифференциальных уравнений в частных производных. Как правило, решить полностью такую систему не удается. Однако интерес представляют и частные решения. Поэтому задача отыскания точных решений дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений всегда является актуальной.

Можно утверждать, что многие известные методы построения точных решений являются следствием наличия той или иной симметрии у исследуемого дифференциального уравнения или системы. Например, зная симметрию уравнения, можно попытаться найти инвариантное (автомодельное) решение (см., например, [1], [6]). В некоторых случаях инвариантные решения дифференциальных уравнений описывают процессы, интересующие исследователя, в других случаях такие решения могут быть полезными при тестировании программ, используемых для численного решения дифференциальных уравнений.

В данной работе мы строим многопараметрические семейства инвариантных решений диссипативной двухпараметрической модели турбулентности ($k-\varepsilon$ –модель).

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ СИММЕТРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $E=\{F=0\}$ — система дифференциальных уравнений в частных производных (далее "дифференциальное уравнение" или просто "уравнение") в векторном расслоении $\pi: E^{n+m}\to M^n$. В рамках алгебро-геометрической теории любое дифференциальное уравнение рассматривается как подмногообразие пространства джетов k-го порядка $J^k(\pi)$ расслоения π, где k — максимальный порядок уравнений, входящих в систему, n — число независимых переменных, а m — число неизвестных функций (зависимых переменных). На многообразии бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$ имеется n-мерное интегрируемое распределение C (распределение Картана), задаваемое операторами полных производных $D_1,\dots,D_n$, которое допускает ограничение $\bar{C}$ на бесконечно продолженное уравнение $E^\infty\subset J^\infty(\pi)$. Под симметриями уравнения E понимают преобразования (конечные или инфинитезимальные) бесконечно продолженного уравнения E^∞ , которые сохраняют распределение Картана на E^∞. Такой подход к определению симметрий дифференциальных уравнений привел к созданию эффективного алгоритма вычисления алгебры высших инфинитезимальных симметрий конкретных уравнений ([1], [2]).

В алгебро-геометрической теории высшая инфинитезимальная симметрия отождествляется с эволюционным дифференцированием

$$\bar{\mathrm{Э}}_\varphi = \sum_{\sigma, j} \bar{D}_\sigma(\varphi^j) \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}, \tag{1}$$

которое однозначно определяется своей производящей функцией $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, $\varphi^i \in C^\infty(J^\infty(\pi))$. В формуле (1), определяющей эволюционные дифференцирования в координатной форме, использованы следующие обозначения: $x_1, \ldots, x_n$, $u^1, \ldots, u^m$, u_σ^j ($u_\varnothing^j = u^j$) — канонические координаты в пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} u_{\sigma i}^j \frac{\partial}{\partial u_\sigma^j}$ — оператор полной производной по переменной x_i, D_σ — композиция операторов полных производных, соответствующая мультииндексу σ, черта обозначает ограничение оператора на бесконечно продолженное уравнение E^∞ (подробнее см., например, [1], [6]).

Для вычисления алгебры симметрий уравнения $E : F = 0$ надо решить систему

$$\bar{l}_F(\varphi) = 0, \tag{2}$$

где $\bar{l}_F$ — оператор универсальной линеаризации, отвечающий функции $F = (F_1, \ldots, F_r)$, $F_i \in C^\infty(J^k(\pi))$, $\bar{l}_F(\varphi) = \bar{\mathrm{Э}}_\varphi(F)$.

Множество всех высших инфинитезимальных симметрий данного уравнения является алгеброй Ли относительно скобки Якоби $\{\varphi, \psi\} = \bar{\mathrm{Э}}_\varphi(\psi) - \bar{\mathrm{Э}}_\psi(\varphi)$. Компоненты скобки Якоби вычисляются по формуле:

$$\{\varphi, \psi\}^j = \sum_{\sigma, \alpha} \left(\bar{D}_\sigma(\varphi^\alpha) \frac{\partial \psi^j}{\partial u_\sigma^\alpha} - \bar{D}_\sigma(\psi^\alpha) \frac{\partial \varphi^j}{\partial u_\sigma^\alpha} \right).$$

Решения уравнения $E = \{F = 0\}$, инвариантные относительно симметрии φ, определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = 0, \ldots, F_r = 0, \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Решение уравнения $E = \{F = 0\}$, инвариантное относительно симметрий φ и ψ, будет также инвариантно относительно скобки $\{\varphi, \psi\}$. Поэтому следует искать решения уравнения, инвариантные относительно некоторой подалгебры g алгебры симметрий. Если φ_1, ... φ_s — образующие этой подалгебры, отыскание инвариантных решений сводится к решению переопределенной системы

$$\begin{cases} F_1 = 0, \ldots, F_r = 0, \\ \varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_s = 0. \end{cases}$$

3. $k-\varepsilon$ –МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для расчета турбулентных течений с использованием $k-\varepsilon$ –модели турбулентности система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса замыкается двумя уравнениями для турбулентной кинетической энергии k и скорости диссипации турбулентной энергии ε. В настоящее время используются различные варианты $k-\varepsilon$ –уравнений. В данной работе рассматривается следующая система, которая описывает движение несжимаемой жидкости или газа с учетом турбулентности при больших числах Рейнольдса ([4], [3]):

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho\overline{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\overline{u}_i\overline{u}_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\tau}_{ij} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right),\ j = 1,2,3; \tag{4}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u}_i\frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\nu + \frac{c_\mu}{\sigma_k}\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right\} - \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - \varepsilon; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u}_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left(\nu + \frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon}\frac{k^2}{\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right\} - c_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - c_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{6}$$

где

$$\overline{\tau}_{ij} = \rho\nu\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right),$$

$$-\overline{u_i' u_j'} = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k,$$

$$\nu, \rho, c_\mu, c_{\varepsilon_1}, c_{\varepsilon_2}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon - \text{константы.}$$

Это система на шесть неизвестных функций $u^1 = \overline{u}_1$, $u^2 = \overline{u}_2$, $u^3 = \overline{u}_3$, $u^4 = p$, $u^5 = k$, $u^6 = \varepsilon$, зависящих от четырех переменных x_1, x_2, x_3, $x_4 = t$. При описании классических симметрий используются канонические координаты в пространстве джетов [1].

4. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

Алгебра классических симметрий $k-\varepsilon$ –модели турбулентности (3) – (6) была вычислена в [3]. В данной работе мы ищем решения, инвариантные относительно подалгебры, порожденной симметриями $X_1(f)$, $X_2(g)$, $X_3(h)$, где

$$X_1(f) = (fu_1^1 - \dot{f}, fu_1^2, fu_1^3, fp_1 + \rho\ddot{f}x_1, fk_1, f\varepsilon_1),$$
$$X_2(g) = (gu_2^1, gu_2^2 - \dot{g}, gu_2^3, gp_2 + \rho\ddot{g}x_2, gk_2, g\varepsilon_2),$$
$$X_3(h) = (hu_3^1, hu_3^2, hu_3^3 - \dot{h}, hp_3 + \rho\ddot{h}x_3, hk_3, h\varepsilon_3),$$

f, g, h — некоторые функции переменной t.

Рассматриваемые симметрии при подходящем выборе функций f, g, h включают в себя трансляции по переменным x_i и галилееву симметрию. Симметрии $X_1(f)$, $X_2(g)$, $X_3(h)$ попарно коммутируют:

$$\{X_1(f), X_2(g)\} = \{X_2(g), X_3(h)\} = \{X_1(f), X_3(h)\} = 0.$$

Покажем на простом примере, как можно с помощью симметрий свести исходную систему к системе уравнений с меньшим числом независимых переменных. Для отыскания решений системы (3) – (6), инвариантных, например, относительно симметрии $X_1(f)$, сначала решим систему уравнений $X_1(f) = 0$:

$$f\frac{\partial \overline{u}^1}{\partial x_1} - \dot{f} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{u}^1 = \frac{\dot{f}}{f}x_1 + A(t, x_2, x_3);$$

$$f\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x_1} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{u}^2 = B(t, x_2, x_3);$$

$$f\frac{\partial \overline{u}^3}{\partial x_1} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{u}^3 = C(t, x_2, x_3);$$

$$f\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho\ddot{f}x_1 = 0 \;\Rightarrow\; p = -\frac{\rho\ddot{f}}{2f}x_1^2 + D(t, x_2, x_3);$$

$$f\frac{\partial k}{\partial x_1} = 0 \;\Rightarrow\; k = E(t, x_2, x_3);$$

$$f\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} = 0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = F(t, x_2, x_3).$$

Затем полученные функции $\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$, $\overline{u}^3$, p, k, ε подставим в систему (3) – (6), в результате чего данная система преобразуется в систему уравнений на шесть функций трех независимых переменных t, x_2, x_3.

Легко видеть, что функции $\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$, $\overline{u}^3$, p, k, ε, удовлетворяющие системе уравнений

$$X_1(f) = X_2(g) = X_3(h) = 0,$$

имеют следующий вид:

$$\overline{u}^1 = \frac{\dot{f}}{f}x_1 + \alpha(t),\; \overline{u}^2 = \frac{\dot{g}}{g}x_2 + \beta(t),\; \overline{u}^3 = \frac{\dot{h}}{h}x_3 + \gamma(t); \tag{7}$$

$$p = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{\ddot{f}}{f}x_1^2 + \frac{\ddot{g}}{g}x_2^2 + \frac{\ddot{h}}{h}x_3^2\right) + p(t); \tag{8}$$

$$k = k(t), \varepsilon = \varepsilon(t). \tag{9}$$

После подстановки (7) – (8) в уравнения (3) – (4) получаем, что

$$\alpha = a_1 f^{-1},\; \beta = a_2 g^{-1},\; \gamma = a_3 h^{-1},\; fgh = A, \tag{10}$$

где $A, a_i,$ — произвольные константы, и

$$\overline{u}^1=\frac{\dot f x_1+a_1}{f},\ \overline{u}^2=\frac{\dot g x_2+a_2}{g},\ \overline{u}^3=\frac{\dot h x_3+a_3}{h}. \tag{11}$$

Вычислим сумму $-\overline{u_i^{'} u_j^{'}}\dfrac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}$ для функций $\overline{u}^i$, определяемых формулой (11):

$$-\overline{u_i^{'} u_j^{'}}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}=\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=$$

$$=2\frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}\right)^2-\frac{2}{3}k\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\frac{k^2}{\varepsilon}L, \tag{12}$$

где

$$L=2c_\mu\left(\left(\frac{\dot f}{f}\right)^2+\left(\frac{\dot g}{g}\right)^2+\left(\frac{\dot h}{h}\right)^2\right).$$

Теперь система уравнений (5) – (6) с учетом (9), (12) принимает вид:

$$\dot k=L\frac{k^2}{\varepsilon}-\varepsilon; \tag{13}$$

$$\dot\varepsilon=c_{\varepsilon_1}Lk-c_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{14}$$

Рассмотрим сначала случай $L\equiv 0$, то есть $\dot f=\dot g=\dot h=0$ и $\overline{u}^i=const$ (в этом случае симметрии $X_1(f)$, $X_2(g)$, $X_3(h)$ являются трансляциями):

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon&=\ -c_{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon^2}{k^2}\\ \dot k&=\ -\varepsilon.\end{aligned}$$

Исключим ε и получим уравнение для *k*:

$$\ddot k=c_{\varepsilon_2}\frac{\dot k^2}{k^2}$$

или

$$\frac{\ddot k}{\dot k}=c_{\varepsilon_2}\frac{\dot k}{k}\Leftrightarrow(\ln\dot k)^{\cdot}-c_{\varepsilon_2}(\ln k)^{\cdot}=0,$$

откуда получаем

$$\frac{\dot k}{k^{c_{\varepsilon_2}}}=const\Rightarrow\frac{k^{1-c_{\varepsilon_2}}}{1-c_{\varepsilon_2}}=\tilde C_1 t+\tilde C_2\,(c_{\varepsilon_2}\neq 1).$$

Итак,

$$k=(C_1t+C_2)^{\frac{1}{1-c_{\varepsilon_2}}},\quad \varepsilon=-\dot{k}=\frac{C_1}{1-c_{\varepsilon_2}}(C_1t+C_2)^{\frac{c_{\varepsilon_2}}{1-c_{\varepsilon_2}}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь общий случай и преобразуем теперь систему (13) – (14) к одному уравнению. Умножив уравнения системы на ε и k соответственно, вычислим производную

$$\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^{\cdot}=\frac{\varepsilon\dot{k}-k\dot{\varepsilon}}{\varepsilon^2}=\frac{(1-c_{\varepsilon_1})L\,k^2+(c_{\varepsilon_2}-1)\varepsilon^2}{\varepsilon^2}=(1-c_{\varepsilon_1})L\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2+(c_{\varepsilon_2}-1).$$

Введем новую функцию $w=\dfrac{k}{\varepsilon}$. Тогда

$$\dot{w}=-l(t)w^2+a, \tag{15}$$

где

$$l(t)=(c_{\varepsilon_1}-1)L\geq 0,\ \ a=c_{\varepsilon_2}-1>0.$$

Подставив выражение $k=w\varepsilon$ в систему (13) – (14), убеждаемся, что она сводится к одному уравнению

$$\dot{\varepsilon}=\left(c_{\varepsilon_1}Lw-c_{\varepsilon_2}w^{-1}\right)\varepsilon, \tag{16}$$

из которого по решению w уравнения (15) находим функцию ε.

Заметим, что уравнение (15) с помощью подстановки $w=\dfrac{1}{l}\dfrac{\dot{v}}{v}$ сводится к линейному уравнению на функцию v:

$$l\ddot{v}-\dot{l}\dot{v}=al^2v. \tag{17}$$

Таким образом, поиск инвариантных решений для рассматриваемой подалгебры проводится по следующей схеме. Сначала выбираем функции f, g, h, удовлетворяющие условию (10), и по формулам (11), (8) находим u^i и p. Затем вычисляем функцию $l(t)$ и, подставив ее в уравнение (17), находим его решение v. Затем вычисляем $w=\dfrac{1}{l}\dfrac{\dot{v}}{v}$, подставляем w в (16) и находим функцию ε, а затем функцию k по формуле $k=\varepsilon w$.

Например, для функций (выбраны с учетом (10)) $f=b_1e^{\lambda t}$, $g=b_2e^{\mu t}$, $h=b_3e^{-(\lambda+\mu)t}$, где λ, μ, b_i — произвольные постоянные, получаем:

$$u^1=\lambda x_1+\frac{a_1}{b_1}e^{-\lambda t},\ u^2=\mu x_2+\frac{a_2}{b_2}e^{-\mu t},\ u^3=-(\lambda+\mu)x_1+\frac{a_3}{b_3}e^{(\lambda+\mu)t},\ p=p(t).$$

Функция $l = const$, $\dot{l} = 0$, и общее решение уравнения (17) имеет следующий вид

$$v = C_3 e^{\sqrt{al}\,t} + C_4 e^{-\sqrt{al}\,t}$$

(C_3, C_4 — произвольные постоянные).

Подставляем функцию

$$w = \sqrt{\frac{a}{l}}\,\frac{C_3 e^{2\sqrt{al}\,t} - C_4}{C_3 e^{2\sqrt{al}\,t} + C_4}$$

в уравнение (16) и после интегрирования получаем выражения для ε:

$$\varepsilon = C_5 \frac{\left(C_3 e^{\sqrt{al}\,t} + C_4 e^{-\sqrt{al}\,t}\right)^{\frac{c_{\varepsilon 1}}{c_{\varepsilon 1}-1}}}{\left(C_3 e^{\sqrt{al}\,t} - C_4 e^{-\sqrt{al}\,t}\right)^{\frac{c_{\varepsilon 2}}{c_{\varepsilon 2}-1}}},$$

и для k:

$$k = C_5 \sqrt{\frac{a}{l}}\,\frac{\left(C_3 e^{\sqrt{al}\,t} + C_4 e^{-\sqrt{al}\,t}\right)^{\frac{1}{c_{\varepsilon 1}-1}}}{\left(C_3 e^{\sqrt{al}\,t} - C_4 e^{-\sqrt{al}\,t}\right)^{\frac{1}{c_{\varepsilon 2}-1}}}$$

(C_5 — произвольная постоянная).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящий момент имеется большое количество моделей для расчёта турбулентных течений. Для проверки пригодности той или иной модели для решения конкретной задачи иногда требуется проведение дорогостоящих экспериментов. Наличие инвариантных решений может помочь сделать выбор адекватной модели [6]. Методика построения точных решений, использованная в данной работе, применима и к другим моделям турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Торхов Ю.Н., Самохин А.В., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н.** Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. 2-е изд. М.: Изд-во Факториал-Пресс, 2005.
2. **Khor'kova N.G., Verbovetsky A.M.** On symmetry subalgebras and conservation laws for k-e turbulence model and the Navier-Stokes equation. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2. 1995. V. 167. P. 61–90.
3. **Jones W.P., Launder B.E.** The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. Internat. J. Heat Mass Transfer 15 (1972), no. 2, p. 301–314.
4. **Kollmann W. (ed.)** Prediction method for turbulent flows, Hemisphere, Washington, 1980, 312 p.
5. **Oberlack M.** Symmetries and Invariant Solutions of Turbulent Flows and their Implications for Turbulence Modelling. — Theories of Turbulence. International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 442. 2002. P. 301-366.
6. **Вербовецкий А.М., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н.** Симметрии дифференциальных уравнений: учеб. пособие.– М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

ON EXACT SOLUTIONS OF $k-\varepsilon$ TURBULENCE MODEL

Khorkova N.G.

A method of constructing invariant solutions is applied to $k-\varepsilon$ turbulence model. Exact solutions for $k-\varepsilon$ turbulence model are obtained. The method for construction of exact solutions used in this paper may be applied to other models of turbulence.

Keywords: nonlinear differential equation, local infinitesimal symmetries, invariant solution, $k-\varepsilon$ turbulence model.

REFERENCES

1. Bocharov A.V., Chetverikov V.N., Duzhin S.V., Khor'kova N.G., Krasil'shchik I.S., Samokhin A.V., Torkhov Yu.N., Verbovetsky A.M., Vinogradov A.M. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathemetical Phisics* // Translations of Mathematical Monographs, vol. 182 – Providence, RI: AMS, 1999. 333 p.
2. Khor'kova N.G., Verbovetsky A.M. *On symmetry subalgebras and conservation laws for k-e turbulence model and the Navier-Stokes equation*. Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, 1995, v. 167, pp. 61–90.
3. Jones W.P., Launder B.E. *The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence*. Internat. J. Heat Mass Transfer, 15 (1972), no. 2, pp. 301–314.
4. Kollmann W. (ed.) *Prediction method for turbulent flows*, Hemisphere, Washington, 1980, 312 p.
5. Oberlack M. *Symmetries and Invariant Solutions of Turbulent Flows and their Implications for Turbulence Modelling*. Theories of Turbulence. International Centre for Mechanical Sciences. — Volume 442, 2002, pp. 301-366.
6. Verbovetsky A.M., Khor'kova N.G., Chetverikov V.N. *Simmetrii differenzialnych uravneniy. (Symmetries of Differential Equations). Uchebnoe posobiye*. Moscow, MGTU, 2002, 36 p.

Сведения об авторе

Хорькова Нина Григорьевна, окончила МГУ им. М.В. Ломоносова (1983), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н. Э. Баумана, автор 17 научных работ, область научных интересов - алгебро-геометрическая теория дифференциальных уравнений.