

ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.9.1 – Транспортные и транспортно-технологические системы страны, ее регионов и городов, организация производства на транспорте;

2.9.4. – Управление процессами перевозок;

2.9.6 – Аэронавигация и эксплуатация авиационной техники;

2.9.8 – Интеллектуальные транспортные системы

УДК 621.396.96

DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-4-8-28

Метод определения маршрута обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности

Г.В. Коваленко¹, И.А. Ядров¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации имени Главного маршала авиации А.А. Новикова, г. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация: В статье представлен метод построения маршрута обхода динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности, основанный на использовании взвешенного динамического графа с фиксированным множеством вершин и изменяющимся множеством ребер. Предложенный подход позволяет учитывать пространственно-временную изменчивость грозовых ячеек, а также способствует снижению вычислительной сложности задачи планирования и повышению безопасности маршрута обхода при наличии прогностической информации о развитии грозовых очагов в сверхкраткосрочном периоде. Также представлены результаты разработки алгоритма оптимизации маршрута на основе графа видимости, обеспечивающего сокращение длины маршрута без потери корректности обхода. Проведен статистический анализ, подтверждающий эффективность метода и сопоставимость его результатов с базовым подходом при меньших вычислительных затратах. Практическая значимость работы заключается в возможности интеграции разработанного метода в состав интеллектуальных систем поддержки принятия решений и автоматизированных систем планирования траектории полета при обходе опасных метеоявлений, что может способствовать повышению безопасности и экономичности полетов.

Ключевые слова: авиация, безопасность полетов, оптимизация, обход грозы, динамический граф, планирование маршрута, траекторное управление полетом.

Для цитирования: Коваленко Г.В., Ядров И.А. Метод определения маршрута обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности // Научный вестник МГТУ ГА. 2026. Т. 29, № 4. С. 8–28. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-4-8-28

Method for determining an aircraft avoidance route around a dynamically changing thunderstorm activity area

G.V. Kovalenko¹, I.A. Yadrov¹

*¹ St. Petersburg State University of Civil Aviation
named after Chief Marshal of Aviation A.A. Novikov, St. Petersburg, Russia*

Abstract: The paper presents a method for plotting an avoidance route around a dynamically changing thunderstorm area, based on the use of a weighted dynamic graph with a fixed set of nodes and a changing set of edges. The proposed approach allows for accounting for the spatiotemporal variability of thunderstorm cells and also contributes to reducing the computational complexity of the planning task and enhancing the safety of the avoidance route when predictive information on the development of thunderstorm

cells in the very short term is available. The results of developing a route optimization algorithm based on a visibility graph, which ensures a reduction in route length without loss of avoidance correctness, are also presented. A statistical analysis was conducted, confirming the method effectiveness and the comparability of its results with the baseline approach at lower computational costs. The practical significance of the work lies in the possibility of integrating the developed method into intelligent decision support systems and automated flight trajectory planning systems for circumventing hazardous weather phenomena, which can contribute to enhanced flight safety and efficiency.

Keywords: aviation, flight safety, optimization, thunderstorm avoidance, dynamic graph, route planning, flight trajectory management.

For citation: Kovalenko, G.V., Yadrov, I.A. (2026). Method for determining an aircraft avoidance route around a dynamically changing thunderstorm activity area. Civil Aviation High Technologies, vol. 29, no. 4, pp. 8–28. DOI: 10.26467/2079-0619-2026-29-4-8-28

Введение

Задача обеспечения безопасности полетов и повышения операционной эффективности гражданской авиации (ГА) в условиях неблагоприятных атмосферных явлений, особенно грозовой активности, является одной из ключевых в современной аэронавигации. Грозы представляют серьезную опасность для воздушных судов (ВС), а также являются одной из основных причин задержек отправок и прибытий ВС ГА [1].

Традиционно пилотам рекомендуется выполнять обход гроз на фиксированном безопасном расстоянии от границ интенсивных радиолокационных эхосигналов [2], однако результаты исследования [3] показывают, что эти правила являются слишком упрощенными и не учитывают возможность возникновения конвективно-индуцированной турбулентности за пределами зон визуально наблюдаемой конвекции. В связи с этим были разработаны статистические модели, такие как SWAM1 (модель обхода конвективной погоды, Convective weather avoidance model) и SWAM2 [2], позволяющие формировать трехмерные детерминированные и вероятностные карты обхода неблагоприятной погоды (Weather avoidance fields, WAF), которые отражают зоны, наиболее вероятно выбираемые пилотами для обхода. Тем не менее данные модели в большей степени ориентированы на статический анализ, чем на обеспечение возможности обхода грозового очага с учетом динамики его развития.

Сложность выбора маршрута обхода гроз заключается в ее динамической и стоха-

стической природе: грозовые ячейки могут интенсивно развиваться, разрушаться, объединяться или разделяться, при этом их перемещения сопровождаются случайной компонентой [4], наличие которой вызвано локальной турбулентностью, конвективными выбросами и мезомасштабными флуктуациями ветра, которые вносят труднопрогнозируемые отклонения траектории движения грозовых ячеек от детерминированного направления переноса. Для решения задачи нахождения оптимального маршрута обхода динамически изменяющихся препятствий в общем виде предлагались такие подходы, как улучшенный динамический алгоритм A* с временным окном (Improved dynamic A* algorithm combined with time window) [5], метод искусственного потенциального поля со скользящим окном (Artificial potential field method combined with rolling window) [6] и др.

Современные исследования в области оптимизации процесса выбора маршрута обхода гроз сосредоточены на разработке методов, учитывающих временную изменчивость и неопределенности грозовой активности; среди них можно выделить следующие.

1. Прогностические и вероятностные методы, заключающиеся в использовании сверхкраткосрочных прогнозов (наукастинга), которые позволяют строить маршруты обхода с заданным уровнем риска [4].

2. Метод динамической реоптимизации траекторий, заключающийся в почасовой корректировке маршрута в ходе полета ВС на основе обновляемых метеорологических данных [7].

3. Алгоритм планирования траектории полета в условиях движущихся препятствий

при заходе на посадку (Spatio-temporal dynamic window approach, SDWA), реализующий прогнозирование движения препятствий путем полиномиальной аппроксимации их положения во времени [8].

Несмотря на наличие указанных решений, до настоящего времени не предложено единого стратегического подхода, который бы одновременно учитывал динамику и неопределенность грозовой активности, а также обеспечивал высокий уровень безопасности и позволял минимизировать операционные затраты при планировании маршрутов. В связи с этим актуальной задачей является разработка методологии и алгоритмического обеспечения для построения оптимальных траекторий обхода гроз в соответствии с концепцией операций, основанных на траекториях (Trajectory-based operations, TBO) [9].

Предположим, что ВС выполняет полет в зоне грозовой деятельности и в непосредственной близости от расчетной траектории полета ВС находится множество изолированных грозовых очагов, причем для каждого момента времени t_i , $i = 1, \dots, N$ имеется прогноз множества грозовых очагов $\mathcal{T}^{(i)}$, каждый из которых имеет границу $T_k^{(i)} \in \mathcal{T}^{(i)}$ и соответствующую замкнутую область внутри этой границы $R_k^{(i)}$, которая может быть как выпуклой, так и невыпуклой.

В ходе выполнения полета из A в B должны соблюдаться ограничения:

1. ВС при обходе зоны грозовых очагов не должно заходить в область грозы:

$$[x_i, y_i]^T \notin R_k^{(i)}, \forall k \in \mathcal{T}^{(i)}, \forall i. \quad (4)$$

$$\text{dist}(T_k^{(i)}, T_m^{(i)}) \geq d_{\text{gap}}, \forall k, m \in \mathcal{T}^{(i)}, k \neq m, \forall i. \quad (6)$$

В соответствии с утратившим силу приказом «Об утверждении Федеральных авиационных правил полетов в воздушном пространстве Российской Федерации» № 136/42/51¹, указанные минимально допустимые значения устанавливались равными $d_{\text{min}} = 15$ км и $d_{\text{gap}} = 50$ км.

Представим траекторию ВС в промежутке времени $t \in [0, T]$ как функцию от времени t :

$$s(t) = [x(t), y(t)]^T, t \in [0, T]. \quad (1)$$

Пусть ВС выполняет полет из точки $s(0) = A$ в точку $s(T) = B$. Тогда задачу минимизации пути, пройденного из A в B , можно представить как

$$L = \int_0^T \left\| \frac{ds}{dt} \right\| dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Произведя дискретизацию по t на N достаточно небольших отрезков, перейдем к множеству точек $\{[x_i, y_i]^T\}_1^N = \{[x_1, y_1]^T, [x_2, y_2]^T, \dots, [x_N, y_N]^T\}$, задающих маршрут полета ВС; при этом длина пути, пройденного из A в B , может быть рассчитана как

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} d_{i,i+1} = \|[x_{i+1}, y_{i+1}]^T - [x_i, y_i]^T\|. \quad (3)$$

2. Кратчайшее расстояние от границы любого грозового участка $T_k^{(i)}$ до маршрута обхода $\text{dist}([x_i, y_i]^T, T_k^{(i)})$ в каждой его точке i не должно быть меньше минимально допустимого значения d_{min} :

$$\text{dist}([x_i, y_i]^T, T_k^{(i)}) \geq d_{\text{min}}, \forall k \in \mathcal{T}^{(i)}, \forall i. \quad (5)$$

3. Кратчайшее расстояние между границами двух любых грозовых участков $T_k^{(i)}$ и $T_m^{(i)}$ для пролета между ними не должно быть меньше минимально допустимого значения d_{gap} (как правило, $d_{\text{gap}} > 2d_{\text{min}}$):

¹ Приказ Минобороны РФ, Минтранса РФ и Росавиакосмоса от 31 марта 2002 года № 136/42/51 «Об утверждении Федеральных авиационных правил полетов в воздушном пространстве Российской Федерации». Отменен с 1 января 2021 года на основании постановления Правительства РФ от 26 октября 2020 года № 1742 [Электронный ресурс] // ГАРАНТ. URL: <https://base.garant.ru/184736/> (дата обращения: 10.10.2025).

Таким образом, рассматриваемая задача условной оптимизации может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \| [x_{i+1}, y_{i+1}]^T - [x_i, y_i]^T \| \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$[x_1, y_1]^T = A, [x_N, y_N]^T = B; \quad (8)$$

$$[x_i, y_i]^T \notin R_k^{(i)}, \forall k \in \mathcal{T}^{(i)}, \forall i; \quad (9)$$

$$\text{dist}([x_i, y_i]^T, T_k^{(i)}) \geq d_{\min}, \forall k \in \mathcal{T}^{(i)}, \forall i; \quad (10)$$

$$\text{dist}(T_k^{(i)}, T_m^{(i)}) \geq d_{\text{gap}}, \forall k, m \in \mathcal{T}^{(i)}, k \neq m, \forall i. \quad (11)$$

В работе [10] предложен метод определения маршрута обхода воздушным судном грозы с помощью нахождения кратчайшего пути на графе для случая неподвижных грозных очагов, заключающийся в следующем.

1. На этапе подготовки данных производится фильтрация радиолокационных изображений, позволяющая избавиться от случайных помех, а также от облаков, не являющихся грозными и не относящихся к зонам сильных осадков; также осуществляется преобразование отфильтрованных растровых изображений в массив векторных объектов – полигонов $\{P_k\}_{k=1}^K$ [11], каждый из которых соответствует определенному изолированному грозному очагу $T_k \in \mathcal{T}$ (в случае неподвижных грозных очагов каждому моменту времени t_i соответствует одно и то же множество $\mathcal{T}$).

2. На этапе агрегации данных реализуется механизм разделения полигонов P_k на группы $\mathcal{G}_l$ таким образом, чтобы в рамках одной группы расстояние между любыми двумя соседними полигонами не превышало значение d_{gap} : таким образом, группа представляет собой множество полигонов, пролет между которыми недопустим (рис. 1, а и 1, б).

3. Далее вокруг каждого из полигонов P_k строится буферная зона $B_k^{\min}$ с радиусом, равным минимально допустимому расстоянию до границы грозного очага $d_{\min}$, после чего для каждой группы $\mathcal{G}_l$ вокруг буферных зон входящих в нее полигонов строится минимальная вогнутая оболочка (Concave Hull)

H_l [12], объединяющая все полигоны внутри группы в единую геометрию (рис. 1, в).

4. Реализованная таким образом агрегация позволяет перейти к задаче оптимизации с двумя условиями: 1) маршрут обхода должен начинаться в заданной точке A и заканчиваться в заданной точке B , лежащих за пределами оболочек; 2) ни один из участков маршрута между любыми двумя последовательными поворотными пунктами не должен пересекать границы оболочек.

5. На финальном этапе оболочки упрощаются – для этого применяется алгоритм Дугласа – Пекера [13], рекурсивно удаляющий точки, задающие границы оболочки, минимально влияя на ее форму и сохраняя ее общую структуру практически неизменной. В результате каждая из оболочек H_l представляется в виде аппроксимирующего ее границы множества точек $\mathcal{H}_l$, которые используются при инициализации графа $G(V^{\text{hull}}, E^{\text{hull}})$ в качестве множества вершин V^{hull} . Далее реализуется валидация ребер графа E^{hull} – для каждой пары вершин $V_p^{\text{hull}}, V_q^{\text{hull}}$ проверяется, пересекает ли соединяющее их ребро E_{pq}^{hull} хотя бы одну из оболочек, и если нет, то соответствующее ребро считается валидным и добавляется в граф.

6. Оптимальный маршрут определяется с помощью алгоритма Дейкстры [14] как кратчайший путь из A в B на полученном взвешенном графе, при этом в качестве весов используются расстояния между соответствующими вершинами (рис. 1, г).

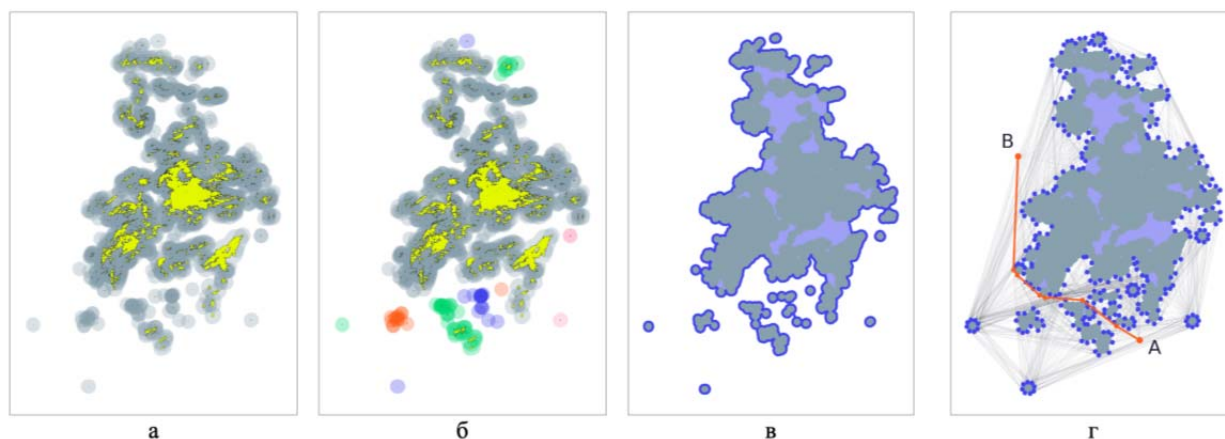


Рис. 1. Определение маршрута обхода неподвижной грозы: *а* – буферные зоны B_k^{gap} с отступом $d_{\text{gap}}/2$, построенные для каждого полигона; *б* – объединение попарно пересекающихся буферных зон в группы G_i ; *в* – вогнутые оболочки, построенные вокруг полученных групп для буферных зон B_k^{min} ; *г* – вершины графа для вогнутых оболочек и кратчайший путь из *A* в *B* на графе

Fig. 1. Determination of the stationary thunderstorm avoidance route: *a* – buffer zones B_k^{gap} with an offset of $d_{\text{gap}}/2$, constructed for each polygon; *б* – grouping of pairwise intersecting buffer zones into sets G_i ; *в* – concave hulls constructed around the resulting groups for the buffer zones B_k^{min} ; *г* – graph nodes for the concave hulls and the shortest path from *A* to *B* on the graph

В настоящей работе предлагается метод определения маршрута обхода ВС не неподвижной во времени, но динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности, во многом основанный на описанном способе [10] и представляющий собой его обобщение для случая подвижных грозовых очагов.

Методы

Разработка и апробация предлагаемого метода определения оптимального маршрута обхода, а также предшествующие этапы получения и обработки данных о расположении грозовых очагов и построение самого графа осуществлялись с использованием языка объектно ориентированного программирования Python и библиотек: NumPy с поддержкой операций над многоуровневыми массивами, GeoPandas и Shapely для обработки геопространственных данных, а также NetworkX, предоставляющей инструменты для работы с графами и прочими сетевыми структурами. Созданный авторами в рамках исследования код находится в открытом доступе².

² Код для предобработки и визуализации растровых изображений [Электронный ресурс] // github.com.

Для разработки и тестирования алгоритма использовались данные³ радиолокационных метеорологических наблюдений за грозовыми очагами и сильными ливневыми осадками Финского метеорологического института (Finnish Meteorological Institute, FMI). Подробно порядок получения и предобработки данных описан в [10].

Наиболее прямолинейный подход (алгоритм 1) к обобщению метода обхода статичной грозы из [10] для случая динамически изменяющихся грозовых очагов заключается в том, чтобы в каждый момент времени t_i для заданного размера окна w рассмотреть множество грозовых очагов $\mathcal{T}^{(i:i+w)} = \{\mathcal{T}^{(i)}, \mathcal{T}^{(i+1)}, \dots, \mathcal{T}^{(i+w)}\}$ как единое и неподвижное и применить к нему метод обхода статичной грозы.

Алгоритм 1. Базовый метод определения маршрута обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности

URL: <https://github.com/yaaadrov/WxRADNet-PyTorch> (дата обращения: 10.10.2025).

³ Схема данных [Электронный ресурс] // XML-фал. URL: <http://s3-eu-west-1.amazonaws.com/fmi-opendata-radar-geotiff> (дата обращения: 10.10.2025).

Требования: начальное положение ВС $[x_A, y_A]^T$; значения минимальных расстояний $d_{\min}$ и d_{gap} ; размер окна w ; прогноз множества грозовых очагов $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$ для каждого требуемого момента времени t_i ; шаг дискретизации времени Δt ; скорость полета ВС V ; точка окончания маршрута обхода $[x_B, y_B]^T$.

1. Обозначить текущее положение $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \leftarrow [x_A, y_A]^T, i \leftarrow 1$.

2. Инициализировать множество поворотных пунктов $\mathcal{P} = \{[x_A, y_A]^T\}$, задающих маршрут обхода грозы.

3. Пока $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \neq [x_B, y_B]^T$:

4. Сформировать текущее временное окно $\mathcal{T}_{\text{cur}} = \mathcal{T}^{(i:i+w)}$.

5. Применить алгоритм из [10] для получения из $\mathcal{T}_{\text{cur}}$ графа $G_{\text{cur}}(V_{\text{cur}}^{\text{hull}}, E_{\text{cur}}^{\text{hull}})$.

6. С помощью алгоритма Дейкстры найти множество точек $\mathcal{P}_{\text{cur}} = \{[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T, \dots, [x_B, y_B]^T\}$, задающих кратчайший маршрут из $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T$ в $[x_B, y_B]^T$ на взвешенном графе $G_{\text{cur}}(V_{\text{cur}}^{\text{hull}}, E_{\text{cur}}^{\text{hull}})$.

7. Ограничить полученный маршрут длиной $L = V \cdot \Delta t$ (либо конечной точкой маршрута $[x_B, y_B]^T$) и получить соответствующее подмножество поворотных пунктов $\mathcal{P}_{\text{cur}}^L$.

8. Получить новые координаты $[x_{\text{new}}, y_{\text{new}}]^T$ как конечную точку полученного отрезка маршрута $\mathcal{P}_{\text{cur}}^L$.

9. Обновить переменные: $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \leftarrow [x_{\text{new}}, y_{\text{new}}]^T, \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_{\text{cur}}^L, i \leftarrow i + 1$.

10. Вернуть множество поворотных пунктов $\mathcal{P}$, задающих маршрут обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности.

Главным недостатком такого подхода является необходимость на каждом шаге i заново выполнять операции по созданию графа $G_{\text{cur}}(V_{\text{cur}}^{\text{hull}}, E_{\text{cur}}^{\text{hull}})$, включая валидацию ребер графа, – это вычислительно сложный процесс со сложностью $\mathcal{O}(|V_{\text{cur}}^{\text{hull}}|^2)$, требующий для каждой пары вершин $V_p^{\text{hull}}, V_q^{\text{hull}}$ проверить, пересекает ли соединяющее их ребро E_{pq}^{hull} хотя бы одну из оболочек.

Один из возможных подходов к решению задачи определения маршрута обхода воз-

душным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности заключается в нахождении кратчайшего пути на динамическом (временном) графе (dynamic graph) [15] – таком, у которого для каждого момента времени $t_i, i \in \mathbb{Z}$ множество вершин V фиксировано, а множество ребер меняется во времени, то есть каждому t_i соответствует свой набор $E^{(i)}$. В простейшем случае для нахождения кратчайшего пути на таком графе со скользящим окном размера w для каждого момента t_i строится агрегированный граф $G^{(i)}(V, E(i, w))$, после чего запускается классический алгоритм Дейкстры или его оптимизированный аналог [16].

В рассмотренном алгоритме 1 в каждый новый момент t_i окно, пробегающее по всем множествам грозовых очагов $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$, сдвигается на единицу вперед, в результате текущая радиолокационная картина $\mathcal{T}_{\text{cur}} = \mathcal{T}^{(i:i+w)}$ изменяется – очередному t_i будет соответствовать свой набор вершин $V_{\text{cur}}^{\text{hull}}$, полученных в результате упрощения границ оболочек, из-за чего использование построенного на предыдущем шаге графа становится невозможным.

Для получения динамического графа авторами предлагается использовать подход (алгоритм 2), включающий следующие основные этапы.

1. Шаги 1–5: создание множества вершин $\mathcal{V}$ как точек, полученных после упрощения границ вогнутых оболочек для всех доступных моментов времени t_i .

2. Шаг 6: кластеризация с целью замены исходных вершин $\mathcal{V}$ на центроиды кластеров $\mathcal{C} = \{c_j\}_{j=1}^C$ таким образом, чтобы полученный в результате динамический граф не был перегружен слишком плотными облаками вершин (рис. 2, а).

3. Шаги 7–9: учет большого числа грозовых очагов (множества $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$ для каждого требуемого момента времени t_i) приводит к тому, что даже после кластеризации число вершин оказывается заметно больше, чем в случае статичной картины из единственного множества грозовых очагов $\mathcal{T}$, – из-за этого процедура валидации ребер становится

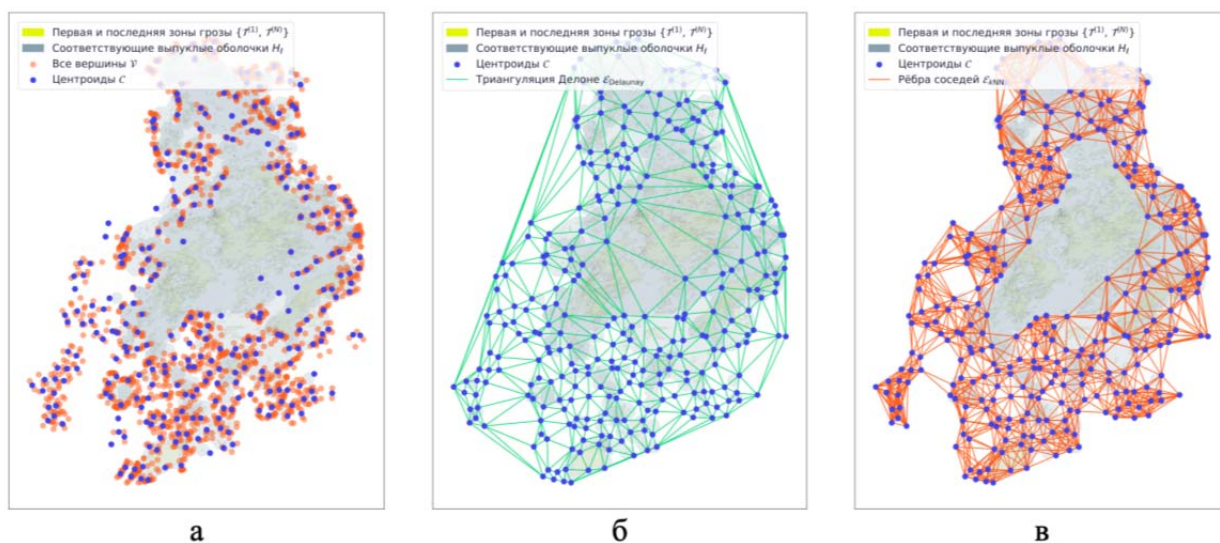


Рис. 2. Создание динамического графа⁴: а – множества вершин $\mathcal{V}$ и центроидов $\mathcal{C}$; б – триангуляция Делоне (до валидации ребер); в – ребра, соединяющие k ближайших соседей (до валидации ребер)

Fig. 2. Dynamic graph construction⁴: а – sets of nodes $\mathcal{V}$ and centroids $\mathcal{C}$; б – Delaunay triangulation (prior to edge validation); в – edges connecting the k nearest neighbours (prior to edge validation)

слишком ресурсоемкой. По этой причине предлагается проверять не все возможные ребра, а некоторое множество ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{cand}}$, полученное как объединение:

3.1. Триангуляции Делоне $\mathcal{E}_{\text{Delaunay}}$ [17] – триангуляции множества центроидов $\mathcal{C}$, в ко-

торой для любой треугольной ячейки окружность, описанная вокруг треугольника, не содержит в своей внутренней никаких других точек из $\mathcal{C}$ (позволяет обеспечить наличие связей между дальними вершинами (рис. 2, б)):

$$\mathcal{E}_{\text{Delaunay}} = \bigcup_{\Delta \in \text{Triangulation}(\mathcal{C})} \{(p, q) \mid c_p, c_q \in \Delta\}. \quad (12)$$

3.2. Множества ребер, соединяющих каждую вершину с k ее ближайшими соседями (k -nearest neighbors, k NN) [18] (позволяют обеспечить наличие связей между ближайшими вершинами (рис. 2, в)):

$$\mathcal{E}_{k\text{NN}} = \{(p, q) \mid c_q \in \operatorname{argmin}_{c_j \in \mathcal{C}, c_j \neq c_p}^k \operatorname{dist}(c_p, c_j)\}. \quad (13)$$

4. Шаги 10–14: для каждого момента времени для каждого ребра-кандидата из $\mathcal{E}_{\text{cand}}$ проверяется, пересекает ли оно хотя бы одну из

вогнутых оболочек текущей радиолокационной картины $\mathcal{T}^{(i)}$, и, если нет, ребро добавляется в соответствующее множество $\mathcal{E}^{(i)}$.

5. Шаг 15: получен взвешенный динамический граф с фиксированным множеством вершин $\mathcal{C}$ и уникальными для каждого момента времени t_i наборами ребер $\{\mathcal{E}^{(i)}\}_{i=1}^N$.

Алгоритм 2. Метод создания динамического графа

Требования: прогноз множества грозových очагов $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$ для каждого требуемого мо-

⁴ Упрощенно: на данном рисунке и далее в качестве коэффициента допустимого отклонения при упрощении границ оболочек и создании кластеров использовалось значение 30 000 (30 км), в то время как при практической реализации предлагаемого метода для достижения лучших результатов авторами рекомендуется использовать значение 5 000 (5 км), что приведет к увеличению числа всех вершин в примерно 3 раза (по сравнению с картиной, изображенной на рисунке), а числа центроидов – примерно в 10 раз.

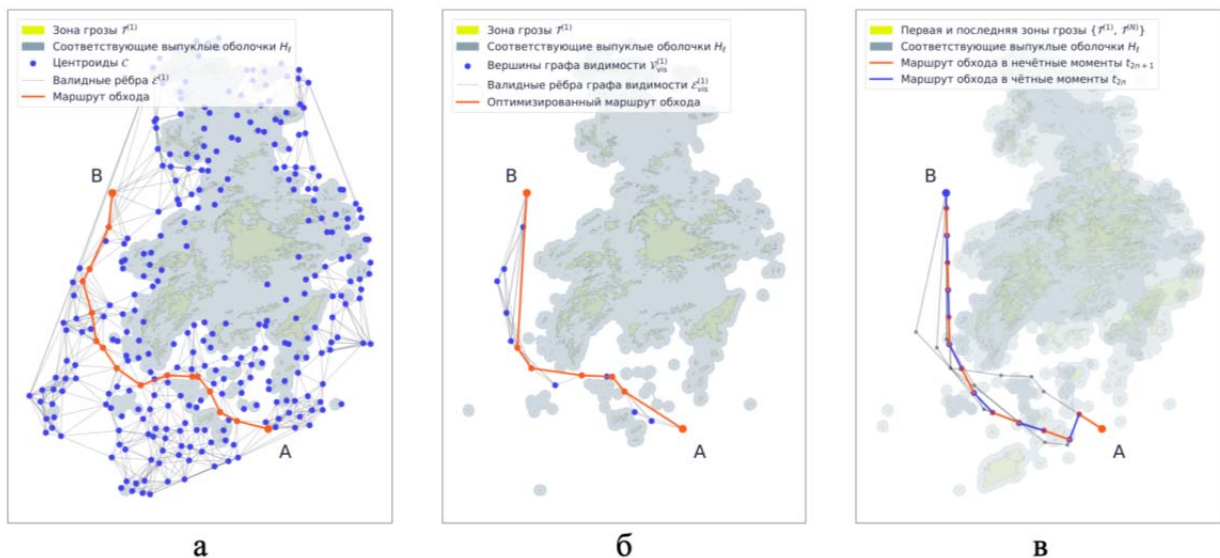


Рис. 3. Нахождение маршрута обхода на динамическом графе: *a* – кратчайший путь из *A* в *B* на $G^{(1)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(1)})$; *б* – оптимизация маршрута обхода за счет построения дополнительного графа видимости; *в* – финальный маршрут обхода как совокупность отрезков длины $L = V \cdot \Delta t$ для каждого t_i

Fig. 3. Finding an avoidance route on a dynamic graph: *a* – the shortest path from *A* to *B* on $G^{(1)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(1)})$; *б* – route optimization by constructing an additional visibility graph; *в* – the final avoidance route as a sequence of segments of length $L = V \cdot \Delta t$ for each t_i

мента времени t_i ; параметр кластеризации d_{clust} (в работе принят равным 5 км); число k ближайших соседей для определения ребер-кандидатов (в работе принято равным 10).

1. Инициализировать пустое множество вершин $\mathcal{V} = \{\}$.

2. Для каждого множества грозовых очагов $\mathcal{T}^{(i)}$ из $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$:

3. Для каждой вогнутой оболочки H_l , соответствующей текущей радиолокационной картине $\mathcal{T}^{(i)}$ в момент t_i :

4. Упростить границы H_l с помощью алгоритма Дугласа – Пекера и представить оболочку в виде множества точек $\mathcal{H}_l$.

5. Обновить множество вершин $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \mathcal{H}_l$.

6. Разделить полученное множество вершин $\mathcal{V}$ на кластеры с параметром кластеризации d_{clust} (кластер может включать от 1 вершины) и получить множество центроидов этих кластеров $\mathcal{C} = \{c_j\}_{j=1}^{\mathcal{C}}$.

7. Для множества точек $\mathcal{C}$ построить триангуляцию Делоне – получить множество ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{Delaunay}}$.

8. Для каждой вершины из $\mathcal{C}$ найти k ее ближайших соседей по евклидову расстоя-

нию – получить множество ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{k\text{NN}}$.

9. Получить объединение ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{cand}} = \mathcal{E}_{\text{Delaunay}} \cup \mathcal{E}_{k\text{NN}}$.

10. Произвести валидацию ребер. Для каждого момента времени t_i :

11. Инициализировать пустое множество валидных ребер $\mathcal{E}^{(i)} = \{\}$.

12. Для каждого ребра-кандидата $E_{pq} = (p, q)$ из $\mathcal{E}_{\text{cand}}$:

13. Проверить, пересекает ли E_{pq} хотя бы одну из оболочек H_l текущей радиолокационной картины $\mathcal{T}^{(i)}$.

14. Если не пересекает, то добавить его в множество валидных ребер с весом $\text{dist}(c_p, c_q)$: $\mathcal{E}^{(i)} \leftarrow \mathcal{E}^{(i)} \cup \{E_{pq}\}$.

15. Вернуть взвешенный динамический граф $G^{(i)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(i)})$.

На рис. 3, *a* показан маршрут обхода зоны грозы $\mathcal{T}^{(1)}$, полученный для динамического графа $G^{(1)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(1)})$: он представлен в виде ломаной с большим количеством звеньев, что объясняется использованием заметно большего по сравнению со статичным случаем (рис. 1, *з*) числа вершин, а также примени-

ем триангуляции Делоне для упрощения процедуры валидации ребер.

Полученный маршрут может быть оптимизирован, для этого предлагается: 1) построить небольшой граф видимости $G_{\text{vis}}^{(1)}(\mathcal{V}_{\text{vis}}^{(1)}, \mathcal{E}_{\text{vis}}^{(1)})$, вершины которого – путь из A в B на $G^{(1)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(1)})$; 2) провалидировать его ребра; 3) получить оптимизированный маршрут для текущего временного окна как кратчайший маршрут из A в B (рис. 3, б). Финальный маршрут обхода динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности, таким образом, может быть получен как совокупность отрезков длины $L = V \cdot \Delta t$, взятых от оптимизированных маршрутов обхода для каждого момента t_i (рис. 3, в, алгоритм 3).

Алгоритм 3. Метод определения маршрута обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности

Требования: начальное положение ВС $[x_A, y_A]^T$; значения минимальных расстояний $d_{\min}$ и d_{gap} ; размер окна w ; прогноз множества грозowych очагов $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$ для каждого требуемого момента времени t_i ; шаг дискретизации времени Δt ; скорость полета ВС V ; точка окончания маршрута обхода $[x_B, y_B]^T$; параметр кластеризации d_{clust} ; число k ближайших соседей для определения ребер-кандидатов.

1. Обозначить текущее положение $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \leftarrow [x_A, y_A]^T, i \leftarrow 1$.

2. Инициализировать множество поворотных пунктов $\mathcal{P} = \{[x_A, y_A]^T\}$, задающих маршрут обхода грозы.

3. Применить алгоритм 2 для получения взвешенного динамического графа $G^{(i)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(i)})$.

4. Пока $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \neq [x_B, y_B]^T$:

5. Сформировать текущее временное окно $\mathcal{T}_{\text{cur}} = \mathcal{T}^{(i:i+w)}$.

6. Получить граф для текущего временного окна $G_{\text{cur}} = G^{(i)}(\mathcal{C}, \mathcal{E}^{(i:i+w)}) = G^{(i)}(\mathcal{C}, \cap_{i=i+w}^{i+w} \mathcal{E}^{(i)})$, множество ребер которого представляет собой пересечение множеств $\mathcal{E}^{(i)}$ для $i \in [i, i+w]$.

7. С помощью алгоритма Дейкстры найти множество точек $\mathcal{V}_{\text{vis}}^{(i)} = \{[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T, \dots, [x_B, y_B]^T\}$, задающих кратчайший маршрут из $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T$ в $[x_B, y_B]^T$ на взвешенном графе G_{cur} .

8. Построить граф видимости $G_{\text{vis}}(\mathcal{V}_{\text{vis}}^{(i)}, \mathcal{E}_{\text{vis}}^{(i)})$, где $\mathcal{E}_{\text{vis}}^{(i)} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathcal{V}_{\text{vis}}^{(i)}, p \neq q\} \cap \mathcal{E}^{(i:i+w)}$ представляет собой пересечение множества всех возможных ребер для вершин $\mathcal{V}_{\text{vis}}^{(i)}$ и множества всех валидных для текущего окна ребер $\mathcal{E}^{(i:i+w)} = \cap_{i=i+w}^{i+w} \mathcal{E}^{(i)}$.

9. С помощью алгоритма Дейкстры найти оптимизированный маршрут обхода для текущего временного окна как множество точек $\mathcal{P}_{\text{cur}} = \{[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T, \dots, [x_B, y_B]^T\}$, задающих кратчайший маршрут из $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T$ в $[x_B, y_B]^T$ на взвешенном графе $G_{\text{vis}}(\mathcal{V}_{\text{vis}}^{(i)}, \mathcal{E}_{\text{vis}}^{(i)})$.

10. Ограничить полученный маршрут $\mathcal{P}_{\text{cur}}$ длиной $L = V \cdot \Delta t$ (либо конечной точкой маршрута $[x_B, y_B]^T$) и получить соответствующее подмножество поворотных пунктов $\mathcal{P}_{\text{cur}}^L$.

11. Получить новые координаты $[x_{\text{new}}, y_{\text{new}}]^T$ как конечную точку полученного отрезка маршрута $\mathcal{P}_{\text{cur}}^L$.

12. Обновить переменные: $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T \leftarrow [x_{\text{new}}, y_{\text{new}}]^T, \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_{\text{cur}}^L, i \leftarrow i + 1$.

13. Вернуть множество поворотных пунктов $\mathcal{P}$, задающих маршрут обхода воздушным судном динамически изменяющейся зоны грозовой деятельности.

Маршрут обхода считается успешным в том случае, если в каждый момент t_i начальное положение ВС $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T$ находится за пределами вогнутых оболочек для текущего временного окна. Если же конечная точка отрезка для t_{i-1} оказывается внутри вогнутых оболочек для $\mathcal{T}^{(i:i+w)}$, в качестве нового начального положения выбирается ближайшая доступная к $[x_{\text{cur}}, y_{\text{cur}}]^T$ вершина динамического графа, но маршрут считается неуспешным.

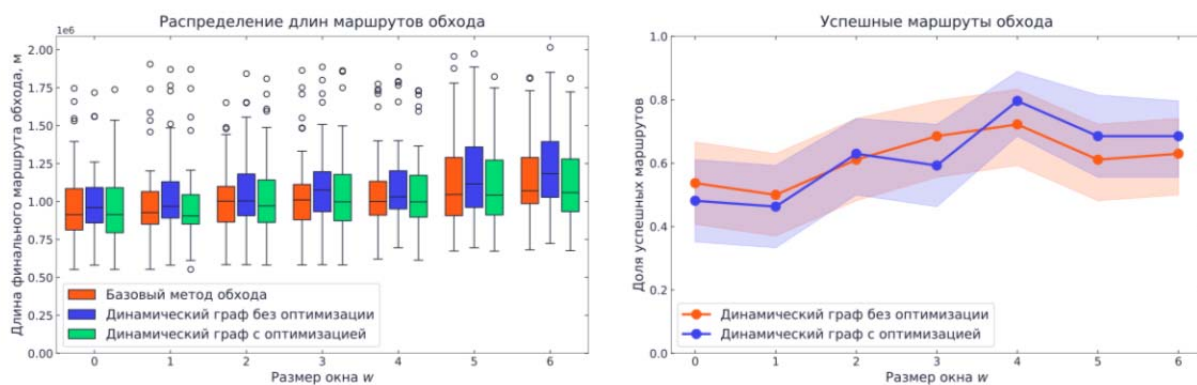


Рис. 4. Распределение длин маршрутов (слева) и доля успешных маршрутов обхода (справа)
Fig. 4. Route length distribution (left) and proportion of successful avoidance routes (right)

Результаты

Предлагаемые в работе методы: 1) базовый (алгоритм 1); 2) основанный на построении динамического графа; а также 3) его оптимизация (алгоритм 3) – были применены для нахождения маршрутов обхода 27 реальных грозовых конфигураций, отобранных на этапе получения данных [10], для размеров окна w от 0 (в каждый момент t_i маршрут обхода строится на основе исключительно текущей радиолокационной картины $\mathcal{T}^{(i)}$ без учета прогноза) до 6. Начальные и конечные точки A и B определялись авторами с учетом динамики развития грозовых очагов таким образом, чтобы точки находились в непосредственной близости от грозы, максимально усложняя задачу нахождения оптимального маршрута обхода; при этом строились не только маршруты из A в B , но и из B в A – всего, таким образом, для каждого метода и окна $w = 0, \dots, 6$ было получено 54 маршрута обхода.

На рис. 4 слева показано распределение длин маршрутов для каждого из методов в зависимости от размера временного окна w ; на рис. 4 справа показан линейный график доли успешных маршрутов в зависимости от размера окна w для обоих методов, основанных на построении динамического графа, с доверительным интервалом 0,95.

Как следует из рис. 4, для всех рассмотренных случаев медианное значение длины

маршрута для метода, основанного на построении динамического графа с оптимизацией, оказалось меньше, чем для других методов. Наибольший процент успешных маршрутов составляет 79,6 % и наблюдается для метода с динамическим графом и дополнительной оптимизацией (напомним, что успешным называется такой маршрут, для которого каждая финальная точка отрезка для момента t_{i-1} находится вне зон выпуклых оболочек, соответствующих окну $\mathcal{T}^{(i:i+w)}$). В случае если при определении маршрута обхода предсказания развития грозы вовсе не используются ($w = 0$), процент успешных маршрутов составляет порядка 50 %.

Как правило, осуществление оптимизации (пункты 8–9 алгоритма 3) направлено на сглаживание зигзагов, образованных по причине использования при построении динамического графа (алгоритм 2) не всех возможных ребер, но отобранного подмножества ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{cand}}$, однако в некоторых случаях влияние оптимизации на маршрут обхода может быть куда более ощутимым. Так, на рис. 5, а видно, что первоначально как маршрут без оптимизации, так и маршрут с оптимизацией были проложены между двумя грозовыми очагами, однако в случае с методом без оптимизации ВС подошло к точке разделения очагов слишком поздно, когда вогнутые оболочки соответствующих очагов уже слились, делая пролет между ними невозможным. В результате ВС пришлось до-

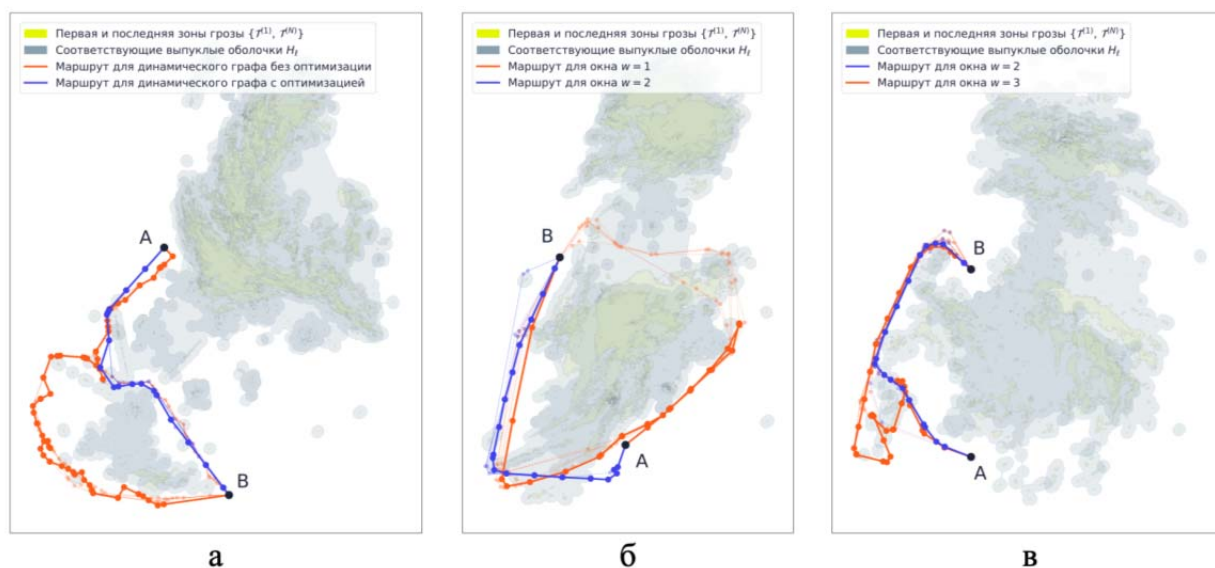


Рис. 5. Примеры маршрутов обхода: *а* – оптимизация позволяет значительно сократить маршрут обхода; *б* – отсутствие учета прогноза развития грозы может привести к попытке обойти очаг с подветренной стороны; *в* – увеличение размера окна, как правило, приводит к увеличению длины маршрута обхода
Fig. 5. Examples of avoidance routes: *a* – optimization allows for a significant reduction of the avoidance route length; *б* – failure to account for the thunderstorm development forecast may lead to an attempt to avoid the cell from the leeward side; *в* – increasing the window size generally leads to an increase in the avoidance route length

полнительно обойти очаг с юго-запада, что привело к увеличению маршрута обхода на 74 % (655,7 км) по сравнению с маршрутом, полученным методом с применением оптимизации.

Из рис. 4 видно, что увеличение размера окна, как правило, влечет за собой увеличение длины маршрута; рис. 5, в позволяет проиллюстрировать эту тенденцию: из-за использования увеличенного размера окна вогнутые оболочки двух грозовых очагов сливаются слишком рано, из-за чего пропадает возможность пролететь между ними. В приведенном примере использование окна $w = 2$ по сравнению с $w = 1$ привело к увеличению длины маршрута обхода (полученного методом, основанным на использовании динамического графа с оптимизацией) на 73,3 % (629,7 км).

Однако еще большее увеличение длины маршрута обхода можно получить, если вовсе не учитывать прогноз развития грозы и выполнять обход с $w = 0$: так, на рис. 5, б видно, что в какой-то момент осуществление обхода грозы с подветренной стороны (маршрут показан оранжевым) становится

невозможным, из-за чего ВС вынуждено вернуться в начальную точку *A* и произвести обход с подветренной стороны, как и было реализовано изначально в случае для маршрута со значением $w = 1$ (показан синим). Таким образом, в рассматриваемом случае учет прогноза развития грозы позволил сократить длину маршрута обхода на 32,6 % (493,5 км).

Для определения влияния выбора метода обхода и размера окна на итоговую длину маршрута был проведен двухфакторный дисперсионный анализ (Analysis of variance, ANOVA) [19], достоверность которого подтверждается гомогенностью дисперсий всех алгоритмов при каждом размере окна w – все значения p -уровней значимости по тесту Левена (Levene's test) [20] составляют $p > 0,48$. Результаты дисперсионного анализа позволили установить следующее.

1. Наличие значимого основного влияния на среднюю длину пути как метода обхода (со значением p -уровня значимости $p \ll 0,001$), так и размера окна ($p \ll 0,001$).

2. Наличие значимого взаимодействия между методом и размером окна ($p = 0,0104$), указывающего на то, что размер окна по-

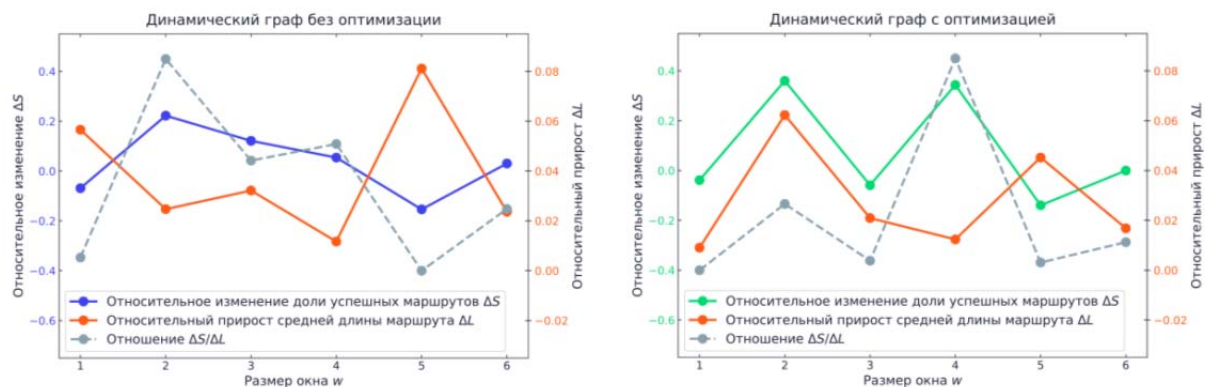


Рис. 6. Относительное изменение доли успешных маршрутов и средней длины маршрута для каждого окна w для метода, основанного на построении динамического графа (слева) и его оптимизированной версии (справа)
Fig. 6. Relative change in the proportion of successful routes and the average route length for each window w for the method based on dynamic graph construction (left) and its optimized version (right)

разному влияет на среднюю длину пути в зависимости от используемого метода.

Относительная разница ΔL_{rel} маршрутов L_A и L_B , полученных с помощью методов A и B , может быть получена как

$$\Delta L_{\text{rel}} = \frac{L_A - L_B}{(L_A + L_B)/2}. \quad (14)$$

Результаты теста Шапиро – Уилка (Shapiro-Wilk test) [21] для проверки гипотезы о нормальности распределения ΔL_{rel} со значением уровня статистической значимости $\alpha = 0,05$ позволили сделать вывод о том, что для всех рассматриваемых w для всех пар алгоритмов распределение ΔL_{rel} статистически значимо отличается от нормального, следовательно, для проверки гипотез о статистически значимом различии средних необходимо использовать непараметрический тест.

В силу парности данных для сравнения средних был использован непараметрический тест Уилкоксона для парных выборок (Wilcoxon signed-rank test) [22] со значением уровня статистической значимости $\alpha = 0,05$, результаты которого показали, что для всех рассмотренных значений w :

1) не существует статистически значимой разницы средних длин маршрута, полученных с помощью базового метода и метода, основанного на применении динамического графа с оптимизацией (значения p -уровней

значимости с поправкой Бонферрони на множественную проверку гипотез для различных значений w лежат в диапазоне $p \in [0,118; 1,0]$);

2) медианная длина оптимизированного маршрута с использованием динамического графа статистически значимо отличается (меньше) от медианной длины маршрута с использованием динамического графа без оптимизации, $p \in [1,04 \cdot 10^{-8}; 8,42 \cdot 10^{-5}]$;

3) медианная длина маршрута для базового алгоритма статистически значимо отличается (меньше) от медианной длины маршрута с использованием динамического графа без оптимизации, $p \in [8,35 \cdot 10^{-8}; 0,006]$.

Результаты парного непараметрического теста Мак-Немара (Pairwise McNemar test) [23] для методов, основанных на использовании динамического графа с оптимизацией и без нее, показывают, что ни для одного из рассматриваемых размеров окна w использование оптимизации не показало статистически значимого улучшения с точки зрения увеличения доли успешных маршрутов (минимальное значение p -уровня значимости составляет $p = 0,386$ и соответствует размерам окна $w = 4$ и $w = 5$).

Для выбора оптимального размера окна w для методов, основанных на создании динамического графа, были построены линейные графики относительного изменения доли успешных маршрутов ΔS и средней длины

маршрута ΔL для каждого окна w по сравнению с предыдущим (рис. 6): оптимальным предлагается считать тот размер окна, которому соответствует наибольший прирост доли успешных маршрутов при как можно меньшем приросте относительного изменения их средней длины (то есть наибольшее значение коэффициента $\Delta S/\Delta L$). Из рис. 6 видно, что для метода без оптимизации таким значением является $w = 2$, а для метода с оптимизацией – $w = 4$.

Обсуждение

Анализируя алгоритмическую сложность [24] базового метода определения маршрута обхода динамически изменяющейся грозы (алгоритм 1) в предположении, что при увеличении размера окна w на один число вершин графа $G_{\text{cur}}(V_{\text{cur}}^{\text{hull}}, E_{\text{cur}}^{\text{hull}})$ увеличивается на среднее значение вершин в каждый момент времени V , можно заключить:

1) в каждый момент времени t_i асимптотика валидации ребра между каждой возможной парой вершин зависит в том числе от размера окна w (значению $w = 0$ соответствует V вершин, $w = 1 - 2V$ вершин и т. д.) и составляет $\mathcal{O}(((w+1)V)^2) \approx \mathcal{O}((wV)^2)$;

2) причем для каждого ребра необходимо проверить пересечение с $(w+1)P$ полигонами, где P – среднее число полигонов для каждого t_i , что в итоге дает сложность $\mathcal{O}(w^3V^2P)$;

3) алгоритмическая сложность алгоритма Дейкстры на графе, ребра которого соединяют все возможные пары вершин, составляет $\mathcal{O}(V^2 + V \log V)$ [25];

4) общая сложность алгоритма для всех моментов времени N , таким образом, составляет $\mathcal{O}((w^3V^2P + V^2 + V \log V)N) \approx \mathcal{O}(w^3V^2N)$ – кубическая зависимость от w и квадратичная зависимость от V делают базовый алгоритм крайне непрактичным.

Усовершенствование базового алгоритма, заключающееся в построении общего для всех моментов t_i динамического графа с постоянным числом вершин V^* , а также в вали-

дации лишь отобранного подмножества ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{cand}}$, позволяет существенно уменьшить алгоритмическую сложность метода:

1) асимптотика числа ребер составляет $\mathcal{O}(V^*)$ для триангуляции Делоне и $\mathcal{O}(kV^*)$ для k ближайших соседей, то есть можно считать, что мощность $\mathcal{E}_{\text{cand}}$ линейно зависит от числа вершин динамического графа: $|\mathcal{E}_{\text{cand}}| = cV^*$, где c – некоторая константа;

2) сложность получения триангуляции Делоне, а также получения ближайших соседей (с использованием иерархического дерева R-tree или KD-tree [26]) составляет $\mathcal{O}(V^* \log V^*)$ для обоих алгоритмов;

3) для каждого момента t_i ребра $\mathcal{E}_{\text{cand}}$ валидируются только относительно текущего числа полигонов P , что соответствует асимптотике $\mathcal{O}(|\mathcal{E}_{\text{cand}}|P) = \mathcal{O}(V^*P)$; таким образом, сложность построения графа и валидации для всех моментов N линейна от числа вершин и составляет $\mathcal{O}(V^*PN)$;

4) после построения динамического графа во время непосредственной работы алгоритма необходимо получить пересечение $w+1$ множеств $\cap_{i=1}^{w+1} \mathcal{E}^{(i)}$ с приблизительной асимптотикой $\mathcal{O}(w|\mathcal{E}_{\text{cand}}|)$, а также применить алгоритм Дейкстры, сложность которого составит $\mathcal{O}(|\mathcal{E}_{\text{cand}}| + V^* \log V^*)$; сложность для N шагов составит $\mathcal{O}((wcV^* + V^* \log V^*)N)$;

5) таким образом, предрасчет динамического графа переносит вычислительно сложные процедуры на этап предобработки данных, значительно ускоряя работу метода при непосредственном выполнении обхода грозы; общая сложность предлагаемого метода становится практически линейной от V^* и составляет $\mathcal{O}(V^*PN + (wV^* + V^* \log V^*)N)$.

Оптимизация предложенного метода (алгоритм 3) предполагает построение дополнительного графа видимости с r вершинами ($r \ll V^*$), полученными как поворотные пункты неоптимизированного маршрута обхода, и $\mathcal{O}(r^2)$ ребрами, валидация которых не требует дополнительных вычислительных затрат, так как уже была осуществлена на этапе построения динамического графа. Уве-

личение алгоритмической сложности оптимизированной версии метода происходит только за счет нахождения кратчайшего пути на новом небольшом графе видимости и составляет $\mathcal{O}(r^2)$.

Проведенные статистические тесты свидетельствуют о том, что не существует статистически значимой разницы средних распределений длин маршрутов для базового метода и для метода, основанного на применении динамического графа с оптимизацией, то есть предложенный в настоящей работе метод позволяет перейти от базового алгоритма с кубической асимптотикой от размера окна w и квадратичной от среднего числа вершин V к методу, полностью независимому от w и зависящему от числа вершин динамического графа как $\mathcal{O}(V^* \log V^*)$.

Таким образом, основные преимущества предлагаемого метода заключаются в следующем.

1. Динамический граф строится один раз на этапе предобработки данных, после чего переиспользуется на каждом шаге алгоритма, значительно снижая вычислительную сложность нахождения маршрута обхода динамически изменяющейся зоны грозы.

2. Использование для нахождения кратчайшего маршрута на динамическом графе не всех возможных ребер, но подмножества ребер-кандидатов $\mathcal{E}_{\text{cand}}$ позволяет перейти от сложности алгоритма Дейкстры $\mathcal{O}(V^2 + V \log V)$ к асимптотике $\mathcal{O}(V^* + V^* \log V^*)$, что также значительно упрощает вычисления и способствует уменьшению времени, затрачиваемого на нахождение маршрута обхода на очередном шаге алгоритма.

3. Кроме того, подход, описанный в алгоритме 3, предоставляет возможность использовать один и тот же динамический граф независимо от выбранного размера окна w , что позволяет запускать его в реальных условиях полета для нескольких w параллельно и выбирать маршрут с наилучшим значением коэффициента $\Delta S / \Delta L$ (рис. 6).

Для еще более рационального использования вычислительных ресурсов при практической реализации алгоритма 3 авторами

предлагается рассмотреть следующие возможности оптимизации метода.

1. Использование пространственной индексации по ребрам препятствий (например, с помощью иерархических деревьев R-tree) позволяет уменьшить асимптотику валидации ребер от $\mathcal{O}(|\mathcal{E}_{\text{cand}}|P)$ до $\mathcal{O}(|\mathcal{E}_{\text{cand}}| \log P)$, на порядки снижая практическое время нахождения маршрута обхода. R-tree-подобные структуры используют минимальные ограничивающие прямоугольники и позволяют быстро отбрасывать препятствия, гарантированно не пересекающиеся с проверяемым ребром [27].

2. Кроме того, валидация каждого из ребер для каждого момента t_i может выполняться в произвольном порядке, независимо от остальных валидаций, – это позволяет выполнять ее параллельно на K ядрах, уменьшая, таким образом, общее время валидации в K раз.

3. Валидность ребер $\mathcal{E}_{\text{cand}}$ для каждого рассматриваемого t_i можно хранить как битовую маску – битсет (BitSet) [28]: множество валидных ребер $\mathcal{E}^{(i)}$ превращается в битсет $\mathcal{B}^{(i)}$ длины $|\mathcal{E}_{\text{cand}}|$, каждый j -й элемент которого является единицей, если ребро валидно, либо нулем в противном случае:

$$\mathcal{B}^{(i)}[j] = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{E}_{\text{cand}}[j] \in \mathcal{E}^{(i)}; \\ 0, & \text{если } \mathcal{E}_{\text{cand}}[j] \notin \mathcal{E}^{(i)}. \end{cases} \quad (15)$$

Пересечение ребер $\bigcap_i^{i+w} \mathcal{E}^{(i)}$, таким образом, сводится к побитовому пересечению $\bigcap_i^{i+w} \mathcal{B}^{(i)}$ и позволяет перейти от зависящей от размера окна асимптотики $\mathcal{O}(w|\mathcal{E}_{\text{cand}}|)$ к сложности $\mathcal{O}(|\mathcal{E}_{\text{cand}}|/p)$, где p – длина машинных слов, в виде которых хранится битсет (обычно $p = 64$).

4. Еще большей оптимизации данного шага можно добиться, если для момента t_i не считать пересечение битсетов $\bigcap_i^{i+w} \mathcal{B}^{(i)}$ заново, а использовать предварительно закешированное пересечение $\mathcal{B}_{\text{cache}}^{(i-1)} = \bigcap_i^{i+w-1} \mathcal{B}^{(i)}$ и получить множество валидных ребер для текущего временного окна за единственную

операцию пересечения как $\bigcap_i^{i+w} \mathcal{B}^{(i)} = \mathcal{B}_{cache}^{(i)} \cap \mathcal{B}^{(i+w)}$.

5. Помимо классического алгоритма Дейкстры, для нахождения кратчайшего маршрута на полученном взвешенном динамическом графе может быть использован любой другой алгоритм с лучшей асимптотикой [29].

Сравнивая предлагаемый в настоящей работе метод определения маршрута обхода грозы на динамическом графе с другими, в том числе эвристическими, методами, такими как, например, быстрорастущие случайные деревья (Rapidly-exploring random trees) [30], вероятностные «дорожные карты» (Probabilistic roadmaps) [31], стохастические методы [32], можно выделить следующие его достоинства.

1. Относительная простота и высокая скорость вычислений после первичного построения динамического графа.

2. Простота масштабирования и параллельного применения.

3. Возможность применения в ситуациях с множеством препятствий сложных форм и конфигураций.

4. Детерминированность и воспроизводимость при одних и тех же начальных условиях.

Однако важное допущение, лежащее в основе применения метода определения маршрута обхода грозы на динамическом графе, заключается в принятии прогноза множества грозовых очагов $\{\mathcal{T}^{(i)}\}_{i=1}^N$ как совершенно достоверного, хотя на самом деле он носит не абсолютный, но вероятностный характер.

Перспективным направлением развития предложенного метода является учет вероятностного характера наукастинга грозы [33], что можно реализовать, например, за счет валидации ребер по ансамблю прогнозов с заданной вероятностью. Кроме того, важный шаг по усовершенствованию предлагаемого метода определения маршрута обхода заключается в обеспечении постобработки полученного с помощью алгоритма 3 маршрута, которая может позволить сгладить его, исключив лишние маневры, а также обеспечить

проверку «комфортности» маршрута и его соответствия аэродинамическим ограничениям ВС.

В контексте применения метода определения оптимального маршрута обхода динамически изменяющейся зоны грозы в районе аэродромов и аэроузлов существенным фактором являются ограничения структуры воздушного пространства, включая запретные, опасные зоны, зоны ограничения полетов, а также временные ограничения (NOTAM). Учет таких зон может быть интегрирован в алгоритм аналогично процедуре обхода зон грозовой деятельности: для этого требуется добавление в навигационную систему актуальных границ зон ограничений в виде геометрических препятствий и валидация ребер динамического графа на отсутствие пересечений с указанными ограничениями.

Отметим также, что предлагаемый метод не исключает обязательного управления воздушным движением со стороны диспетчера обслуживания воздушного движения (ОВД): предполагается, что экипаж будет согласовывать рассчитанный маршрут обхода с органами ОВД как при полете по маршруту, так и при маневрировании в пределах района аэродрома (аэроузла). В перспективе при реализации функций автоматизированного обхода гроз процесс согласования может быть частично или полностью автоматизирован, в том числе за счет адаптации алгоритма для учета окружающих ВС и кооперативного обхода грозовой зоны несколькими бортами, выполняющими полет в общей области ответственности. Такой подход обладает высоким практическим потенциалом для районов с интенсивным трафиком, однако приводит к существенному усложнению задачи, поскольку требует совместной оптимизации траекторий, разрешения конфликтов между ВС и учета ограничений ОВД в реальном времени, что делает задачу значительно более вычислительно емкой и методологически трудоемкой, чем обход препятствия единственным ВС.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе предложен и реализован метод определения маршрута обхода изменяющейся во времени зоны грозового фронта, основанный на создании динамического графа и нахождении кратчайшего пути на нем.

1. Математически формализована задача нахождения оптимального маршрута динамически изменяющейся зоны грозы, основные требования к маршруту обхода сформулированы в виде задачи условной оптимизации (7)–(11).

2. Разработан метод построения динамического графа с фиксированным множеством вершин и временно изменяющимся множеством ребер, в котором вершины формируются на основе кластеризации границ вогнутых оболочек для всех временных шагов, а ребра определяются как объединение множеств, полученных по триангуляции Делоне и по алгоритму ближайших соседей (k NN) с последующей валидацией по радиолокационным данным. Такой подход позволил существенно снизить вычислительную сложность по сравнению с пересозданием графа на каждом шаге и обеспечить устойчивость графа при изменении временного окна.

3. Предложен метод оптимизации маршрута обхода, основанный на построении вспомогательного графа видимости, позволяющий устранить избыточные звенья маршрута без потери корректности обхода. Оптимизированный метод демонстрирует наилучшие результаты как по длине маршрута, так и по доле успешных обходов.

4. Проведенный статистический анализ подтвердил: 1) отсутствие статистически значимых различий между базовым методом и методом, основанным на динамическом графе с оптимизацией ($p > 0,1$), что указывает на сопоставимую эффективность при меньшей вычислительной нагрузке; 2) статистически значимое сокращение длины маршрута при оптимизации динамического графа относительно неоптимизированного варианта ($p < 0,006$).

5. Предложен метод выбора оптимального размера окна прогнозирования, позволяющий в реальном времени адаптировать параметры планирования маршрута в зависимости от динамики грозовой активности, обеспечивая баланс между устойчивостью маршрута и его длиной, а также предотвращая преждевременное объединение грозовых ячеек в оболочки.

6. Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный метод может быть интегрирован в состав интеллектуальной адаптивной системы поддержки принятия решений при обходе грозовой деятельности [34], способной: 1) учитывать прогноз развития конвективных процессов в режиме реального времени; 2) предлагать пилоту безопасные и экономичные маршруты обхода в соответствии с концепцией ТВО, обеспечивая, таким образом, повышение ситуационной осведомленности членов летного экипажа ВС.

Предложенный метод обеспечивает основу для построения интеллектуальных навигационных решений, объединяющих динамическое прогнозирование грозовой активности, адаптивное планирование маршрута и автоматизированную поддержку принятия экипажами ВС решений в условиях быстро меняющейся метеорологической обстановки.

Список литературы

1. Lui G.N., Hon K.K., Liem R.P. Weather impact quantification on airport arrival on-time performance through a Bayesian statistics modeling approach [Электронный ресурс] // Transportation Research Part C: Emerging Technologies. 2022. Vol. 143. ID: 103811. DOI: 10.1016/j.trc.2022.103811 (дата обращения: 10.10.2025).

2. DeLaura R. Modeling convective weather avoidance in enroute airspace / R. DeLaura, M. Robinson, M. Pawlak, J. Evans [Электронный ресурс] // 13th Conference on Aviation, Range, and Aerospace Meteorology. AMS, LA, New Orleans, 2008. 12 p. URL:

<https://skybrary.aero/sites/default/files/bookshelf/4574.pdf> (дата обращения: 10.10.2025).

3. **Sharman R., Williams J.K.** The complexities of thunderstorm avoidance due to turbulence and implications for traffic flow management // Aviation, range and aerospace meteorology special symposium on weather-air traffic management integration, 2009. 10 p. URL: https://ams.confex.com/ams/89annual/techprogram/paper_149843.htm (дата обращения: 10.10.2025).

4. **Franco A.** A probabilistic storm avoidance concept for en-route flight / A. Franco, A. Valenzuela, D. Rivas, D. Sacher, J. Lang, T. Hauf [Электронный ресурс] // Proceedings of the 10th SESAR Innovation Days. SESAR Joint Undertaking, 2020. 8 p. URL: <https://idus.us.es/server/api/core/bitstreams/162d9edd-e5e7-471d-8b6c-fdc6d6a95878/content> (дата обращения: 10.10.2025).

5. **Deng X.** Multi-obstacle path planning and optimization for mobile robot / X. Deng, R. Li, L. Zhao, K. Wang, X. Gui [Электронный ресурс] // Expert Systems with Applications. 2021. Vol. 183. ID: 115445. DOI: 10.1016/j.eswa.2021.115445 (дата обращения: 10.10.2025).

6. **Luo J., Wang Z.X., Pan K.L.** Reliable path planning algorithm based on improved artificial potential field method [Электронный ресурс] // IEEE Access. 2022. Vol. 10. Pp. 108276–108284. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3212741 (дата обращения: 10.10.2025).

7. **Rosenow J., Lindner M., Scheiderer J.** Advanced flight planning and the benefit of in-flight aircraft trajectory optimization [Электронный ресурс] // Sustainability. 2021. Vol. 13, iss. 3. ID: 1383. DOI: 10.3390/su13031383 (дата обращения: 10.10.2025).

8. **Lu L., Liu C.** Research on trajectory planning in thunderstorm weather based on dynamic window algorithm during approach segment [Электронный ресурс] // Scientific Programming. 2022. ID: 7031928. 10 p. DOI: 10.1155/2022/7031928 (дата обращения: 10.10.2025).

9. **Costas P., de Oliveira I.R.** Advancing operational efficiency: airspace users' perspective on trajectory-based operations // Systems and Control. 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2412.08783 (дата обращения: 10.10.2025).

10. **Коваленко Г.В., Ядров И.А.** Способ определения маршрута обхода воздушным судном грозы методом нахождения кратчайшего пути на графе // Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык. 2025. № 3 (46). С. 35–55. DOI: 10.51955/2312-1327_2025_3_35

11. **Agarwal D., Bharti P.S.** A review on comparative analysis of path planning and collision avoidance algorithms // International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering. 2018. Vol. 12, no. 6. Pp. 608–624.

12. **Xu J.** A concave hull algorithm for scattered data and its applications / J. Xu, Z. Zheng, Y. Feng, X. Qing // 2010 3rd International Congress on Image and Signal Processing. IEEE, 2010. No. 5. Pp. 2430–2433. DOI: 10.1109/CISP.2010.5648277

13. **Saalfeld A.** Topologically consistent line simplification with the Douglas-Peucker algorithm // Cartography and Geographic Information Science. 1999. Vol. 26, iss. 1. Pp. 7–18. DOI: 10.1559/152304099782424901

14. **Rachmawati D., Gustin L.** Analysis of Dijkstra's algorithm and A* algorithm in shortest path problem [Электронный ресурс] // Journal of Physics: Conference Series, 2020. Vol. 1566. ID: 012061. DOI: 10.1088/1742-6596/1566/1/012061 (дата обращения: 10.10.2025).

15. **Crouch M.S., McGregor A., Stubbs D.** Dynamic graphs in the sliding-window model. In book: Algorithms. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. Pp. 337–348. DOI: 10.1007/978-3-642-40450-4_29

16. **Aubian G., Brunelli F., Dragan F.F. и др.** On the complexity of computing a fastest temporal path in interval temporal graphs [Электронный ресурс] // 2025. 16 p. URL: <https://inria.hal.science/hal-04863343v1/document> (дата обращения: 10.10.2025).

17. **Dinas S., Banon J.M.** A review on Delaunay triangulation with application on computer vision // International Journal of Computer Science and Engineering. 2014. Vol. 3, iss. 2. Pp. 10–18.

18. **Kramer O.** K-nearest neighbors. In book: Dimensionality reduction with unsupervised nearest neighbors. Berlin, Heidelberg:

Springer Berlin Heidelberg, 2013. Vol. 51. Pp. 13–23. DOI: 10.1007/978-3-642-38652-7_2

19. Langenberg B. A tutorial on using the paired t test for power calculations in repeated measures ANOVA with interactions / B. Langenberg, M. Janczyk, V. Koob, R. Kliegl, A. Mayer // *Behavior Research Methods*. 2023. Vol. 55. Pp. 2467–2484. DOI: 10.3758/s13428-022-01902-8

20. Zhou Y., Zhu Y., Wong W.K. Statistical tests for homogeneity of variance for clinical trials and recommendations [Электронный ресурс] // *Contemporary clinical trials communications*. 2023. Vol. 33. ID: 101119. DOI: 10.1016/j.conctc.2023.101119 (дата обращения: 10.10.2025).

21. González-Estrada E., Villaseñor J.A., Acosta-Pech R. Shapiro-Wilk test for multivariate skew-normality // *Computational Statistics*. 2022. Vol 37, iss. 4. Pp. 1985–2001. DOI: 10.1007/s00180-021-01188-y

22. Thakkar B. Continuous variable analyses: student's t-test, Mann–Whitney U test, Wilcoxon signed-rank test // *Translational cardiology*. 2025. Pp. 165–167. DOI: 10.1016/B978-0-323-91790-2.00052-6

23. Pembury Smith M.Q.R., Ruxton G.D. Effective use of the McNemar test [Электронный ресурс] // *Behavioral Ecology and Sociobiology*. 2020. Vol. 74. ID: 133. DOI: 10.1007/s00265-020-02916-y (дата обращения: 10.10.2025).

24. Wilf H.S. Algorithms and complexity. 2nd ed. CRC Press, 2002. 232 p. DOI: 10.1201/9780429294921

25. Jurkiewicz P. Empirical time complexity of generic Dijkstra algorithm / P. Jurkiewicz, E. Biernacka, J. Domżał, R. Wójcik // *2021 IFIP/IEEE International Symposium on Integrated Network Management (IM)*. France, Bordeaux, 2021. Pp. 594–598.

26. Zhao Y. KD-Box: Line-segment-based KD-tree for interactive exploration of large-scale time-series data / Y. Zhao, Y. Wang, J. Zhang, C.-W. Fu, M. Xu, D. Moritz // *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2021. Vol. 28, iss. 1. Pp. 890–900. DOI: 10.1109/TVCG.2021.3114865

27. Gu T. The RLR-tree: A reinforcement learning based r-tree for spatial data / T. Gu, K. Feng, G. Cong, C. Long, Z. Wang, S. Wang [Электронный ресурс] // *Proceedings of the ACM on Management of Data*, 2023. Vol. 1, iss. 1. ID: 63, 26 p. DOI: 10.1145/3588917 (дата обращения: 10.10.2025).

28. Jiang Y., Fang G. Enhancing the Apriori Algorithm with BitSet Encoding and Hash Prefixes on Spark // *2024 6th International Conference on Electronic Engineering and Informatics (EEI)*. IEEE, 2024. Pp. 1067–1072. DOI: 10.1109/EEI63073.2024.10696454

29. Hanauer K., Henzinger M., Schulz C. Recent advances in fully dynamic graph algorithms—a quick reference guide [Электронный ресурс] // *ACM Journal of Experimental Algorithmics*. 2022. Vol. 27. ID: 1.11. 45 p. DOI: 10.1145/3555806 (дата обращения: 10.10.2025).

30. Andrés E. Informed scenario-based RRT* for aircraft trajectory planning under ensemble forecasting of thunderstorms / E. Andrés, D. González-Arribas, M. Soler, M. Kamgarpour, M. Sanjurjo-Rivo [Электронный ресурс] // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2021. Vol. 129. ID: 103232. DOI: 10.1016/j.trc.2021.103232 (дата обращения: 10.10.2025).

31. Ravankar A.A. HPPRM: hybrid potential based probabilistic roadmap algorithm for improved dynamic path planning of mobile robots / A.A. Ravankar, A. Ravankar, T. Emaru, Y. Kobayashi // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. Pp. 221743–221766. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043333 (дата обращения: 10.10.2025).

32. González-Arribas D. Robust aircraft trajectory planning under uncertain convective environments with optimal control and rapidly developing thunderstorms / D. González-Arribas, M. Soler, M. Sanjurjo-Rivo, M. Kamgarpour, J. Simarro // *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 89. Pp. 445–459. DOI: 10.1016/j.ast.2019.03.051

33. Коваленко Г.В., Ядров И.А. Применение Seq2seq-моделей для прогнозирования развития грозовой деятельности с целью повышения уровня ситуационной осведомленности пилота в полете // *Научный вестник*

МГТУ ГА. 2025. Т. 28, № 1. С. 20–38. DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-1-20-38

34. Kovalenko G.V., Yadrov I.A., Kuts K.A. Intelligent adaptive flight crew decision support system for thunderstorm avoidance // *Rus-Russian Aeronautics*. 2023. Vol. 66. Pp. 552–559. DOI: 10.3103/S1068799823030170

References

1. Lui, G.N., Hon, K.K., Liem, R.P. (2022). Weather impact quantification on airport arrival on-time performance through a Bayesian statistics modeling approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 143, ID: 103811. DOI: 10.1016/j.trc.2022.103811 (accessed: 10.10.2025).

2. DeLaura, R., Robinson, M., Pawlak, M., Evans, J. (2008). Modeling convective weather avoidance in enroute airspace. In: *13th Conference on Aviation, Range, and Aerospace Meteorology*. AMS, New Orleans, LA, 12 p. Available at: <https://skybrary.aero/sites/default/files/bookshelf/4574.pdf> (accessed: 10.10.2025).

3. Sharman R., Williams J.K. (2009). The complexities of thunderstorm avoidance due to turbulence and implications for traffic flow management. In: *Aviation, range and aerospace meteorology special symposium on weather-air traffic management integration*, 10 p. Available at: https://ams.confex.com/ams/89annual/techprogram/paper_149843.htm (accessed: 10.10.2025).

4. Franco, A., Valenzuela, A., Rivas, D., Sacher, D., Lang, J., Hauf, T. (2020). A probabilistic storm avoidance concept for enroute flight. In: *Proceedings of the 10th SESAR Innovation Days*. SESAR Joint Undertaking, 8 p. Available at: <https://idus.us.es/server/api/core/bitstreams/162d9edd-e5e7-471d-8b6c-fdcdbd6a95878/content> (accessed: 10.10.2025).

5. Deng, X., Li, R., Zhao, L., Wang, K., Gui, X. (2021). Multi-obstacle path planning and optimization for mobile robot. *Expert Systems with Applications*, vol. 183, ID: 115445. DOI: 10.1016/j.eswa.2021.115445 (accessed: 10.10.2025).

6. Luo, J., Wang, Z.X., Pan, K.L. (2022). Reliable path planning algorithm based on

improved artificial potential field method. *IEEE Access*, vol. 10, pp. 108276–108284. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3212741 (accessed: 10.10.2025).

7. Rosenow, J., Lindner, M., Scheiderer, J. (2021). Advanced flight planning and the benefit of in-flight aircraft trajectory optimization. *Sustainability*, vol. 13, issue 3. ID: 1383. DOI: 10.3390/su13031383 (accessed: 10.10.2025).

8. Lu, L., Liu, C. (2022). Research on trajectory planning in thunderstorm weather based on dynamic window algorithm during approach segment. *Scientific Programming*, ID: 7031928, 10 p. DOI: 10.1155/2022/7031928 (accessed: 10.10.2025).

9. Costas, P., de Oliveira, I.R. (2024). Advancing operational efficiency: airspace users' perspective on trajectory-based operations. *Systems and Control*. DOI: 10.48550/arXiv.2412.08783 (accessed: 10.10.2025).

10. Kovalenko, G.V., Yadrov, I.A. (2025). Method for determining an aircraft route to avoid a thunderstorm using the shortest path on a graph. *Crede Experto: Transport, Society, Education, Language*, no. 3 (46), pp. 35–55. DOI: 10.51955/2312-1327_2025_3_35 (in Russian)

11. Agarwal, D., Bharti, P.S. (2018). A review on comparative analysis of path planning and collision avoidance algorithms. *International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering*, vol. 12, no. 6, pp. 608–624.

12. Xu, J., Zheng, Z., Feng, Y., Qing, X. (2010). A concave hull algorithm for scattered data and its applications. In: *2010 3rd International Congress on Image and Signal Processing*. IEEE, no. 5, pp. 2430–2433. DOI: 10.1109/CISP.2010.5648277

13. Saalfeld, A. (1999). Topologically consistent line simplification with the Douglas-Peucker algorithm. *Cartography and Geographic Information Science*, vol. 26, issue 1, pp. 7–18. DOI: 10.1559/152304099782424901

14. Rachmawati, D., Gustin, L. (2020). Analysis of Dijkstra's algorithm and A* algorithm in shortest path problem. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1566, ID: 012061. DOI: 10.1088/1742-6596/1566/1/012061 (accessed: 10.10.2025).

15. Crouch, M.S., McGregor, A., Stubbs, D. (2013). Dynamic graphs in the sliding-window model. In book: *Algorithms*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 337–348. DOI: 10.1007/978-3-642-40450-4_29
16. Aubian, G., Brunelli, F., Dragan, F.F. et al. (2025). On the complexity of computing a fastest temporal path in interval temporal graphs, 16 p. Available at: <https://inria.hal.science/hal-04863343v1/document> (accessed: 10.10.2025).
17. Dinas, S., Banon, J.M. (2014). A review on Delaunay triangulation with application on computer vision. *International Journal of Computer Science and Engineering*, vol. 3, issue 2, pp. 10–18.
18. Kramer, O. (2013). K-nearest neighbors. In book: *Dimensionality reduction with unsupervised nearest neighbors*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, vol. 51, pp. 13–23. DOI: 10.1007/978-3-642-38652-7_2
19. Langenberg, B., Janczyk, M., Koob, V., Kliegl, R., Mayer, A. (2023). A tutorial on using the paired t test for power calculations in repeated measures ANOVA with interactions. *Behavior Research Methods*, vol. 55, pp. 2467–2484. DOI: 10.3758/s13428-022-01902-8
20. Zhou, Y., Zhu, Y., Wong, W.K. (2023). Statistical tests for homogeneity of variance for clinical trials and recommendations. *Contemporary Clinical Trials Communications*, vol. 33. ID: 101119. DOI: 10.1016/j.conctc.2023.101119 (accessed: 10.10.2025).
21. González-Estrada, E., Villaseñor, J.A., Acosta-Pech, R. (2022). Shapiro-Wilk test for multivariate skew-normality. *Computational Statistics*, vol. 37, issue 4, pp. 1985–2001. DOI: 10.1007/s00180-021-01188-y
22. Thakkar, B. (2025). Continuous variable analyses: student's t-test, Mann–Whitney U test, Wilcoxon signed-rank test. *Translational cardiology*, pp. 165–167. DOI: 10.1016/B978-0-323-91790-2.00052-6
23. Pembury Smith, M.Q.R., Ruxton, G.D. (2020). Effective use of the McNemar test. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, vol. 74. ID: 133. DOI: 10.1007/s00265-020-02916-y (accessed: 10.10.2025).
24. Wilf, H.S. (2002). *Algorithms and Complexity*. 2nd ed. CRC Press, 232 p. DOI: 10.1201/9780429294921
25. Jurkiewicz, P., Biernacka, E., Domżał, J., Wójcik, R. (2021). Empirical time complexity of generic Dijkstra algorithm. In: *2021 IFIP/IEEE International Symposium on Integrated Network Management (IM)*. Bordeaux, France, pp. 594–598.
26. Zhao, Y., Wang, Y., Zhang, J., Fu, C.W., Xu, M., Moritz, D. (2021). KD-Box: Line-segment-based KD-tree for interactive exploration of large-scale time-series data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 28, issue 1, pp. 890–900. DOI: 10.1109/TVCG.2021.3114865
27. Gu, T., Feng, K., Cong, G., Long, C., Wang, Z., Wang, S. (2023). The RLR-tree: A reinforcement learning based r-tree for spatial data. In: *Proceedings of the ACM on Management of Data*, vol. 1, issue 1, ID: 63, 26 p. DOI: 10.1145/3588917 (accessed: 10.10.2025).
28. Jiang, Y., Fang, G. (2024). Enhancing the Apriori Algorithm with BitSet Encoding and Hash Prefixes on Spark. In: *2024 6th International Conference on Electronic Engineering and Informatics (EEI)*, pp. 1067–1072. DOI: 10.1109/EEI63073.2024.10696454
29. Hanauer, K., Henzinger, M., Schulz, C. (2022). Recent advances in fully dynamic graph algorithms—a quick reference guide. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, vol. 27, ID: 1.11, 45 p. DOI: 10.1145/3555806 (accessed: 10.10.2025).
30. Andrés, E., González-Arribas, D., Soler, M., Kamgarpour, M., Sanjurjo-Rivo, M. (2021). Informed scenario-based RRT* for aircraft trajectory planning under ensemble forecasting of thunderstorms. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 129, ID: 103232. DOI: 10.1016/j.trc.2021.103232 (accessed: 10.10.2025).
31. Ravankar, A.A., Ravankar, A., Emaru, T., Kobayashi, Y. (2020). HPPRM: hybrid potential based probabilistic roadmap algorithm for improved dynamic path planning of mobile robots. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 221743–221766. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043333 (accessed: 10.10.2025).

32. González-Arribas, D., Soler, M., Sanjurjo-Rivo, M., Kamgarpour, M., Simarro, J. (2019). Robust aircraft trajectory planning under uncertain convective environments with optimal control and rapidly developing thunderstorms. *Aerospace Science and Technology*, vol. 89, pp. 445–459. DOI: 10.1016/j.ast.2019.03.051

33. Kovalenko, G.V., Yadrov, I.A. (2025). Application of Seq2Seq models for predicting the development of thunderstorm activity to en-

hance the pilot's situational awareness in flight. *Civil Aviation High Technologies*, vol. 28, no. 1, pp. 20–38. DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-1-20-38 (in Russian)

34. Kovalenko, G.V., Yadrov, I.A., Kuts, K.A. (2023). Intelligent adaptive flight crew decision support system for thunderstorm avoidance. *Russian Aeronautics*, vol. 66, pp. 552–559. DOI: 10.3103/S1068799823030170

Сведения об авторах

Коваленко Геннадий Владимирович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры летной эксплуатации и безопасности полетов в гражданской авиации СПбГУ ГА, kgvf@inbox.ru.

Ядров Илья Александрович, аспирант кафедры летной эксплуатации и безопасности полетов в гражданской авиации СПбГУ ГА, yadrov.ilya@gmail.com.

Information about the authors

Gennadiy V. Kovalenko, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Flight Operations and Flight Safety in Civil Aviation Chair, Saint Petersburg State University of Civil Aviation named after Chief Marshal of Aviation A.A. Novikov, kgvf@inbox.ru.

Ilya A. Yadrov, Postgraduate Student of the Flight Operations and Flight Safety in Civil Aviation Chair, Saint Petersburg State University of Civil Aviation named after Chief Marshal of Aviation A.A. Novikov, yadrov.ilya@gmail.com.

Поступила в редакцию 23.11.2025
Одобрена после рецензирования 12.01.2026
Принята в печать 23.07.2026

Received 23.11.2025
Approved after reviewing 12.01.2026
Accepted for publication 23.07.2026