

ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.9.1 – Транспортные и транспортно-технологические системы страны, ее регионов и городов, организация производства на транспорте;

2.9.4. – Управление процессами перевозок;

2.9.6 – Аэронавигация и эксплуатация авиационной техники;

2.9.8 – Интеллектуальные транспортные системы

УДК: 629.7.064.52

DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-3-8-24

Анализ моделей динамических процессов авиационных аккумуляторных батарей

С.И. Гавриленков¹

*¹Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия*

Аннотация: В работе проведен анализ существующих подходов к моделированию, включая эмпирические, физико-химические и статистические методы, а также методы машинного обучения. Рассмотрены преимущества и ограничения моделей Шеферда, Батлера – Фольмера, моделей на основе регрессионного анализа и LSTM-нейронных сетей. Отдельное внимание уделено перспективному методу математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП), позволяющему строить физически корректные модели, согласованные с фундаментальными законами термодинамики и электродинамики. На основе ММПЭП разработана новая модель динамики напряжения в литийионной аккумуляторной батарее (ЛИАБ), учитывающая процессы поляризации, изменения температуры и нелинейные эффекты. Предложенная в работе модель получается путем численно-аналитического преобразования уравнений динамики процессов в аккумуляторах, полученных методом математического прототипирования энергетических процессов. Проведен сравнительный анализ существующих подходов к моделированию и показаны преимущества предлагаемого метода ММПЭП. Приведен пример моделирования динамики физических и химических процессов в литийионном аккумуляторе с некоторыми ограничениями. Результаты исследования демонстрируют, что модели на основе ММПЭП обладают высокой точностью и универсальностью, что делает их применимыми для прогнозирования состояния заряда, диагностики отказов и разработки цифровых двойников. Приведенное в статье аналитическое выражение расширяет классическую модель Шеферда, обеспечивая описание сложных динамических процессов. Методологический потенциал ММПЭП подкрепляется возможностью интеграции с методами машинного обучения для уточнения параметров моделей. Перспективы дальнейших исследований включают расширение модели для учета деградации аккумуляторных батарей, разработку упрощенных моделей для систем диагностирования в режиме реального времени и внедрение гибридных подходов моделирования.

Ключевые слова: литийионные аккумуляторы, моделирование, метод математического прототипирования, электрохимические процессы.

Для цитирования: Гавриленков С.И. Анализ моделей динамических процессов авиационных аккумуляторных батарей // Научный вестник МГТУ ГА. 2025. Т. 28, № 3. С. 8–24. DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-3-8-24

Analysis of dynamic process models for aviation battery systems

S.I. Gavrilenko¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

Abstract: The paper analyzes existing modeling approaches, including empirical, physicochemical and statistical methods, as well as machine learning methods. The advantages and limitations of models such as the Shepherd's model, Butler-Volmer equation-based models, regression analysis-based models, and Long Short-Term Memory (LSTM) neural networks are discussed. Special

attention is paid to a promising Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes (MMPEP), this approach enables the construction of physically accurate models that conform with the fundamental laws of thermodynamics and electrodynamics. Based on MMPEP, a new voltage dynamics model has been developed specifically for lithium-ion aircraft batteries (LIABs), which take into account polarization processes, temperature changes and nonlinear effects. The model proposed in the paper is derived through numerical-analytical transformation of dynamic processes equations obtained by the method of mathematical prototyping of energy processes. A comparative analysis of existing modeling approaches is carried out and the advantages of the proposed MMPEP method are shown. An example of modeling the dynamics of physical and chemical processes in a lithium-ion battery with some limitations is presented. The research results demonstrate that the MMPEP-based models have high accuracy and versatility, which makes them applicable for charge state prediction, failure diagnostics, and digital twin development. The analytical expression presented in the paper expands the classical Shepherd's model, providing a description of complex dynamic processes. The methodological potential of MMPEP is supported by the possibility of integration with machine learning methods to refine model parameters. Prospects for further research include extending the model to account for battery degradation, developing simplified models for real-time diagnostics systems, and introducing hybrid modeling approaches.

Key words: lithium-ion batteries, modeling, mathematical prototyping method, electrochemical processes.

For citation: Gavrilin, S.I. (2025). Analysis of dynamic process models for aviation battery systems. Civil Aviation High Technologies, vol. 28, no. 3, pp. 8–24. DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-3-8-24

Введение

Современная авиационная электроэнергетика характеризуется активным внедрением литийионных аккумуляторных батарей (ЛИАБ), обладающих высокими удельными энергетическими показателями [1, 2]. Однако эксплуатация ЛИАБ сопряжена с риском возникновения аварийных режимов работы батарей, в частности теплового разгона [3, 4]. Для обеспечения их безопасной эксплуатации необходимо иметь адекватные математические модели, описывающие динамику напряжения аккумуляторов в батарее при различных режимах ее работы. В настоящее время существует несколько подходов к моделированию процессов в литийионных аккумуляторах (ЛИА). Широкое распространение получила эмпирическая модель Шеферда [5], которая связывает напряжение ЛИА с его состоянием заряда и током разряда. Более сложной является модель Батлера – Фольмера [6], учитывающая кинетику электрохимических реакций на электродах. В последние годы активно развиваются подходы на основе машинного обучения [7, 8], позволяющие прогнозировать поведение ЛИА на основе статистической обработки экспериментальных данных. Однако такие модели имеют ограниченную область применения и не всегда могут корректно описывать физико-химические процессы в ЛИА [7, 9]. Перспективным видится применение метода математического прото-

типирования энергетических процессов (ММПЭП) [2, 9], который обеспечивает построение моделей, согласованных с основными физическими законами, и учитывает особенности протекающих в ЛИА процессов. В данной работе проводится сравнительный анализ существующих подходов к моделированию динамики напряжения ЛИАБ и предлагается новая модель на основе ММПЭП.

Эмпирические модели

Эмпирические модели предназначены для описания мгновенных зависимостей, таких как напряжение, которое изменяется в зависимости от состояния заряда (SOC) и величины тока нагрузки. Примером такой модели является модель Шеферда, которая выражает напряжение аккумулятора через его состояние заряда и ток разряда. Эта модель считается одной из первых и наиболее известных эмпирических моделей, описывающих процесс разряда аккумуляторов. Основой модели служит математическое уравнение, которое связывает напряжение аккумулятора с его состоянием заряда и параметрами разрядного тока. Как отмечено в исследованиях [10], среди трех основных моделей аккумуляторов – моделей Шеферда, Rint и Тевенина – модель Шеферда сочетает простоту параметризации с точностью прогноза при токах разряда до 6,67С. Параметры моделей Шеферда и Rint легко определяются, тогда как модель

Тевенина обеспечивает большую точность, но требует более сложной параметризации. Эта модель учитывает воздействие температуры, тока разряда и старения. Основное уравнение модели Шеферда можно записать следующим образом:

$$U(t) = E_0 - K \frac{Q}{Q - It},$$

где $U(t)$ – напряжение в момент времени t ; E_0 – начальное напряжение; K – константа, зависящая от типа аккумулятора; Q – общая зарядовая емкость аккумулятора; I – ток разряда; t – время разряда; R – внутреннее сопротивление.

Важным преимуществом модели Шеферда является ее практическая применимость в инженерных задачах. Согласно исследованиям [3] модель успешно применяется в системах электромагнитного запуска, где токи разряда достигают 60С. В таких условиях модель точно описывает процесс разряда, что критически важно для управления системой и оценки ее эффективности. Модель также демонстрирует достаточную гибкость для описания различных электрохимических систем. Например, она была успешно адаптирована для описания характеристик магниевых химических источников тока, активируемых морской водой [11]. При этом основная структура модели сохраняется, требуя лишь корректировки параметров под конкретный тип аккумулятора. Тем не менее модель имеет серьезные ограничения при описании режимов разряда с высокими токами [3]. В таких случаях необходимо учитывать нелинейные эффекты, добавляя дополнительные составляющие в аналитическое выражение модели. Установлено, что стандартная модель не способна полноценно описывать поведение аккумулятора в условиях импульсного циклического разряда.

Динамические модели

Динамические модели учитывают временные изменения параметров, описывая процессы, происходящие внутри ЛИА при

различных режимах работы. Примером динамической модели может служить модель Батлера – Фольмера, которая описывает кинетику электрохимических реакций на границе электродов и является более сложной по сравнению с моделью Шеферда. Она представлена в следующем виде:

$$i = i_0 \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha_a n F (E - E_{eq})}{RT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_0 n F (E - E_{eq})}{RT}\right) \right],$$

где i – плотность тока; i_0 – плотность тока обмена; α_a и α_0 – коэффициенты переноса для анодного и катодного процессов; n – число электронов, участвующих в электродной реакции; F – постоянная Фарадея; E – потенциал электрода; E_{eq} – равновесный потенциал; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура.

Развитие этой модели было выполнено Бардом и Фолкнером в 2001 году. Уравнение Батлера – Фольмера рассматривается в контексте электрохимической кинетики, где описывается зависимость плотности тока от перенапряжения и ее изменение при переходе от равновесного состояния к рабочему. Также учитывается влияние температуры на кинетику реакций [6]. Для литийионных аккумуляторов модель может быть адаптирована с учетом особенностей электрохимических процессов, происходящих как в твердой, так и в жидкой фазах [4]. В этом случае плотность обменного тока i_0 определяется как функция концентрации ионов лития в электролите (C_e) и стехиометрии материала электродов (C_s):

$$i_0 = k_0 (C_e)^\alpha (C_{s,max} - C_s)^\alpha (C_s)^{1-\alpha},$$

где k_0 – константа скорости реакции; $C_{s,max}$ – максимальная концентрация ионов лития в твердой фазе; α – коэффициент переноса.

Основным преимуществом модели Батлера – Фольмера является ее теоретическая обоснованность для описания электрохимических процессов. Объединение этой модели с электрической моделью позволяет учитывать кинетику электрохимических реакций

и улучшать прогнозы состояния энергии (SOE) под динамическими нагрузками [4]. Особенно эффективно модель проявляет себя при прогнозировании долговечности батарей, так как дает возможность учитывать фундаментальные механизмы деградации электродных материалов. Однако модель имеет ряд существенных ограничений. Основная сложность заключается в параметризации модели – для корректного применения требуется детальная калибровка на основе экспериментальных данных, что существенно усложняет ее внедрение в практических системах. Кроме того, модель демонстрирует повышенную чувствительность к динамическим изменениям нагрузки, часто требуя введения дополнительных корректирующих элементов для точного описания поведения батареи при резких изменениях тока [4].

Статистические модели

Статистические модели используют методы статистического анализа и машинного обучения для прогнозирования поведения аккумулятора на основе больших объемов данных. К ним можно отнести регрессионные модели и модели на основе машинного обучения. Регрессионные модели устанавливают зависимости между параметрами аккумулятора, такими как напряжение, температура и SOC, с помощью регрессионного анализа. Основное уравнение модели имеет следующий вид:

$$U(t) = E_{oc}(SOC) - I(t)R_{int} - U_{hyst}(t),$$

где $U(t)$ – напряжение на выводах батареи в момент времени t ; $E_{oc}(SOC)$ – открытое напряжение цепи, зависящее от состояния заряда; $I(t)$ – ток нагрузки в момент времени t ; R_{int} – внутреннее сопротивление батареи; U_{hyst} – напряжение, обусловленное эффектом гистерезиса.

Эта модель позволяет более точно предсказывать поведение ЛИАБ в различных режимах работы, учитывая динамические процессы и нелинейные эффекты, такие как ги-

стерезис. Статистические регрессионные модели широко применяются для прогнозирования поведения ЛИА, включая оценку состояния заряда (SOC), состояния здоровья (SOH) и оставшегося срока службы (RUL). Регрессионные модели основываются на установлении зависимостей между входными и выходными параметрами, что делает их относительно простыми в реализации и интерпретации. Они не требуют глубокого понимания внутренних физико-химических процессов в аккумуляторе, что упрощает их использование [12]. Однако регрессионные модели часто предполагают линейные зависимости между переменными, что может быть недостаточным для описания сложных нелинейных процессов, происходящих в ЛИА. Это приводит к снижению точности прогнозов в реальных условиях эксплуатации. Также статистические модели могут не учитывать процессы деградации и старения аккумуляторов, что ограничивает их применимость для долгосрочного прогнозирования состояния ЛИА.

Модели на основе машинного обучения

Применяют алгоритмы, такие как нейронные сети, для прогнозирования поведения аккумулятора, учитывая сложные нелинейные зависимости. С развитием методов машинного обучения (ML) получили распространение модели, использующие нейронные сети для предсказания состояния аккумуляторов. Как показали исследования, особенно эффективными оказались модели на основе LSTM-слоев (Long Short-Term Memory), которые способны учитывать долговременные зависимости в данных при оценке состояния работоспособности (State of Health, SOH) аккумуляторов [8]. Основным преимуществом LSTM-моделей является их способность захватывать временные зависимости в данных благодаря специальной архитектуре, включающей три типа «ворот» (gates): – входные ворота (inputgate) – ворота забывания (forgetgate) – выходные ворота (outputgate) [13].

Эта архитектура позволяет сети «запоминать» важную информацию на длительное время и «забывать» несущественную, что особенно важно при анализе циклических процессов деградации аккумуляторов.

Превосходные результаты для прогнозирования напряжения и состояния заряда (SOC) демонстрируют гибридные подходы, сочетающие VARMA- и LSTM-модели [14]. VARMA (Vector Autoregressive Moving Average) является статистическим методом, который применяется для анализа и прогнозирования временных рядов. Он эффективно моделирует линейные зависимости в многомерных данных, что делает его полезным для задач прогнозирования напряжения и SOC в аккумуляторах. В сочетании с LSTM этот метод позволяет учитывать как нелинейные временные зависимости, так и линейные автокорреляции, что значительно улучшает точность прогнозов. В частности, при использовании для оценки SOH литиевых аккумуляторов такие модели позволяют достичь точности прогнозирования с ошибкой менее 2,22 % на тестовых данных [14].

Важным аспектом применения нейросетевых моделей является выбор входных параметров. Было показано, что эффективными входными параметрами для литий-серных аккумуляторов, где разрядная характеристика обладает сложной формой, являются: напряжение на аккумуляторе; скорость изменения напряжения; количество прошедших циклов; температура (при необходимости) [15]. При этом использование адаптивных нейронечетких систем вывода (ANFIS) позволяет достичь точности оценки состояния заряда более 95 % даже без учета температурных эффектов [15]. Таким образом, нейросетевые модели могут быть адаптированы к различным типам аккумуляторов и их химическим системам, так как позволяют гибко подстраивать архитектуру и методы обучения. Однако у моделей машинного обучения есть и существенные ограничения. Как показано в работе Zhilong Yu [8], для достижения высокой точности требуются большие наборы качественных экспериментальных данных, включающих различные режимы работы аккумулято-

ра. При использовании LSTM-моделей с достаточным количеством слоев и нейронов время обучения может достигать нескольких часов даже на современном оборудовании. Кроме того, в отличие от физических моделей нейронные сети работают по принципу черного ящика, что затрудняет анализ причин принятия тех или иных решений.

Физико-химические модели

Описывают внутренние процессы в аккумуляторе на основе фундаментальных законов физики и химии. Физико-химические модели (нередко их называют механистическими моделями) позволяют описать процессы, протекающие внутри аккумуляторов, опираясь на фундаментальные законы электричества, массопереноса и электрохимии. В основе подобных моделей лежат уравнения диффузии (Фика или Нернста – Планка), кинетика реакций на электродах (уравнение Батлера – Фольмера), а также уравнения, описывающие потенциалы и поля внутри ячейки (уравнения Пуассона). Одной из наиболее известных физико-химических моделей для литийионных аккумуляторов является модель Дойла – Фуллера – Ньюмана [16], которая описывает диффузию лития в объеме частиц активного материала (электроды) и в электролите, а также кинетику электрохимических реакций на границе раздела твердой и жидкой фаз. Модель рассматривает электрод как совокупность сферических частиц активного материала, в которых литий способен диффундировать. Параллельно учитывается перенос ионов лития и зарядов в электролите. Уравнения Пуассона и Нернста – Планка описывают распределение потенциала и концентрации ионов внутри пористого электрода. При этом скорость перехода лития между твердой и жидкой фазами определяется уравнением Батлера – Фольмера.

Преимуществом данной модели является то, что она учитывает процессы диффузии и кинетики в твердой и жидкой фазах, таким образом, она может использоваться для оценки динамического поведения, тепловых явлений, а также механических напряжений

в электродах (при дополнительном расширении модели). Ее недостатком служит высокая вычислительная сложность, так как решение системы нелинейных уравнений в частных производных требует значительных ресурсов.

Другим недостатком является сложность параметризации. Так, для точного моделирования необходимо знать ряд параметров (диффузионные коэффициенты, константы переноса, параметры кинетики и др.), которые могут варьироваться для разных химических составов электродов и электролита.

Для упрощения физико-химических расчетов часто используют модель одинарной частицы (Single Particle Model, SPM) [17]. Например, в этой модели для литийионного аккумулятора каждый электрод (анод и катод) сводится к одной сферической частице, в которой происходит диффузия лития. SPM игнорирует градиенты концентрации в осевом направлении электрода и фокусируется только на диффузии внутри «сферической» частицы. Несмотря на упрощения, SPM позволяет относительно точно описывать поведение ячейки при умеренных токах и стала основой для многих расширенных моделей, учитывающих кинетику реакции по Батлеру – Фольмеру. Такая модель хорошо подходит для управления батареей в режиме реального времени (например, в BMS), однако может терять точность при высоких скоростях заряда/разряда и градиентах концентрации по толщине электрода. Помимо описания переноса лития важным аспектом физико-химических моделей является учет тепловых процессов [18]. При больших токах зарядки/разрядки, а также при внешних факторах (например, окружающей температуре) аккумулятор может нагреваться, что в свою очередь влияет на кинетику реакции и скорость деградации материалов. Обычно используются уравнения теплообмена (первый закон термодинамики), связывающие выделяемое/поглощаемое тепло в процессе электрохимической реакции с изменением температуры внутри ячейки:

$$\rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} = \nabla(\lambda \nabla T) + Q,$$

где ρ – плотность материала; c_p – удельная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; Q – источник тепла (джоулево, реакционное и проч.).

Для оценки равновесных потенциалов E_{eq} , теплового эффекта реакций и зависимости различных параметров от температуры используются термодинамические уравнения и экспериментальные данные по тепловым эффектам [19].

На основе метода математического прототипирования в рамках механики, электродинамики и современной неравновесной термодинамики разработан новый подход к созданию моделей динамики физических и химических процессов различных типов аккумуляторов [20].

Согласно ММПЭП состояние системы однозначно определяется координатами состояния, независимо от предшествующей динамики [21, 22]. Глубина протекания физических и химических процессов характеризуется координатами процессов, а их причиной выступают динамические силы, которые представляют собой частные производные свободной энергии по координатам процессов [21, 22]. Однако динамические силы не полностью определяют динамику процессов в системе. Независимо от них, динамика определяется также внутренними кинетическими свойствами, количественной мерой которых является положительно определенная диссипативная матрица [21, 22]. В свою очередь динамика процессов в системе формирует изменения ее наблюдаемых и контролируемых параметров [21].

Построение уравнений динамики физических и химических процессов различных типов с использованием метода математического прототипирования энергетических процессов включает выполнение следующих этапов [7, 20, 21–26].

1. Формирование списка физических и химических процессов в системе.

2. Выбор параметров состояния x .

3. Получение уравнений связи параметров состояния с координатами процессов Δx и с внешними потоками $\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{ext}$ (используя

определения конкретных параметров состояния, законы сохранения):

$$\frac{dx(t)}{dt} = B(x(t), U(t), p) \frac{\delta \Delta x(t)}{dt} + \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)_{ext},$$

где $B(x, U, p)$ – топологическая матрица; U – параметры системы, не изменяющиеся в результате процессов в системе, а изменяющиеся только в результате внешних потоков (а также параметры, определяющие внешние потоки $(dx(t)/dt)_{ext}$); p – индивидуальные параметры системы.

4. Задание аналитических выражений с точностью до экспериментально исследуемых постоянных параметров c_x для функций состояния для потенциалов взаимодействия $X(x, U, p)$, соответствующих выбранным параметрам состояния, удовлетворяющих условию полного дифференциала по выбранным параметрам состояний, определяемых через свободную энергию $W(x, U, p)$:

$$X(x, U, p) = -\nabla_x W(x, U, p).$$

5. Задание аналитических выражений с точностью до экспериментально исследуемых постоянных параметров c_v для функций внешних потоков $(dx(t)/dt)_{ext}$.

Определение внутренних возмущений $\Delta X(x, U, p)$:

$$\Delta X(x, U, p) = B^T(x, U, p) \cdot X(x, U, p).$$

6. Задание аналитических выражений с точностью до экспериментально исследуемых постоянных параметров c_A для диссипативной матрицы $A(x, U, p)$, удовлетворяющих условию положительной определенности (или неотрицательной определенности диссипативной матрицы $A(x, U, p)$, если в системе имеется инерционность).

7. Формирование потенциально-поточных соотношений между скоростями протекания процессов и внутренними возмущениями:

$$\frac{\delta \Delta x(t)}{dt} = A(x(t), U(t), p) \cdot \Delta X(x(t), U(t), p).$$

8. Формирование выражений для измеряемых $y(t)$ и контролируемых $z(t)$ параметров, исходя из определения упомянутых параметров:

$$y(t) = Y(x(t), U(t), p, c_x, c_v, c_A),$$

$$z(t) = Z(x(t), U(t), p, c_x, c_v, c_A).$$

Полученная на основе ММПЭП модель системы преобразовывается к аналитическому виду, пригодному для решения практических задач [7], с использованием специальных методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитическое выражение динамики системы, также вбирающее в себя физику протекающих в системе процессов, что гарантирует корректность преобразованной модели [7], строится на основе анализа перекрестных связей в рассматриваемой системе, для чего используется ее модель, полученная ММПЭП.

Моделирование динамики литийионных аккумуляторов

Модель динамики физических и химических процессов в литийионных аккумуляторах (ЛИА) разрабатывается с учетом следующих предположений:

- ЛИА функционирует в штатном режиме. Аварийные явления, такие как разрушение положительных электродов при переразряде и выделение металлического лития с последующим тепловым разгоном при перезаряде, возникают только при превышении определенного порога разности потенциалов двойных слоев [27, 28];

- процессы деградации (старения) аккумулятора не учитываются из-за их низкой скорости;

- температура внутри аккумулятора считается равномерной, поскольку значительные температурные различия между электродами и мембраной наблюдаются только в условиях теплового разгона, вызванного чередованием положительных и отрицательных электродов;

Таблица 1
Table 1

Выбранные процессы в литийионном аккумуляторе и их взаимосвязь
Selected processes in a lithium-ion battery and their interrelation

Координаты состояния	Координаты процессов	Коэффициенты матрицы баланса (связи)	Внешние потоки	Коэффициенты внешних потоков
Заряд положительного двойного слоя $q_{дв}^+$	Интеркаляция или деинтеркаляция ионов Li^+ в положительный электрод	1	Ток во внешней цепи I	-1
Заряд мембраны q_m	Диффузия ионов Li^+ через мембрану			
Заряд отрицательного двойного слоя $q_{дв}^-$	Интеркаляция или деинтеркаляция ионов Li^+ из отрицательного электрода			
Отданный во внешнюю цепь электрический заряд q	-	-		1

- влияние температуры на ЭДС электродов не принимается во внимание, так как характеристики ЛИА определяются в основном температурной зависимостью сопротивлений двойных слоев и мембраны;

- положительные и отрицательные электроды рассматриваются как идентичные пары;
- мембрана, разделяющая электроды, условно разделена на две области (возле положительного и отрицательного электродов), в пределах которых ионы лития (Li^+) распределены равномерно.

Параметры процессов, описываемые математической моделью на основе метода математического прототипирования энергетических процессов, представлены в виде степенного ряда третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Выбранные координаты состояния, координаты процессов, внешние потоки и их взаимосвязь приведены в табл. 1. При теплообмене ЛИА с окружающей средой за положительное направление процесса теплообмена взято направление от ЛИА к окружающей среде. Некомпенсированная теплота протекающих в ЛИА процессов полностью сообщается на ЛИА.

Приращения чисел молей прочих веществ ЛИА определяются в соответствии с законом Фарадея [25]:

$$dv_{Li^+}^{\varepsilon+} = \frac{dq_{дв}^+ + dq}{F}, dv_{Li^+}^{\varepsilon-} = -\frac{dq_{дв}^- + dq}{F}, dv_{Li^+}^+ = \frac{dq_m - dq_{дв}^+}{F}, dv_{Li^+}^- = \frac{dq_{дв}^- - dq_m}{F}, \quad (1)$$

где $v_{Li^+}^{\varepsilon+}$, $v_{Li^+}^{\varepsilon-}$ – числа молей ионов лития Li^+ , интеркалированных в положительный и отрицательный электроды соответственно; $v_{Li^+}^+$, $v_{Li^+}^-$ – числа молей ионов лития Li^+ в приэлектродных областях положительного и отрицательного электродов соответственно; F – постоянная Фарадея [28]. Отсюда потенциалы взаимодействия по выбранным координатам состояния (приведенным в табл. 1) определяются из условия [21, 28]

$$\delta A = -\bar{\mu}_{Li^+}^{\varepsilon+} dv_{Li^+}^{\varepsilon+} - \bar{\mu}_{Li^+}^{\varepsilon-} dv_{Li^+}^{\varepsilon-} - \bar{\mu}_{Li^+}^+ dv_{Li^+}^+ - \bar{\mu}_{Li^+}^- dv_{Li^+}^- + (\varphi_s^+ - \varphi_s^-) dq = \hat{\mu}_{дв}^+ dq_{дв}^+ + \hat{\mu}_{дв}^- dq_{дв}^- + \hat{\mu}_m dq_m + \hat{\mu}_{вн} dq,$$

где $\hat{\mu}_{дв}^+$, $\hat{\mu}_{дв}^-$ – электрохимический потенциал заряда положительного $q_{дв}^+$ и отрицательного $q_{дв}^-$ двойных слоев; $\hat{\mu}_m$ – электрохимический потенциал заряда мембраны q_m ; $\hat{\mu}_{вн}$ – электрохимический потенциал перенесенного через внешнюю цепь заряда q .

В силу независимости приращений (табл. 1) координат состояния, учитывая (1), для потенциалов взаимодействия с учетом электрохимии имеем [28]

$$\hat{\mu}_{дв}^+ = \varepsilon_{дв}^+ - \frac{q_{дв}^+}{C_{дв}^+}; \hat{\mu}_M = -\frac{q_M}{C_M}; \hat{\mu}_{дв}^- = \varepsilon_{дв}^- - \frac{q_{дв}^-}{C_{дв}^-}; \hat{\mu}_{вн} = \varepsilon_{дв}^+ + \varepsilon_{дв}^-, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{дв}^+$, $\varepsilon_{дв}^-$ – ЭДС положительного и отрицательного двойных слоев ЛИА; $C_{дв}^+$, $C_{дв}^-$ – емкости положительного и отрицательного двойных слоев ЛИА; C_M – емкость мембраны ЛИА.

Для вычисления свойств, веществ и процессов, происходящих в ЛИА, применим приведенные зарядовые числа молей ионов Li^+ , интеркалированного в положительный $\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+}$ и отрицательный $\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-}$ электроды:

$$\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+} = Fv_{Li^+}^{\varepsilon^+}; \tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-} = -Fv_{Li^+}^{\varepsilon^-}. \quad (3)$$

Согласно (1) и (3) имеем

$$d\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+} = dq_{дв}^+ + dq; d\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-} = dq_{дв}^- + dq.$$

ЭДС положительного $\varepsilon_{дв}^+$ и отрицательного $\varepsilon_{дв}^-$ двойных слоев ЛИА:

$$\varepsilon_{дв}^+ = \varepsilon_{дв}^{(c)+} - \left(\varepsilon_{дв}^{(c)+} - \varepsilon_{дв}^{(d)+} \right) \times \left(\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+} + \beta_{Li^+,2}^{\varepsilon^+} (\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+})^2 + \beta_{Li^+,3}^{\varepsilon^+} (\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+})^3 \right), \hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+} = \frac{\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^+}}{\alpha_{Li^+}^{\varepsilon^+} C_{ном}}; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{дв}^- = \varepsilon_{дв}^{(c)-} - \left(\varepsilon_{дв}^{(c)-} - \varepsilon_{дв}^{(d)-} \right) \times \left(\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-} + \beta_{Li^+,2}^{\varepsilon^-} (\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-})^2 + \beta_{Li^+,3}^{\varepsilon^-} (\hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-})^3 \right), \hat{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-} = \frac{\tilde{v}_{Li^+}^{\varepsilon^-}}{\alpha_{Li^+}^{\varepsilon^-} C_{ном}}; \quad (5)$$

где $\varepsilon_{дв}^{(c)+}$, $\varepsilon_{дв}^{(c)-}$ – ЭДС положительного и отрицательного двойных слоев ЛИА в заряженном состоянии; $\varepsilon_{дв}^{(d)+}$, $\varepsilon_{дв}^{(d)-}$ – ЭДС положительного и отрицательного двойных слоев ЛИА в разряженном состоянии; $C_{ном}$ – номинальная емкость ЛИА.

Емкости положительных двойных слоев определяются:

$$C_{дв}^+ = C_{дв}^{0+} \left(\tilde{C}_{дв}^+ + \beta_{U,2}^{C+} (\tilde{C}_{дв}^+)^2 + \beta_{U,3}^{C+} (\tilde{C}_{дв}^+)^3 \right), \tilde{C}_{дв}^+ = 1 + \left| \alpha_U^{C+} \left(\varepsilon_{дв}^+ - \frac{q_{дв}^+}{C_{дв}^{0+}} \right) \right|; \quad (6)$$

$$C_{дв}^- = C_{дв}^{0-} \left(\tilde{C}_{дв}^- + \beta_{U,2}^{C-} (\tilde{C}_{дв}^-)^2 + \beta_{U,3}^{C-} (\tilde{C}_{дв}^-)^3 \right), \tilde{C}_{дв}^- = 1 + \left| \alpha_U^{C-} \left(\varepsilon_{дв}^- - \frac{q_{дв}^-}{C_{дв}^{0-}} \right) \right|; \quad (7)$$

где $C_{дв}^+$, $C_{дв}^-$ – коэффициенты емкости двойных слоев; α_U^{C+} , α_U^{C-} – коэффициенты падения напряжения двойных слоев.

Падение напряжения на положительном $U_{дв}^+$ и отрицательном $U_{дв}^-$ двойных слоях:

$$U_{дв}^+ = \varepsilon_{дв}^+ - q_{дв}^+/C_{дв}^+; U_{дв}^- = \varepsilon_{дв}^- - q_{дв}^-/C_{дв}^-. \quad (8)$$

Коэффициенты сопротивления двойных слоев положительного r_U^{R+} и отрицательного r_U^{R-} электродов по заряду на соответствующих двойных слоях:

$$r_U^{R+} = \tilde{r}_U^{R+} + \beta_{U,2}^{R+} (\tilde{r}_U^{R+})^2 + \beta_{U,3}^{R+} (\tilde{r}_U^{R+})^3, \tilde{r}_U^{R+} = \frac{2\alpha_U^{R+} u_{дв}^+}{\exp(\alpha_U^{R+} u_{дв}^+) - \exp(-\alpha_U^{R+} u_{дв}^+)}; \quad (9)$$

$$r_U^{R-} = \tilde{r}_U^{R-} + \beta_{U,2}^{R-}(\tilde{r}_U^{R-})^2 + \beta_{U,3}^{R-}(\tilde{r}_U^{R-})^3, \quad \tilde{r}_U^{R-} = \frac{2\alpha_U^{R-} u_{дв}^-}{\exp(\alpha_U^{R-} u_{дв}^-) - \exp(-\alpha_U^{R-} u_{дв}^-)}, \quad (10)$$

где α_U^{R+} , α_U^{R-} – коэффициенты сопротивлений по напряжениям двойных слоев.

Коэффициенты сопротивления положительного r_U^{R+} и отрицательного r_U^{R-} двойных слоев по перенесенному через внешнюю цепь заряду q зададим в виде

$$\tilde{r}_Q^{R+} = \begin{cases} 1 - \frac{\tilde{v}_{Li^+}^{\alpha+}}{(\alpha_Q^{R+} c_{nom})}, u_{дв}^+ > 0 \\ \frac{\tilde{v}_{Li^+}^{\alpha+}}{(\alpha_Q^{R+} c_{nom})}, u_{дв}^+ < 0 \\ 1, u_{дв}^+ = 0 \end{cases}; \quad \tilde{r}_Q^{R-} = \begin{cases} 1 - \frac{\tilde{v}_{Li^-}^{\alpha-}}{(\alpha_Q^{R-} c_{nom})}, u_{дв}^- > 0 \\ \frac{\tilde{v}_{Li^-}^{\alpha-}}{(\alpha_Q^{R-} c_{nom})}, u_{дв}^- < 0 \\ 1, u_{дв}^- = 0 \end{cases}; \quad (11)$$

$$r_Q^{R+} = \tilde{r}_Q^{R+} + \beta_{Q,2}^{R+}(\tilde{r}_Q^{R+})^2 + \beta_{Q,3}^{R+}(\tilde{r}_Q^{R+})^3; \quad r_Q^{R-} = \tilde{r}_Q^{R-} + \beta_{Q,2}^{R-}(\tilde{r}_Q^{R-})^2 + \beta_{Q,3}^{R-}(\tilde{r}_Q^{R-})^3, \quad (12)$$

где α_Q^{R+} и α_Q^{R-} – коэффициенты сопротивления по переносу через внешнюю цепь заряду двойных слоев.

Коэффициенты сопротивления двойных слоев положительного r_T^{R+} и отрицательного r_T^{R-} электродов по температуре аккумулятора:

$$r_T^{R+} = \tilde{r}_T^{R+} + \beta_{T,2}^{R+}(\tilde{r}_T^{R+})^2 + \beta_{T,3}^{R+}(\tilde{r}_T^{R+})^3; \quad \tilde{r}_T^{R+} = \exp(-\alpha_T^{R+}(T - T_b^{R+})) + 1; \quad (13)$$

$$r_T^{R-} = \tilde{r}_T^{R-} + \beta_{T,2}^{R-}(\tilde{r}_T^{R-})^2 + \beta_{T,3}^{R-}(\tilde{r}_T^{R-})^3; \quad \tilde{r}_T^{R-} = \exp(-\alpha_T^{R-}(T - T_b^{R-})) + 1, \quad (14)$$

где α_T^{R+} и α_T^{R-} – коэффициенты сопротивления по температуре двойных слоев; T_b^{R+} , T_b^{R-} – граничные температуры, ниже которых сопротивления начинают резко возрастать.

Сопротивление положительного $R_{дв}^+$ и отрицательного $R_{дв}^-$ двойных слоев ЛИА:

$$R_{дв}^+ = R_{дв}^{0+} r_U^{R+} r_T^{R+} / (r_Q^{R+})^{n_Q^{R+}}; \quad R_{дв}^- = R_{дв}^{0-} r_U^{R-} r_T^{R-} / (r_Q^{R-})^{n_Q^{R-}}, \quad (15)$$

где $R_{дв}^{0+}$ и $R_{дв}^{0-}$ – постоянные сопротивлений двойных слоев; n_Q^{R+} , n_Q^{R-} – степени заполнения электродов.

Сопротивление мембраны R_M :

$$R_M = R_M^0 (r_m + \beta_2^{R_M} (r_m)^2 + \beta_3^{R_M} (r_m)^3); \quad r_m = \exp(\alpha_T^{R_M} (T - T_b^{R_M})) + 1, \quad (16)$$

где R_M^0 – коэффициент сопротивления мембраны; $\alpha_T^{R_M}$ – температурный коэффициент сопротивления мембраны; $T_b^{R_M}$ – граничная температура мембраны.

Входящие в (4)–(7), (9), (10), (12)–(14), (16) коэффициенты β с соответствующими индексами являются коэффициентами разло-

жения в степенной ряд по соответствующим параметрам.

Перекрестные коэффициенты диссипативной матрицы равны нулю, а главные коэффициенты – обратные сопротивления двойных слоев и мембраны, заданные постоянным коэффициентом теплопередачи ЛИА. Теплоемкость ЛИА задаем постоянной, а

тепловые эффекты в силу независимости потенциалов взаимодействия от температуры (видно из (2), (4)–(7)) равны соответствующим потенциалам взаимодействия (вытекает из соотношений Гиббса – Гельмгольца) [21, 29].

Результаты исследования

Вычислительный эксперимент на основе приведенной модели ММПЭП дает следующие качественные особенности динамики напряжения на клеммах:

- временные параметры поляризации электролита (включая установление напряжения двойных слоев, напряжения на клеммах и мембране) практически не зависят от количества переданного через внешнюю цепь электрического заряда q и степени износа электродов;
- постоянная времени, характеризующая установление температуры, значительно превышает постоянную времени поляризации электролита при различных степенях разряда;
- установившееся напряжение на клеммах после завершения поляризации электролита уменьшается с увеличением тока разряда;

- установившаяся температура, напротив, увеличивается с ростом тока разряда после завершения поляризации электролита;
- динамика изменения потенциалов на клеммах и двойных слоях электродов показывает качественное сходство при различных значениях тока разряда;
- параметры кривых, описывающих динамику напряжения на клеммах и температуры, изменяются независимо друг от друга с вариацией параметров модели ЛИА. Однако при уменьшении активной площади электродов из-за процессов старения [27, 30] наблюдается связь между параметрами начальных и последующих участков разрядных кривых;
- при высоких токах разряда (порядка 2,6–3С) начальные участки кривых напряжения становятся более пологими, что связано с уменьшением сопротивления двойных слоев ЛИА по мере роста температуры аккумулятора (как показано в уравнениях (13) и (14)).

Из приведенного качественного анализа аналитическое выражение динамики напряжения в процессе разряда ЛИА постоянным током примет вид

$$U_{дв}^{(+)}(t) = U_{дв}^{*(+)} U_{пол}^{(+)}(t) \left(1 - \Delta U_{+}^{*}(I) - K_Q^{(+)} q - \sum_{k=1}^{N_Q^{U^{(+)}}} \frac{A_{Q,k}^{U^{(+)}}(I)}{\left(1 - \omega(I) \frac{q}{Q_{(разр)U+}^{*}}\right)^k} \right); \quad (17)$$

$$U_{дв}^{(-)}(t) = U_{дв}^{*(-)} U_{пол}^{(-)}(t) \left(1 - \Delta U_{-}^{*}(I) - K_Q^{(-)} q - \sum_{k=1}^{N_Q^{U^{(-)}}} \frac{A_{Q,k}^{U^{(-)}}(I)}{\left(1 - \omega(I) \frac{q}{Q_{(разр)U-}^{*}}\right)^k} \right); \quad (18)$$

$$U_{пол}^{(+)}(t) = 1 + \Delta \bar{U}_{пол}^{(+)}(t) \sum_{k=1}^{N_{пол}^{(+)}} \alpha_{пол,k}^{(+)}(I) \left| \Delta \bar{U}_{пол}^{(+)}(t) \right|^{k-1}, \quad \Delta \bar{U}_{пол}^{(+)}(t) = \Delta \bar{U}_{пол,0}^{(+)} \exp(-\lambda_{пол}^{(+)} t); \quad (19)$$

$$U_{пол}^{(-)}(t) = 1 + \Delta \bar{U}_{пол}^{(-)}(t) \sum_{k=1}^{N_{пол}^{(-)}} \alpha_{пол,k}^{(-)}(I) \left| \Delta \bar{U}_{пол}^{(-)}(t) \right|^{k-1}, \quad \Delta \bar{U}_{пол}^{(-)}(t) = \Delta \bar{U}_{пол,0}^{(-)} \exp(-\lambda_{пол}^{(-)} t); \quad (20)$$

$$\Delta \bar{U}_m(t) = \Delta \bar{U}_{m,0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right), \quad q = q_0 + It; \quad (21)$$

$$U(t) = U_{дв}^{(+)}(t) + U_{дв}^{(-)}(t) + (\Delta \bar{U}_m(t) + 1)IR_m - IR_{кл}, \quad (22)$$

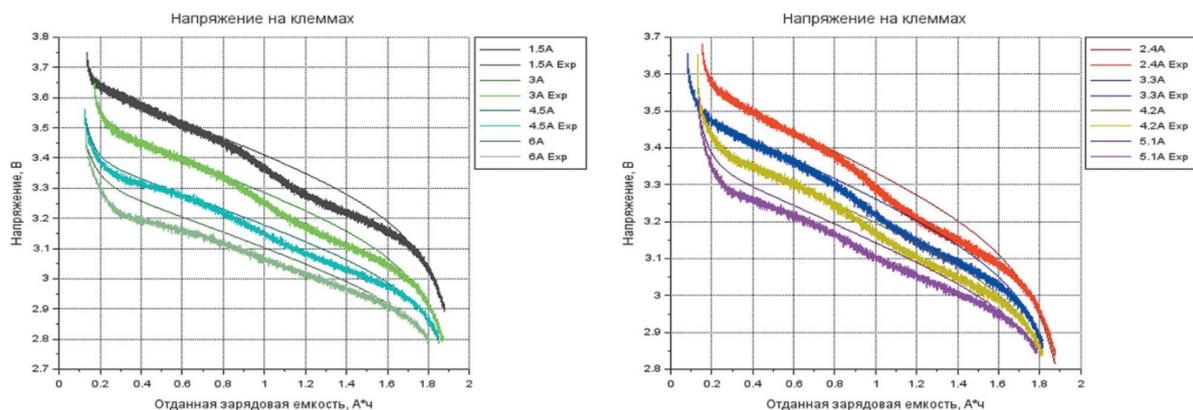


Рис. 1. Модель и экспериментальные данные разрядного напряжения на клеммах ЛИА для тока разряда от 1,5 до 6 А

Fig. 1. Model and experimental data of discharge voltage at the terminals of a lithium-ion battery for discharge current from 1.5 to 6 A

где $R_{кл}$, R_m – сопротивления клемм и мембраны; $\lambda_{пол}^{(+)} > 0$, $\lambda_{пол}^{(-)} > 0$ – обратные постоянные времени поляризации положительного и отрицательного электродов; $t_m > 0$ – постоянная времени поляризации мембраны; $Q_{(разр)U^+}^*$, $Q_{(разр)U^-}^*$ – постоянные заполнения положительного и отрицательного электродов при разряде; $K_Q^{(+)}$, $K_Q^{(-)}$ – постоянные ЭДС двойных слоев положительного и отрицательного электродов ЛИА; $\Delta U_+^*(I)$, $\Delta U_-^*(I)$ – постоянные составляющие напряжения двойных слоев положительного и отрицательного электродов после поляризации; $U_{дв}^{*(+)}$, $U_{дв}^{*(-)}$ – стандартные электродные потенциалы положительного и отрицательного электродов; $A_{Q,k}^{U(+)}(I)$, $A_{Q,k}^{U(-)}(I)$ – коэффициенты заполнения положительного и отрицательного электродов ЛИА по напряжению; $\alpha_{пол,k}^{(+)}(I)$, $\alpha_{пол,k}^{(-)}(I)$ – коэффициенты поляризации по напряжению положительного и отрицательного электродов; q_0 , $\Delta \bar{U}_{пол,0}^{(+)}$, $\Delta \bar{U}_{пол,0}^{(-)}$, $\Delta \bar{U}_{m,0}$ – начальные значения перенесенного через внешнюю цепь заряда и поляризационных отклонений напряжений положительного и отрицательного двойных слоев и мембраны.

Из (17)–(22) видно, что зависимости параметров $\Delta U_+^*(I)$, $\Delta U_-^*(I)$, $A_{Q,k}^{U(+)}(I)$, $k = 1$, $N_Q^{U(+)}$, $A_{Q,k}^{U(-)}(I)$, $k = 1$, $N_Q^{U(-)}$, $\alpha_{пол,k}^{(+)}(I)$, $k = 1$, $N_{пол}^{(+)}$, $\alpha_{пол,k}^{(-)}(I)$, $k = 1$, $N_{пол}^{(-)}$ задаются с использованием сплайновой интерполяции.

Из рис. 1 видно, что аналитические выражения (17)–(22) хорошо описывают экспериментальные данные динамики напряжения при токах, не превышающих 2,8–3С. «Впадина» на графике экспериментальной кривой напряжения на клеммах ЛИА относительно расчетной обусловлена более сложной зависимостью сопротивления двойных слоев от числа молей Li, ионы которых интеркалированы в соответствующие электроды. Числа молей в свою очередь определяются отданной зарядовой емкостью ЛИА. Отклонения расчетных значений напряжения от экспериментальных при больших токах разряда обуславливаются нагревом ЛИА и зависимостью сопротивления двойных слоев от температуры, которая в аналитической модели не отражена. Для устранения приведенных погрешностей необходимо дальнейшее совершенствование предложенной аналитической модели: учет зависимости сопротивления двойных слоев от температуры и более сложной зависимости сопротивления двойных слоев от числа ионов Li, интеркалированных в соответствующие электроды.

Из рис. 2 видно, что, идентифицировав параметры модели напряжения, можно моделировать динамику напряжения двойных слоев ЛИА, причем качественное поведение напряжения соответствует результатам экспериментальных исследований.

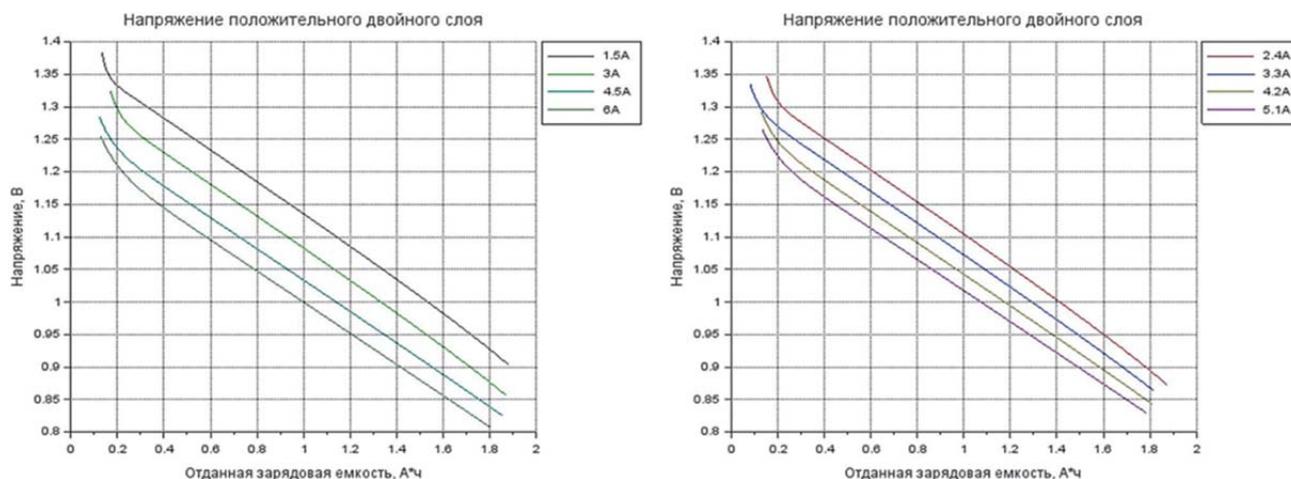


Рис. 2. Модель разрядного напряжения положительного двойного слоя ЛИА
Fig. 2. Discharge voltage model of positive double layer lithium-ion accumulator

Заключение

Модели, построенные с использованием метода математического прототипирования энергетических процессов, обладают значительными преимуществами, особенно при описании сложных систем, таких как литийионные аккумуляторы, в сравнении с иными подходами к моделированию. Эти модели строго основаны на фундаментальных физических принципах, включая законы сохранения энергии, массы, заряда, а также первое и второе начала термодинамики, что обеспечивает их высокую точность и физическую корректность. Это обеспечивает физическую корректность моделей и исключает противоречия в описании процессов. Метод применим к механическим, тепловым, химическим и электрическим процессам, что позволяет объединять различные физико-химические явления в рамках единой модели, что особенно важно для таких комплексных систем, как аккумуляторные батареи.

Метод учитывает структуру системы через топологическую матрицу $V(x, U, p)$, это позволяет описывать взаимосвязи между состояниями и процессами. В отличие от упрощенных моделей, например Rint, Шеферда или Тевенина, ММПЭП учитывает такие нелинейности, как поляризация электродов, разность потенциалов двойных слоев, тепловые и диффузионные эффекты. Однако метод дает достаточно большие и сложные модели.

Целесообразно из полученных моделей с применением ММПЭП, используя вычислительный эксперимент, получать усовершенствованные аналитические модели описанных в статье подходов. Это новая задача, требующая дальнейших исследований. Таким образом, на основе вычислительного эксперимента можно получить качественный анализ динамик и перекрестных связей. Обладая качественным анализом динамик и перекрестных связей, мы получаем аналитическое выражение (17)–(22). Приведенная в статье модель является расширением модели Шеферда.

Модели на основе ММПЭП подходят для прогнозирования состояния системы (например, остаточной емкости аккумулятора) и диагностики отказов (например, начальных стадий деградации или теплового разгона). Кроме того, ММПЭП позволяет создавать цифровые двойники систем, которые применяются для мониторинга, управления и оптимизации работы батарей.

Одним из существенных преимуществ метода является возможность его оптимизации, например путем упрощения модели через замену базиса функциональных разложений, что обеспечивает возможность аналитического приближения решений [7]. В сравнении с методами машинного обучения, описанными в работах [14, 15], ММПЭП не требует больших наборов экспериментальных данных для обучения, так как и обеспечивает более высокую физическую интерпретируемость результатов.

Современные тенденции указывают на перспективность гибридных подходов, где физико-химическое ядро дополняется методами машинного обучения (ML) для уточнения и онлайн-обновления параметров модели. Для дальнейшего развития метода представляется перспективным:

- 1) расширение модели для учета эффектов старения аккумуляторов;
- 2) интеграция методов машинного обучения для повышения точности прогнозирования;
- 3) разработка упрощенных версий модели для применения в системах реального времени.

Таким образом, метод математического прототипирования является мощным инструментом для моделирования литий-ионных аккумуляторов, сочетая физическую корректность, универсальность и высокую точность. Его дальнейшее развитие может значительно улучшить возможности проектирования и управления аккумуляторными системами.

Список литературы

1. Левин А.В., Халютин С.П., Жмуров Б.В. Тенденции и перспективы развития авиационного электрооборудования // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 213 (3). С. 50–57.
2. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized method of mathematical prototyping of energy processes for digital twins development [Электронный ресурс] // Energies. 2023. Vol. 16, iss. 4. ID: 1933. DOI: 10.3390/en16041933 (дата обращения: 10.08.2024).
3. Zhou R. Theoretical model of lithium iron phosphate power battery under high-rate discharging for electromagnetic launch / R. Zhou, Y. Zhang, L. Gao, J. Li, X. Wu // International Journal of Mechanical System Dynamics. 2021. Vol. 1, № 2. Pp. 220–229. DOI: 10.1002/msd.12014
4. Li K. A practical lithium-ion battery model for state of energy and voltage responses prediction incorporating temperature and ageing effects / K. Li, F. Wei, K.J. Tseng, B.-H. Soong //

IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2018. Vol. 65, no. 8. Pp. 6696–6708. DOI: 10.1109/TIE.2017.2779411

5. Shepherd C.M. Design of primary and secondary cells: II. An equation describing battery discharge // Journal of The Electrochemical Society. 1965. Vol. 112, no. 7. Pp. 657–664. DOI: 10.1149/1.2423659

6. Bard A.J., Faulkner L.R. Electrochemical methods: Fundamentals and applications. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 2000. 864 p.

7. Старостин И.Е., Дружинин А.А. Аналитическое приближение решений уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов путем качественного анализа этих уравнений // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 2 (42). С. 22–31. DOI: 10.21685/2307-4205-2023-2-3

8. Yu Z. SOH estimation method for lithium-ion battery based on discharge characteristics / Z. Yu, X. Hu, S. Yang, Y. Xu, C. Liu [Электронный ресурс] // International Journal of Electrochemical Science. 2022. Vol. 17, iss. 7. ID: 220725. DOI: 10.20964/2022.07.38 (дата обращения: 10.08.2024).

9. Старостин И.Е., Дружинин А.А., Гавриленков С.И. Использование машинного обучения с учителем для построения математических моделей систем методом математического прототипирования энергетических процессов // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». 2023. Т. 1. С. 66–72.

10. Campagna N. Battery models for battery powered applications: A comparative study / N. Campagna, V. Castiglia, R. Miceli, D. Miceli, C. Spataro [Электронный ресурс] // Energies. 2020. Vol. 13, iss. 16. ID: 4085. DOI: 10.3390/en13225824 (дата обращения: 10.08.2024).

11. Supriyono. Evaluation of the dynamic modeling and discharge performance of a magnesium battery activated by seawater // International Journal of Technology. 2018. Vol. 4. Pp. 663–674.

12. Барсегян К.Р., Перепелица М.А., Онищенко Д.О. Разработка математической модели литий-ионной аккумуляторной бата-

реи и ее сравнение с существующими аналогами // Известия МГТУ МАМИ. 2022. Т. 16, № 1. С. 81–88. DOI: 10.17816/2074-0530-104574

13. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9, iss. 8. Pp. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735

14. Caliwag A.C., Lim W. Hybrid VARMA and LSTM method for lithium-ion battery state-of-charge and output voltage forecasting in electric motorcycle applications [Электронный ресурс] // IEEE Access. 2019. Vol. 7. Pp. 59680–59689. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2914188 (дата обращения: 10.08.2024).

15. Колосницын Д.В. Моделирование и оценка зарядового состояния литий-серного аккумулятора с помощью нейронно-нечеткой сети / Д.В. Колосницын, А.А. Саввина, Л.А. Храмцова, Е.В. Кузьмина, Е.В. Карасева, В.С. Колосницын // Электрохимическая энергетика. 2021. Т. 21, № 2. С. 96–107. DOI: 10.18500/1608-4039-2021-21-2-96-107

16. Doyle M., Fuller T.F., Newman J. Modeling of galvanostatic charge and discharge of the lithium/polymer/insertion cell [Электронный ресурс] // Journal of the Electrochemical Society. 1993. Vol. 140, no. 6. ID: 1526. DOI: 10.1149/1.2221597 (дата обращения: 10.08.2024).

17. Safari M., Delacourt C. Modeling of a commercial Graphite/LiFePO₄ cell using a simplified electrochemical and thermal model [Электронный ресурс] // Journal of The Electrochemical Society. 2011. Vol. 158, no. 5. ID: A562–A571. DOI: 10.1149/1.3567007 (дата обращения: 10.08.2024).

18. Пунт Е.А. Алгоритм синтеза уравнений теплопроводности литийионного аккумулятора для конечных объемов при делении // Научный Вестник МГТУ ГА. 2024. Т. 27, № 4. С. 50–62. DOI: 10.26467/2079-0619-2024-27-4-50-62

19. Gu W.B., Wang C.Y. Thermal and electrochemical coupled modeling of a lithium-ion cell // Electrochemical Engine Center. 2000. Vol. 99-25, no. 1. Pp. 748–762.

20. Эткин В.А. К единой термодинамической теории реальных процессов переноса

са // Информационные процессы, системы и технологии. 2021. № 2 (20). С. 9–18. DOI: 10.52529/27821617_2021_2_2_09

21. Eykhoff P. Systems identification: Parameters and state estimation Eindhoven, London: Wiley-Interscience, 1975. 555 p.

22. Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика: пер. с англ. Новосибирск: Наука, 1966. 512 с.

23. Старостин И.Е., Халютин С.П., Париевский В.В. Виды и формы представления основных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов // Электропитание. 2022. № 4. С. 4–14.

24. Старостин И.Е., Степанкин А.Г. Программная реализация методов современной неравновесной термодинамики и система симуляции физико-химических процессов SimulationNonEqProcSS v.0.1.0: монография. Бо Бассен, Маврикий: Lambert Academic Publishing, 2019. 127 с.

25. Эткин В.А. Эргодинамическая теория эволюции биологических систем // Информационные процессы, системы и технологии. 2022. Т. 3, № 1 (22). С. 12–24. DOI: 10.52529/27821617_2022_3_1_12

26. Давидов А.О., Жмуров Б.В. Метод диагностики авиационных электрохимических аккумуляторных батарей // Труды международного симпозиума «Надежность и качество», 2016. Т. 2. С. 78–80.

27. Starostin I.E., Druzhinin A.A. The concept of a software and technological platform for digital twins based on energy dynamics methods // 2023 5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), 2023. Pp. 1–6. DOI: 10.1109/REEPE57272.2023.10086710

28. Эткин В.А. Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии). СПб.: Наука, 2008. 409 с.

29. Кедринский И.А., Яковлев В.Г. Li-ионные аккумуляторы. Красноярск: Платина, 2002. 268 с.

30. Багоцкий В.С. Основы электрохимии. Москва: Химия, 1988. 401 с.

References

1. Levin, A.V., Khalyutin, S.P., Zhmurov, B.V. (2015). Trends and prospects of aviation equipment development. *Nauchnyy vestnik MGTU GA*, no. 213 (3), pp. 50–57. (in Russian)
2. Khalyutin, S.P., Starostin, I.E., Agafonkina, I.V. (2023). Generalized method of mathematical prototyping of energy processes for digital twins development. *Energies*, vol. 16, issue 4, ID: 1933. DOI: 10.3390/en16041933 (accessed: 10.08.2024).
3. Zhou, R., Zhang, Y., Gao, L., Li, J., Wu, X. (2021). Theoretical model of lithium iron phosphate power battery under high-rate discharging for electromagnetic launch. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, vol. 1, no. 2, pp. 220–229. DOI: 10.1002/msd2.12014
4. Li, K., Wei, F., Tseng, K.J., Soong, B.-H. (2018). A practical lithium-ion battery model for state of energy and voltage responses prediction incorporating temperature and ageing effects. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, no. 8, pp. 6696–6708. DOI: 10.1109/TIE.2017.2779411
5. Shepherd, C.M. (1965). Design of primary and secondary cells: II. An equation describing battery discharge. *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 112, no. 7, pp. 657–664. DOI: 10.1149/1.2423659
6. Bard, A.J., Faulkner, L.R. (2001). *Electrochemical methods: Fundamentals and applications*. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 864 p.
7. Starostin, I.E., Druzhinin, A.A. (2023). Analytical approximation of solutions of equations of the method of mathematical prototyping of energy processes by qualitative analysis of these equations. *Reliability and Quality of Complex Systems*, no. 2 (42), pp. 22–31. DOI: 10.21685/2307-4205-2023-2-3 (in Russian)
8. Yu, Z., Hu, X., Yang, S., Xu, Y., Liu, C. (2022). SOH estimation method for lithium-ion battery based on discharge characteristics. *International Journal of Electrochemical Science*, vol. 17, issue 7. ID: 220725. DOI: 10.20964/2022.07.38 (accessed: 10.08.2024).
9. Starostin, I.E., Druzhinin, A.A., Gavrilentsov, S.I. (2023). Using supervised machine learning for constructing mathematical models of systems by the method of mathematical prototyping of energy processes. In: *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma “Nadezhnost i Kachestvo”*, vol. 1, pp. 66–72. (in Russian)
10. Campagna, N., Castiglia, V., Miceli, R., Miceli, D., Spataro, C. (2020). Battery models for battery powered applications: A comparative study. *Energies*, vol. 13, issue 16. ID: 4085. DOI: 10.3390/en13225824 (accessed: 10.08.2024).
11. Supriyono. (2018). Evaluation of the dynamic modeling and discharge performance of a magnesium battery activated by seawater. *International Journal of Technology*, vol. 4, pp. 663–674.
12. Barsegyan, K.R., Perepeliza, M.A., Onishchenko, D.O. (2022). Mathematical model creation for the lithium-ion battery and its comparing with analogs. *Izvestiya MGTU MAMI*, vol. 16, no. 1, pp. 81–88. DOI: 10.17816/2074-0530-104574 (in Russian)
13. Hochreiter, S., Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computation*, vol. 9, issue 8, pp. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735
14. Caliwag, A.C., Lim, W. (2019). Hybrid VARMA and LSTM method for lithium-ion battery state-of-charge and output voltage forecasting in electric motorcycle applications. *IEEE Access*, vol. 7, pp. 59680–59689. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2914188 (accessed: 10.08.2024).
15. Kolosnitsyn, D.V., Savvina, A.A., Khramtsova, L.A., Kuzmina, E.V., Karaseva, E.V., Kolosnitsyn, V.S. (2021). Simulation and estimation of lithium-sulfur battery charge state using fuzzy neural network. *Electrochemical Energetics*, vol. 21, no. 2, pp. 96–107. DOI: 10.18500/1608-4039-2021-21-2-96-107 (in Russian)
16. Doyle, M., Fuller, T.F., Newman, J. (1993). Modeling of galvanostatic charge and discharge of the lithium/polymer/insertion cell. *Journal of the Electrochemical Society*, vol. 140, no. 6. ID: 1526. DOI: 10.1149/1.2221597 (accessed: 10.08.2024).

17. **Safari, M., Delacourt, C.** (2011). Modeling of a commercial Graphite/LiFePO₄ cell using a simplified electrochemical and thermal model. *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 158, no. 5. ID: A562–A571. DOI: 10.1149/1.3567007 (accessed: 10.08.2024).
18. **Punt, E.A.** (2024). Algorithm for the synthesis of equations of thermal conductivity of lithium-ion accumulator for finite volumes during division. *Civil Aviation High Technologies*, vol. 27, no. 4, pp. 50–62. DOI: 10.26467/2079-0619-2024-27-4-50-62 (in Russian)
19. **Gu, W.B., Wang, C.Y.** (2000). Thermal and electrochemical coupled modeling of a lithium-ion cell. *Electrochemical Engine Center*, vol. 99–25, no. 1, pp. 748–762.
20. **Etkin, V.A.** (2021). To a unified thermodynamic theory of real transfer processes. *Information Processes, Systems, and Technologies*, no. 2 (20), pp. 9–18. DOI: 10.52529/27821617_2021_2_2_09 (in Russian)
21. **Eykhoff, P.** (1975). Systems identification: Parameters and state estimation Eindhoven, London: Wiley-Interscience, 555 p.
22. **Prigogine, I., Defay, R.** (1954). Chemical Thermodynamics. Published by Longman, 419 p.
23. **Starostin, I.E., Khalyutin, S.P., Parievskiy, V.V.** (2022). Types and forms of representation of the basic equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. *Elektropitaniye*, no. 4, pp. 4–14. (in Russian)
24. **Starostin, I.E., Stepankin, A.G.** (2019). Software implementation of modern nonequilibrium thermodynamics methods and simulation system for physicochemical processes SimulationNonEqProcSS v.0.1.0: Monograph. Beau Bassin, Mauritius: Lambert Academic Publishing, 127 p. (in Russian)
25. **Etkin, V.A.** (2022). Ergodynamic theory of biological systems evolution. *Information Processes, Systems, and Technologies*, vol. 3, no. 1 (22), pp. 12–24. DOI: 10.52529/27821617_2022_3_1_12 (in Russian)
26. **Davidov, A.O., Zhmurov, B.V.** (2016). Method for diagnosing aviation electrochemical batteries. In: *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma “Nadezhnost i Kachestvo”*, vol. 2, pp. 78–80. (in Russian)
27. **Starostin, I.E., Druzhinin, A.A.** (2023). The concept of a software and technological platform for digital twins based on energy dynamics methods. In: *2023 5th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE)*, pp. 1–6. DOI: 10.1109/REEPE57272.2023.10086710
28. **Etkin, V.A.** (2008). Energodynamics (Synthesis of theories of energy transfer and conversion). St. Petersburg: Nauka, 409 p. (in Russian)
29. **Kedrin, I.A., Yakovlev, V.G.** (2002). Li-ion batteries. Krasnoyarsk: Platina, 268 p. (in Russian)
30. **Bagotskiy, V.S.** (1988). Fundamentals of Electrochemistry. Moscow: Khimiya, 401 p. (in Russian)

Сведения об авторе

Гавриленков Станислав Иванович, аспирант кафедры электротехники и авиационного электрооборудования МГТУ ГА, s.gavrilenkov@mstuca.ru.

Information about the author

Stanislav I. Gavrilenkov, Postgraduate Student of the Chair of Electrical Engineering and Aviation Electrical Equipment, Moscow State Technical University of Civil Aviation, s.gavrilenkov@mstuca.ru.

Поступила в редакцию	17.01.2025	Received	17.01.2025
Одобрена после рецензирования	10.03.2025	Approved after reviewing	10.03.2025
Принята в печать	22.05.2025	Accepted for publication	22.05.2025