

УДК 532.57

АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.А. КУКИН, В.В. ТРОФИМОВ, О.А. ЭЙСФЕЛЬД

Статья представлена доктором технических наук, профессором Ципенко В.Г.

В данной работе рассмотрена возможность использования гидравлического аналогового моделирования при исследовании задач нестационарной газовой динамики. Проведен анализ дифференциальных уравнений нестационарного движения тел в сверхзвуковом потоке с использованием теории подобия и анализа размерностей. Получены критерии подобия, которые должны быть тождественны, как для реального потока газа, так и для моделирующего его потока жидкости. Использование гидравлического аналогового моделирования при исследованиях в нестационарной газовой динамике позволяет получать полезную информацию, необходимую для понимания физики процессов и построения более совершенных математических моделей.

Ключевые слова: аналоговое моделирование, теория подобия и анализ размерностей, нестационарная газовая динамика, критерии подобия.

Проектирование и эксплуатация современной авиационной и ракетно-космической техники связано с возрастающими потребностями в исследовании стационарных и нестационарных газодинамических процессов в широком диапазоне режимов. Использование аналогового моделирования этих задач будет способствовать расширению представления о сложности нестационарных газодинамических процессов, что, в свою очередь, позволит создавать более совершенные математические модели этих процессов. Одним из аналоговых методов является гидравлическое аналоговое моделирование, разработанное Н.Е. Жуковским.

При изучении гидродинамических явлений в жидкости и газодинамических в газе исходят из предпосылки, что хотя явления в этих средах и разной физической природы, но описываются они одинаковыми дифференциальными уравнениями [1]. Каждому математическому описанию процесса при моделировании должны соответствовать и определяющие критерии подобия, которые тождественны для обоих процессов и определяют математическое подобие.

При исследовании нестационарного обтекания тел с использованием аналогового моделирования необходимым становится и физическое моделирование, так как в аналоговом эксперименте используется физическая модель тела, подобная натурному объекту по физическим параметрам. В связи с этим при моделировании нестационарного обтекания тел методом газогидравлической аналогии необходимо выдерживать тождества, как критериев математического подобия, так и критериев физического подобия.

Критерии математического подобия выводятся из анализа уравнений одномерного установившегося движения изоэнтропного газа и жидкости в каналах произвольного сечения.

Одномерное установившееся движение изоэнтропного газа описывается уравнениями:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (1)$$

$$\rho v S = \text{const}, \quad (2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \quad (3)$$

Из (3), с учетом (1), следует:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dS}{S}. \quad (4)$$

В этих выражениях: v – скорость течения газа; ρ – плотность газа; p – давление газа; S – площадь сечения канала; γ – показатель изэнтропы; a – скорость звука; $M = \frac{v}{a}$ – число Маха – критерий, обеспечивающий динамическое подобие двух геометрически подобных потоков газа.

Одномерное установившееся движение жидкости в канале со свободной поверхностью описывается уравнениями:

$$w \frac{dw}{dx} = -g \frac{dh}{dx}, \quad (5)$$

$$\rho w S = \text{const}, \quad (6)$$

где w – скорость течения жидкости; h – глубина жидкости; g – ускорение свободного падения.

Форма обвода поперечного сечения канала задается выражением:

$$y = D z^m, \quad (7)$$

площадь поперечного сечения канала:

$$S = \frac{D}{m+1} h^{m+1} = A h^{m+1}. \quad (8)$$

Из (6), с учетом (8), следует:

$$\frac{dw}{w} = \frac{1}{Fr-1} \frac{dA}{A}. \quad (9)$$

В выражениях (7) – (9): D , m , A – постоянные, определяющие форму поперечного сечения канала; $Fr = \frac{w^2}{gh}$ – число Фруда – критерий, обеспечивающий динамическое подобие

двух геометрически подобных потоков жидкости.

Для канала прямоугольного сечения $m = 0$ и число Фруда $Fr = \frac{w^2}{gh}$.

Выражения (4) и (9) тождественны, что определяет и тождество критериев динамического подобия для газа и жидкости: $M^2 = Fr$ или $M = \sqrt{Fr}$.

Как известно, скорость звука определяется выражением $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$ и для изэнтропного процесса $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$.

Введем константы подобия, определяемые общей формулой [2], как отношение параметра натурального объекта к соответствующему параметру модельного объекта: $C_{\Pi} = \frac{\Pi_n}{\Pi_m}$, где Π_n – какой-либо параметр натурального потока; Π_m – аналогичный параметр модельного потока.

С использованием констант подобия по: скорости звука $C_a = \frac{a_n}{a_m}$, давлению $C_p = \frac{p_n}{p_m}$, плотности $C_\rho = \frac{\rho_n}{\rho_m}$ и показателю адиабаты $C_\gamma = \frac{\gamma_n}{\gamma_m}$ – из выражений для квадрата скорости

звука следует $C_{a^2} = \frac{C_p}{C_\rho}$, $C_{a^2} = C_\gamma \frac{C_p}{C_\rho}$, чему соответствует $C_\gamma = 1$, т.е. для натурального и модельного потоков газа $\gamma_H = \gamma_M = \gamma = \text{const}$.

Взаимосвязь между показателем изоэнтропии и формой сечения канала с жидкостью следует из анализа уравнений неразрывности потоков газа и жидкости. Продифференцируем по x уравнения неразрывности для газа (2) и жидкости (9): $\frac{d}{dx}(\rho v S) = 0$, $\frac{d}{dx}(A w h^{m+1}) = 0$.

Эти уравнения тождественны при одинаковых законах изменения площадей потоков (S и A) и при условии, что аналогом плотности газа является глубина потока жидкости:

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^{m+1} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (10)$$

где индексом 0 обозначены параметры заторможенного потока газа.

Из уравнения энергии потока газа следует соотношение

$$\left(\frac{v}{v_{\max}}\right)^2 = \frac{T_0 - T}{T_0}, \quad (11)$$

а из уравнения Бернулли для потока несжимаемой жидкости

$$\left(\frac{w}{w_{\max}}\right)^2 = \frac{h_0 - h}{h_0}. \quad (12)$$

Из сравнения (11) и (12) следует

$$1 - \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{h}{h_0} \quad \text{или} \quad \frac{T}{T_0} = \frac{h}{h_0}, \quad (13)$$

т.е. при гидравлическом моделировании аналогом температуры газа является глубина жидкости.

Для изоэнтропного потока газа известно соотношение $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, которое с учетом (10) и (13) примет вид:

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^{m+1} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Отсюда следует $m+1 = \frac{1}{\gamma-1}$, $\gamma = \frac{m+2}{m+1} = \psi(m)$, где $\psi(m)$ – функция показателя формы сечения канала.

В случае использования канала прямоугольного сечения для потока жидкости постоянная, определяющая эту форму в выражении (7) $m = 0$. При этом достигается аналогия между течением тонкого слоя жидкости и плоским течением гипотетического газа с показателем энтропии $\gamma = 2$.

При изучении нестационарного обтекания тел потоком газа наряду с выполнением условий, обеспечивающих равенство критериев подобия $M^2 = Fr$ и $\gamma = \psi(m)$, требуется осуществить и физическое моделирование по кинематическим параметрам потока.

В общем случае движение тела, совершающего вынужденные вращательные колебания, описывается уравнением [3]:

$$I\ddot{\alpha} + K_m \dot{\alpha} + c_{кр} \alpha = M(t), \quad (14)$$

где I – момент инерции тела; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение тела ($\ddot{\alpha} = \varepsilon$); K_m – коэффициент демпфирующего момента ($K_m = \frac{m_z}{2} \rho S b^2$); $\dot{\alpha}$ – угловая скорость тела ($\dot{\alpha} = \omega$); $c_{кр}$ – коэффициент упругого момента; m_z – аэродинамический коэффициент момента тангажа; $M(t)$ – возмущающий момент.

Из (14) с учетом констант подобия: C_v – скорости; C_l – характерного линейного размера; C_ρ – плотности; C_ω – угловой скорости; C_M – возмущающего момента; C_α – угла атаки; C_ε – углового ускорения; $C_S = C_l^2$ – площади; $C_{\ddot{\alpha}} = C_\varepsilon$; $C_{\dot{\alpha}} = C_\omega$; $C_I = C_l^5 C_\rho$ следует выражение:

$$C_l C_\rho C_\varepsilon I_M \ddot{\alpha} + C_l^4 C_\rho C_v C_\omega K_{mM} v_M \dot{\alpha} + C_l^5 C_\rho C_\omega C_\alpha c_{крM} \alpha = C_M M(t). \quad (15)$$

Из геометрического подобия следует C_α . Так как (14) и (15) должны быть тождественны, то комплексы констант перед членами уравнения (15) равны между собой. Отсюда, следуют выражения:

$$\frac{C_l^5 C_\rho C_\varepsilon}{C_l^4 C_\rho C_v C_\omega} = 1, \quad (16)$$

$$\frac{C_M}{C_l^5 C_\rho C_\varepsilon} = 1, \quad (17)$$

$$\frac{C_l^4 C_\rho C_v C_\omega}{C_l^5 C_\rho C_\varepsilon} = 1, \quad (18)$$

$$\frac{C_l C_\rho C_\omega^2}{C_l^5 C_\rho C_\varepsilon} = 1. \quad (19)$$

Из (16) имеем $\frac{C_l C_\omega}{C_v} = 1$, что соответствует критерию подобия Струхала $Sh = \frac{l\omega}{v} = \text{const}$.

Из (17) имеем модифицированный критерий подобия Коши $Ca' = \frac{M}{I\varepsilon} = \text{const}$.

Из (18) следует модифицированный критерий подобия Фруда $Fr' = \frac{v\omega}{l\varepsilon} = \text{const}$.

При изучении нестационарного обтекания тел потоком газа определяющим критерием подобия физического моделирования при условии обеспечения геометрического подобия будет являться кинематический критерий подобия – число Струхала.

Таким образом, для исследования в гидроканале прямоугольного сечения нестационарного обтекания тел плоским потоком газа необходимым и достаточным условием аналогового и физического моделирования при безусловности осуществления геометрического подобия является равенство критериев подобия:

$$M^2 = Fr, \gamma = 2, Sh = \text{const.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградов Р.И., Жуковский М.И., Якубов И.Р.** Газогидравлическая аналогия и ее практическое приложение. – М.: Машиностроение, 1978. – 152 с.
2. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. **Бисплингхоф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л.** Аэроупругость. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958 – 799 с.

ANALOG SIMULATION PROBLEMS NONSTATIONARY GAS DYNAMICS

Kukin A.A., Trofimov V.V., Eycfeld O.A.

In this paper the possibility of using hydraulic analog simulation in the study of problems of unsteady gas dynamics is considered. The analysis of differential equations of unsteady motion of bodies in supersonic flow using the theory of similarity and dimensional analysis. Obtained similarity criteria that must be identical for both the real gas flow and the modeling of fluid flow. Using a hydraulic analog modeling for research in non-stationary gas dynamics provides valuable information necessary for understanding the physics of the processes and the construction of more sophisticated mathematical models.

Key words: analog modeling, the theory of similarity and dimensional analysis, non-stationary gas dynamics, similarity criteria.

REFERENCES

1. **Vinogradov R.I., Zhukovskiy M.I., Yakubov I.R.** Gazogidravlicheskaya analogiya i ee prakticheskoe prilozhenie [Gas hydraulic analogy and its practical application]. Moscow. Mashinostroenie, 1978. 152 p. (in Russian)
2. **Sedov L.I.** Metodih podobiya i razmernosti v mekhanike [Methods of similarity and dimensionality in mechanics]. Moscow. Nauka, 1981. 448 p. (in Russian)
3. **Bisplinghof R.L., Eshli Kh. Khalfmen R.L.** Aehrouprugostj [Aeroelasticity]. Moscow. Izd-vo inostr. lit., 1958. 799 p. (in Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кукин Анатолий Александрович, 1945 г.р., окончил Ташкентский политехнический институт (1968), старший преподаватель кафедры авиастроения Ташкентского государственного технического университета (Узбекистан), автор более 25 научных работ, область интересов: аэродинамика, динамика полета летательных аппаратов, электронный адрес: aerokukin@mail.ru.

Трофимов Владимир Владимирович, 1946 г.р., окончил Ташкентский политехнический институт (1968), кандидат технических наук, доцент кафедры аэродинамики, конструкции

и прочности летательных аппаратов МГТУ ГА, автор более 40 научных работ, область интересов: аэродинамика, динамика полета летательных аппаратов, электронный адрес: wwt1946@rambler.ru.

Эйфельд Ольга Александровна, окончила Ташкентский государственный авиационный институт (2005), ведущий инженер Центральной геологическо-геофизической экспедиции (Узбекистан), автор более 9 научных работ, область интересов: аэродинамика, динамика полета летательных аппаратов, электронный адрес: olga-ux1@rambler.ru.