УДК 629.7:519.6:531:533

ОБ ОДНОЙ ИЗ ПРИЧИН ПОЛУЧЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ В МЕХАНИКЕ

М.С. КУБЛАНОВ

В статье дается обзор случаев проявления жесткости, приводящих к получению неадекватных результатов на математических моделях механики. Делается попытка обобщить взгляд на это явление, как для динамики твердого тела, так и для сплошной среды. Предлагается формулировка основных проявлений жесткости механических систем, основной причины получения неустойчивых решений и дается рекомендация по разработке устойчивых методов вычисления.

Ключевые слова: математическое моделирование, механика твердого тела, механика сплошной среды, устойчивость, методы вычисления, жесткие системы.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время появилось много работ в различных областях механики, обладающих общим недостатком: попыткой формального применения пакетов программ, реализующих те или иные вычислительные методы. При таком подходе часто игнорируется такой обязательный этап проверки применимости математической модели, как проверка ее адекватности в исследуемой области. Нельзя забывать, что любой пакет программ представляет собой, по сути, конкретную математическую модель (ММ), разработанную для решения определенной исследовательской задачи, которая может оказаться весьма далекой в своих особенностях от нужд потребителя. В таком случае получаемые результаты могут оказаться весьма далекими от реального поведения исследуемого объекта. В данной статье преследуется цель собрать воедино некоторые причины появления "странных" решений разнообразных задач механики и объяснить их появление с физической точки зрения.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В теории математического моделирования есть несколько незыблемых правил, нарушение которых грозит получением неверных результатов и выводов. Эти правила в различном изложении, ориентированном на определенный уровень математической подготовки, приводятся в большинстве фундаментальных учебников и учебных пособий [1 – 5]. Здесь они излагаются в соответствии с целью данной статьи.

1. ММ, являющаяся одним из видов моделей, должна исполнять роль <u>заместителя</u> оригинала для определенных исследовательских <u>целей</u>.

2. ММ имеет право быть примененной только в той области и только в тех условиях, в которых она прошла проверку на <u>адекватность</u> отображения существенных свойств изучаемого оригинала.

3. ММ в своем математическом описании должна опираться на систему <u>согласованных</u> (непротиворечивых) предположений и допущений, обоснованных в своем применении к данной цели исследований с физической точки зрения.

Для обеспечения перечисленных правил ММ строится по определенной структуре и определенному алгоритму, которые тем или иным образом излагаются в прикладной учебной литературе [5–7]. Строгое следование таким структуре и алгоритму позволяет избежать ошибок в решении конкретных практических задач. Так, например, недопустимо применение регрессионных ММ вне области собранного статистического материала без учета физических свойств отображаемых зависимостей [8, 9].

Из этих правил следует вывод: для каждой отдельной задачи следует разрабатывать свою математическую модель. Это не значит, что каждый раз необходимо выводить новые законы природы или использовать новые методы вычисления. Но это значит, что все этапы разработки ММ необходимо пройти заново, проверив пригодность для данных исследовательских целей каждого элемента, заимствованного у других исследователей.

Последний вывод особенно важен при выборе применяемых в ММ методов вычислений, поскольку получение результатов с помощью ММ может быть проиллюстрировано рис. 1, подчеркивающим, что появление погрешностей возможно на всех стадиях.

Исходные данные ⇒ Методы вычисления ⇒ Решение

Рис. 1. Происхождение погрешностей математических моделей

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Сегодня ни для кого не секрет, что все динамические процессы в классической механике описываются вторым законом Ньютона – дифференциальным уравнением второго порядка. Это относится, как к простейшим объектам, так и к механике сплошной среды, т.е. к ММ, основанным, как на обыкновенных дифференциальных уравнениях, так и на уравнениях в частных производных. По этой причине ММ механических объектов имеют схожие предположения и допущения, математические описания и проблемы.

Так, например, редукция дифференциального уравнения второго порядка в систему двух уравнений первого порядка точна только в аналитической форме, т.е. только при описании непрерывными функциями. А при замене дифференциальных уравнений на разностные появляются не менее двух видов погрешностей – собственно аппроксимационные и в силу "запаздывания" значений разностных схем низших производных. Именно поэтому на рис. 1 методы вычисления обведены двойной волнистой рамкой, иллюстрирующей повышенный риск появления погрешностей.

Еще одной важной проблемой ММ механики является обеспечение законов сохранения массы и энергии, даже если они в ММ напрямую не используются. Их нарушение неизбежно приведет в процессе расчетов к неприемлемым погрешностям. Об этом писала еще О.А. Ладыженская [10].

Общность проблем построения ММ механических объектов позволяет автору рассуждать о них на примере достаточно простых динамических процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t), \tag{1}$$

здесь t – время; y – координата; m – масса; a – коэффициент диссипации; b – коэффициент упругости; F(t) – внешняя возмущающая сила.

Для таких уравнений существует аналитическое решение, свойства которого достаточно просто определяются математическими методами [5]. Однако анализ этих свойств возможен только в случае известных постоянных коэффициентов линейного уравнения (1).

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В условиях применения вычислительной техники все методы вычисления в ММ механики, как аналитические формулы, так и разностные, следует рассматривать как приближенные, дискретные. Поскольку любая модель есть заместитель оригинала, постольку исходные данные о нем, используемые в модели, обладают погрешностью [5]. Эта погрешность неизбежно приводит к погрешности результатов вычислительного эксперимента, даже если предположить, что расчеты проводятся абсолютно точно. Поэтому очень важно, чтобы в пределах погрешности исходных данных результаты менялись несущественно с точки зрения задачи исследования. Такое свойство метода, при котором малое изменение исходных данных не может вызвать больших изменений решения, называется устойчивостью.

Однако исходные данные об оригинале используются в ММ (рис. 1) по-разному. Поэтому и устойчивость конкретного вычислительного метода необходимо проверять отдельно: по коэффициентам, по слагаемым, по начальным и граничным условиям. Так, например, аналитическое решение y(t) для (1) устойчиво по начальным условиям, и по коэффициентам уравнения, если только вещественные части характеристических корней неположительны.

Свойство устойчивости особенно важно для методов, которым присущи итерационные, рекуррентные вычислительные процессы, например, для методов интегрирования дифференциальных уравнений.

В практике решения задач механики (как движения изолированных тел, так и сплошной среды) в уравнениях вида (1) необходимо рассматривать коэффициенты a и b, сложным образом зависящими от y и dy/dt. Поэтому при численном решении такого уравнения об устойчивости приходится судить лишь по "наблюдениям" за ходом решения. При этом к вопросу об устойчивости точного решения неразделимым образом примешивается вопрос об устойчивости метода вычисления уже неаналитического вида. Иными словами, на "точное" решение накладывается некоторое "паразитное" решение, которое можно трактовать как влияние добавка "плохого" вида во внешнее возмущение F(t).

ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ

Самый сложный случай неустойчивости такого решения наблюдается тогда, когда упомянутое "паразитное" решение само по себе неустойчиво. Такая ситуация называется "жесткой системой" (Stiff Equations).

В математической литературе [11 – 13] принято считать жесткими такие системы, решения которых содержат две составляющие: быстро затухающие колебания с большими производными и медленно затухающие колебания с малыми производными. Это свойство легко видеть на примере уравнения (1). Если m – мало, то с точностью до членов порядка m корни характеристического уравнения для (1) принимают вид:

$$\lambda_1 \approx -\frac{b}{m} + \frac{c}{b} + \frac{c^2}{b^3} m, \quad \lambda_2 \approx -\frac{c}{b} - \frac{c^2}{b^3} m,$$

и первое частное решение меняется быстро, а второе – медленно. В результате быстро затухающие колебания выпадают из поля зрения исследователей, и все внимание сосредоточивается на медленно затухающих процессах. Поэтому для получения достаточно правильного решения численными методами требовался чрезвычайно малый шаг интегрирования. Даже небольшое увеличение шага интегрирования приводит в жестких системах к взрывному увеличению погрешности.

В [14], считающимся основополагающим источником понятия жестких систем, предлагается считать таковыми уравнения, в которых коэффициент при высшей производной существенно меньше шага интегрирования, т.е. m мало. По мнению автора, это определение жесткой системы наиболее фундаментально, что перекликается со специальным названием: уравнение (1) с малым m называется сингулярно возмущенным [23].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

1. С помощью Системы математического моделирования динамики полета летательных аппаратов (СММ ДП ЛА), разработанной на кафедре АКПЛА МГТУ ГА [Система математического моделирования динамики полета воздушных судов на базе персональных ЭВМ: Отчет о НИР (промежуточный) / Моск. ин-т инженеров гражд. авиации (МИИГА); Руководитель Ципенко В.Г. Ответственный исполнитель М.С. Кубланов. – № ГР 01910018045; Инв. № 02910024435 – М., 1991. – 34 с.], [15] были проведены расчеты движения самолета по взлетно-посадочной полосе с использованием некоторых наиболее распространенных нисходящих разностных методов [16].

Результаты оказались весьма красноречивыми: ни один из методов даже с весьма малым шагом интегрирования 0,05 с не дал устойчивого решения [17]. Расчеты проводились на примере реального взлета самолета в ординарных условиях, но за время до 0,4 с от старта полученные решения для передней стойки шасси самолета выходили за разумные границы. О потере контакта колес с ВПП можно судить по обнулению обжатия пневматиков, а о разрушении колес – по обжатию, превосходящему размеры пневматиков.

2. Другой пример явления жесткости дифференциальных уравнений встретился при отыскании оптимальных траекторий полета самолета [17, 18]. Дискретные вычислительные методы решения таких задач дают управления в виде скачкообразно изменяющейся функции [19].

Проблема оказывается такая же, как при моделировании работы шасси с учетом нагруженности от планера, т.е. система уравнений жесткая. Этот же факт отмечался в некоторых задачах оптимального управления и в работе [11].

3. Еще один случай жестких систем встретился при построении ММ движения вертолета с грузом на внешней подвеске. Для такой сложной задачи трех тел оказалось необходимым построить замыкание системы уравнений на основе итерационного отыскания такого значения силы натяжения троса подвески, чтобы выполнялось условие постоянства его длины [20]. Несмотря на то, что в этой ММ не пришлось бороться с неустойчивостью именно разностных схем решения дифференциальных уравнений, в целом такая задача может быть классифицирована как жесткая система.

ПРИЧИНА ЯВЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ СИСТЕМ

В последнем примере предыдущего раздела весьма наглядно проявляется физическая сущность явления жесткости – наличие в решениях, близких к стационарным, быстро и медленно протекающих процессов. Жесткость проявляется из-за невозможности таким образом дискретизировать систему уравнений (для численного решения на современных дискретных вычислительных машинах), чтобы отразить и те, и другие процессы. В каком-либо из них ошибка накапливается (проявляется неустойчивость) и решение задачи перестает быть адекватным поведению оригинала. Иными словами, численные процедуры неизбежно приводят к нарушению самих уравнений, которые они призваны решать.

Развитие этой мысли приводит к осознанию необходимости стремиться при разработке ММ так выстраивать численные процедуры, чтобы они были как можно более устойчивыми и не нарушали уравнения, положенные в основу ММ.

ПРИЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

В [13] дается обзор некоторых разностных методов для решения жестких нелинейных дифференциальных систем. Их можно подразделить на два класса: итерационные и безитерационные. Первые из них, конечно, более трудоемкие, чем вторые. Однако, например, оригинальный безитерационный метод Розенброка для очень жестких систем был проверен в СММ

ДП ЛА на том же примере нормального взлета самолета и потерял устойчивость на третьей секунде от начала движения [17]. По-видимому, уровень жесткости рассматриваемой системы уравнений чрезвычайно высок.

В работе [Разработка обобщенной модели шасси самолетов ГА и проведение контрольно-вычислительных экспериментов базы входных данных перспективных ВС. Оценка влияния упругости конструкции на аэродинамические характеристики самолетов ГА в крейсерском режиме полета. Решение прикладных задач особых случаев взлета и посадки существующих ВС с целью совершенствования РЛЭ: Отчет о НИР (промежуточный) / Моск. ин-т инженеров гражд. авиации (МИИГА); Руководитель Ципенко В.Г. – № ГР 01860022933; Инв. № 02870068210 – М., 1987. – 188 с.] было предложено провести декомпозицию рассматриваемой сложной механической системы: общую систему дифференциальных уравнений движения планера и стоек шасси разбить на части, интегрируемые отдельно.

Смысл предлагавшегося приема заключается в том, чтобы жесткие уравнения в общей модели воспроизвести предельно точно, не пренебрегая никакими членами. Для этого достаточно рассматривать эти уравнения как уравнения Даламбера, в которых инерционные члены с производными второго порядка входят наравне с остальными силами, скорее даже лишь как поправки, которые надо каким-то образом вычислить. При таком подходе нет необходимости решать именно дифференциальные уравнения второго порядка, что неизбежно влечет за собой паразитные колебания в численном решении. Нет надобности решать и дифференциальные уравнения первого порядка (при пренебрежении инерционными членами), что тоже влечет за собой неустойчивость решений для такого ответственного момента, как первое касание земли при посадке.

Даламберовы инерционные члены можно вычислить с помощью любой восходящей разностной схемы численного интегрирования на каждом шаге, используя уже известные значения обобщенных координат подвижной части шасси на предыдущих шагах. Например, может быть построена восходящая разностная схема Эйлера первого порядка (интерполяция назад) для производной первого порядка такого вида:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}; \quad y_n = y_{n-1} + f(y_n, t_n)\cdot(t_n - t_{n-1}), \tag{2}$$

где y_n – искомое значение координаты на текущем шаге, y_{n-1} – известное значение координаты на предыдущем шаге. При такой аппроксимации производных вопрос о необходимой точности выполнения уравнения в текущей расчетной точке t_n решается с помощью итерационного подбора y_n. В успешности такого приема безусловно важную роль играет точное соблюдение законов механики в исходной (начальной) точке траектории.

Применение восходящих разностных схем для борьбы с жесткостью дифференциальных уравнений отмечалось и авторами [11 – 13], как наиболее удачное. Причем вышеприведенная трактовка автора носит весьма универсальный характер для жестких систем различного вида: необходимо стремиться к точному соблюдению уравнений в текущей расчетной точке с помощью итераций.

На рис. 2 представлены результаты расчета предложенным методом того же случая взлета самолета. Как и ранее, результаты получены с помощью СММ ДП ЛА. Следует отметить, что интегрирование уравнений динамики планера даже с постоянным шагом Δt = 0,13 с по методу Эйлера с пересчетом обеспечивает при использовании восходящей разностной схемы Эйлера с итерациями безусловно устойчивое решение вплоть до момента отрыва самолета от ВПП.

Кроме того, результат, полученный предложенным методом, представляется более физичным хотя бы потому, что воспроизводит уменьшение обжатия носовой стойки шасси после отпускания тормозов и перевода двигателей на взлетный режим, а также затухание начальных колебаний, что и свидетельствует об устойчивости метода.

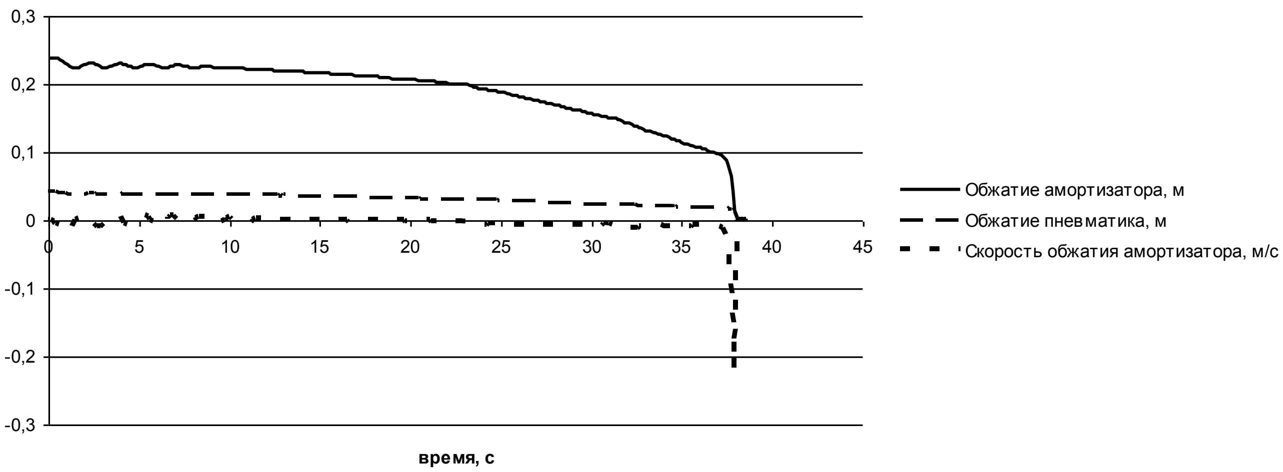

Рис. 2. Параметры динамики стойки шасси, полученные предложенным методом

Более поздние исследования показали, что с помощью СММ ДП ЛА возможно получение весьма достоверных данных о поведении самолета на взлетно-посадочной полосе и в горизонтальной плоскости [15].

Также удачно проявил себя предложенный метод и в задачах оптимизации траектории полета – "релейность" исчезла даже в квазиоптимальных случаях.

ВЫВОДЫ

1. Жесткость механических систем (как системы твердых тел, так и сплошной среды) проявляется в получении неустойчивых и расходящихся решений уравнений динамики.

2. Основной причиной явления жесткости в механике является нарушение уравнений ММ (и, может быть, других уравнений сохранения, даже явно не используемых в ММ) за счет дискретизации непрерывных процессов численными методами.

3. Для преодоления явления жесткости при разработке ММ механических систем рекомендуется так выбирать вычислительные методы, чтобы не нарушать в текущей расчетной точке совокупность законов механики. В частности, это можно осуществлять с помощью итерационных методов решения уравнений (в том числе и уравнений для любых дискретных методов в механике сплошной среды), а для дифференциальных уравнений – с помощью восходящих разностных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дыхненко Л.М. и др. Основы моделирования сложных систем: Учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа, 1981. – 359 с.

2. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.

3. Ибрагимов И.А. и др. Моделирование систем: Учеб. пособие. – Баку: Азинефтехим, 1989. – 83 с.

4. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматгиз, 1994. – 192 с.

5. Кубланов М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. В 2-х ч. Изд. 4.: Учеб. пособие. М.: МГТУ ГА, 2013. С. 108, 124.

6. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. 3-е изд., перераб. и доп.: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2001. – 343 с.

7. Глухов В.В. Математическое моделирование процессов и систем: Учеб. пособие. – М.: МГТУ ГА, 1997. – 96 с.

8. Вопросы кибернетики. Проблемы создания и применения математических моделей в авиации / под ред. С.М. Белоцерковского – М.: Кибернетика, 1983. – 168 с.

9. Кубланов М.С. Методика построения многомерных регрессионных математических моделей // Научный вестник МГТУ ГА. 2010. № 154. С. 149 – 151.

10. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1970. – 288 с.

11. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.

12. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие для вузов. – М.: МФТИ, 1994. – 584 с.

13. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование (М.). – 1995. – Т. 7, № 5. С. 8 – 11.

14. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1952. – vol. 38(3). – pp. 235 – 243.

15. Кубланов М.С. Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке: монография. – М.: РИО МГТУ ГА, 2013. – 270 с.

16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

17. Кубланов М.С. Разработка теории и методов повышения уровня адекватности математических моделей на основе идентификации параметров движения для обеспечения летной эксплуатации самолетов гражданской авиации: Дисс. на соискание уч. степ. докт. техн. наук. – М., 2000. – 429 с.

18. Кубланов М.С. Выбор оптимальных режимов набора высоты и снижения самолета с учетом ограничений: Дисс. на соискание уч. степ. канд. техн. наук. – М., 1988. – 168 с.

19. Кубланов М.С. "Релейность" численного решения оптимизационных задач динамики полета в отдельных конкретных условиях эксплуатации // Современные научно-технические проблемы гражданской авиации: Тезисы докладов Международной научно-технической конференции. – М., 1996. С. 31.

20. Козловский В.Б., Кубланов М.С. Математическая модель полета вертолета с грузом на внешней подвеске // Научный вестник МГТУ ГА. – 2004. – № 72. С. 5 – 9.

ON ONE OF THE REASONS OF THE INSTABILITY OF THE SOLUTIONS IN APPLYING COMPUTATIONAL METHODS IN MECHANICS

Kublanov M.S.

The article provides an overview of cases of stiffness, leading to inadequate results of mathematical models of mechanics. An attempt is made to generalize look at this phenomenon for body dynamics, and for the continuum mechanics. Proposed wording of display of stiffness properties of the mechanical systems, the primary cause of unstable solutions and makes recommendations for the development of sustainable calculation metods.

Key words: mathematical modeling, mechanics of a body, continuum mechanics, stability, calculation methods, stiff systems.

REFERENCES

1. Dihkhnenko L.M. i dr. Osnovih modelirovaniya slozhnihkh sistem [Basics of modeling of complex systems]: Uchebnoe posobie dlya vtuzov. Kiev: Vitha shkola, 1981. 359 p. (In Russian)

2. Lebedev A.N. Modelirovanie v nauchno-tekhnicheskikh issledovaniyakh [Modeling in scientific and technical research] Moscow. Radio i svyazj, 1989. 224 p. (In Russian)

3. Ibragimov I.A. i dr. Modelirovanie sistem [Modelling of systems]: Uchebnoe posobie. Baku: Azineftekhim, 1989. 83 p. (In Russian)

4. Mihshkis A.D. Ehlementih teorii matematicheskikh modeleyj [Elements of the theory of mathematical models] Moscow. Fizmatgiz, 1994. 192 p. (In Russian)

5. Kublanov M.S. Matematicheskoe modelirovanie. Metodologiya i metodih razrabotki matematicheskikh modeleyj mekhanicheskikh sistem i processov [Mathematical modeling. Methodology and methods of development of mathematical models of mechanical systems and processes] V dvukh chastyakh. Izdanie chetvertoe: Ucheb. posobie. Moscow. MGTU GA, 2013. 108 p., 124 p. (In Russian)

6. Sovetov B.Ya., Yakovlev S.A. Modelirovanie sistem [Modelling of systems] 3-e izd., pererab. i dop. Uchebnik dlya vuzov. Moscow. Vihsshaya shkola, 2001. 343 p. (In Russian)

7. Glukhov V.V. Matematicheskoe modelirovanie processov i sistem [Mathematical modeling of processes and systems]: ucheb. posobie. Moscow. MGTU GA, 1997. 96 p. (In Russian)

8. Voprosih kibernetiki. Problemih sozdaniya i primeneniya matematicheskikh modeleyj v aviacii [Problems of Cybernetics. Problems of creation and use of mathematical models in aviation] Pod red. S.M. Belocerkovskogo Moscow. Kibernetika, 1983. 168 p. (In Russian)

9. Kublanov M.S. Metodika postroeniya mnogomernihkh regressionnihkh matematicheskikh modeleyj [The technique of construction of multidimensional regression mathematical models. Scientific Bulletin MSTUCA] Moscow. Nauchnihyj Vestnik MGTU GA. 2010. № 154. PP. 149 – 151. (In Russian)

10. Ladihzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosih dinamiki vyazkoyj neszhimaemoyj zhidkosti [The mathematical theory of viscous incompressible fluid] Moscow. Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit. 1970. 288 p. (In Russian)

11. Rakitskiyj Yu.V., Ustinov S.M., Chernoruckiyj I.G. Chislennihe metodih resheniya zhestkikh sistem [Numerical methods for solving stiff systems] Moscow. Nauka, 1979. 208 p. (In Russian)

12. Fedorenko R.P. Vvedenie v vihchisliteljnuyu fiziku [Introduction to Computational Physics]: Uchebnoe posobie dlya vuzov. Moscow. MFTI, 1994. 584 p. (In Russian)

13. Kalitkin N.N. Chislennihe metodih resheniya zhestkikh sistem [Numerical methods for solving stiff systems] Matematicheskoe modelirovanie (M.). 1995. T. 7, № 5. PP. 8 – 11. (In Russian)

14. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. 1952. vol. 38(3). PP. 235 – 243.

15. Kublanov M.S. Matematicheskoe modelirovanie zadach letnoyj ehkspluatacii vozdushnihkh sudov na vzlete i posadke [Mathematical modeling of problems of flight operation of the aircraft during takeoff and landing]: monografiya. Moscow: RIO MGTU GA, 2013. 270 p. (In Russian)

16. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnihkh rabotnikov i inzhenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers] Moscow. Nauka, 1973. 832 p. (In Russian)

17. Kublanov M.S. Razrabotka teorii i metodov povihsheniya urovnya adekvatnosti matematicheskikh modeleyj na osnove identifikacii parametrov dvizheniya dlya obespecheniya letnoyj ehkspluatacii samoletov grazhdanskoyj aviacii [The development of theory and methods for improving the adequacy of mathematical models, based on the identification parameters of motion for flight operation of civil aircraft. Diss]: Diss. na soiskanie uch. step. dokt. tekhn. nauk Moscow. 2000. 429 p. (In Russian)

18. Kublanov M.S. Vihbor optimaljnihkh rezhimov nabora vihsotih i snizheniya samoleta s uchetom ogranicheniyj [Selection of the optimal mode of climb and descent of the aircraft subject to the restrictions. Diss]: Diss. na soiskanie uch. step. kand. tekhn. nauk Moscow. 1988. 168 p. (In Russian)

19. Kublanov M.S. "Releyjnostj" chislennogo resheniya optimizacionnihkh zadach dinamiki poleta v otdeljnihkh konkretnihkh usloviyakh ehkspluatacii ["Relay" the numerical solution of optimization problems of flight dynamics in some specific conditions. Modern scientific and technical problems of civil aviation: Abstracts of the International Scientific and Technical Conference] Sovremennihe nauchno-tekhnicheskie problemih grazhdanskoyj aviacii: Tezisih dokladov Mezhdunarodnoyj nauchno-tekhnicheskoyj konferencii. Moscow. 1996. P. 31. (In Russian)

20. Kozlovskiyj V.B., Kublanov M.S. Matematicheskaya modelj poleta vertoleta s gruzom na vneshneyj podves-ke [Mathematical model of helicopter flight with external load. Scientific Bulletin MSTUCA] Moscow. Nauchnihyj vestnik MGTU GA. Ser. Aehromekhanika i prochnostj. 2004. № 72. PP. 5 – 9. (In Russian)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кубланов Михаил Семенович, 1945 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1968), доктор технических наук, профессор кафедры аэродинамики, конструкции и прочности летательных аппаратов МГТУ ГА, автор более 130 научных работ, область научных интересов – механика, математические методы моделирования, электронный адрес: akpla@yandex.ru.