УДК 519.46

О ЗАДАЧЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ТОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А.М. ЛУКАЦКИЙ

Предложена конструкция продолжения диффеоморфизма 2-тора до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма полнотория. Конструкция иллюстрируется на примере продолжения диффеоморфизмов действия группы $SL(2,\mathrm{R})$ на торе. Полученные продолжения используются для построения примеров кинематического динамо в полнотории. Для случая *n*-мерной сферы предлагается обобщение ранее полученных результатов.

Ключевые слова: диффеоморфизм, граница, продолжение, тор, полноторие, аналитическое продолжение, бездивергентное векторное поле, сохраняющий элемент объема диффеоморфизм, кинематическое динамо.

Введение

Пусть задано полноторие (прямое произведение окружности на диск) $P = S^1 \times D^2$. Предполагается, что полноторие P снабжено координатами окружности и диска

$$\{\theta, x, y \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ x^2 + y^2 \le 1\}. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу продолжения диффеоморфизма границы полнотория (тора T^2) внутрь до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма полнотория. Для произвольного гладкого риманова многообразия с краем задача продолжения произвольного диффеоморфизма края до сохраняющего элемент объема диффеоморфизма всего многообразия сформулирована В.И. Арнольдом в [1], задача 1988-20. Там же предложено разобрать ее на примере полнотория. Для случая *n*-мерной сферы эта задача разобрана в [2; 3].

1. Конструкция продолжения диффеоморфизмов тора

Следуя [3], рассмотрим однородные гармонические многочлены степени m на диске. Согласно [4], они образуют двумерное пространство с базисом

$$\{p_m = \frac{1}{2}((x+iy)^m + (x-iy)^m), q_m = \frac{1}{2i}((x+iy)^m - (x+iy)^m)\}. \tag{2}$$

Заметим, что в полярных координатах $\{\rho, \varphi\}$ на диске имеем

$$\{p_m = \rho\cos(m\phi), q_m = \rho\sin(m\phi)\}. \tag{3}$$

Введем векторные поля на диске

$$\begin{gathered}\{e_m = \nabla_{S^1} p_m,\ f_m = \nabla_{S^1} q_m, n = (x, y),\ r^2 = x^2 + y^2 = (n, n),\\ h = (-y, x) = \partial_\phi, g = \partial_\theta\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Заметим, что для однородного гармонического многочлена p степени m на диске имеем:

$$\begin{gathered}\nabla_{S^1} p = \nabla p - mp\, n;\\ \operatorname{div}(\nabla_{S^1} p) = -m(m+2)\, p,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\nabla p, \operatorname{div}$ являются градиентом и дивергенцией в стандартных координатах (x,y) на диске. Векторные поля

$$\{h, e_m, f_m \mid m = 1, 2, \ldots\} \tag{6}$$

образуют полную ортогональную систему на окружности с координатой φ. Векторное поле w на торе удобно представить в виде

$$w = a_0(\theta)h + \sum_m (a_m(\theta)e_m + b_m(\theta) f_m) + (c_0(\theta) + \sum_m (c_m(\theta) p_m + d_m(\theta) q_m))g. \quad (7)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} w &= \sum_m \{-m(m+2)(a_m(\theta) p_m + b_m(\theta) q_m)\} + c_0'(\theta) + \sum_m \{c_m'(\theta) p_m + d_m'(\theta) q_m)\} = \\ &= c_0'(\theta) + \sum_m \{(-m(m+2)a_m(\theta) + c_m'(\theta)) p_m + (-m(m+2)b_m(\theta) + d_m'(\theta))q_m\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем векторное поле, обращающееся в ноль на границе

$$u = (r^2 - 1)\{\sum_m (s_m(\theta)\nabla p_m + t_m(\theta)\nabla q_m) + \alpha c_0(\theta) g + \beta c_0'(\theta) n\}.$$

Покажем, что добавлением такого поля к w можно получить бездивергентное векторное поле.

Имеем

$$\operatorname{div} u = \sum_m 2m(s_m(\theta) p_m + t_m(\theta) q_m) + \alpha c_0'(\theta)(r^2 - 1) + \beta c_0'(\theta)(4r^2 - 2)\}. \quad (9)$$

Выберем коэффициенты в формуле для u из условия $\operatorname{div}(w+u) = 0$. Имеем:

$$2m s_m(\theta) - m(m+2)a_m(\theta) + c_m'(\theta);$$
$$2m t_m(\theta) - m(m+2)b_m(\theta) + d_m'(\theta);$$
$$\alpha + 4\beta = 0, 1 - \alpha - 2\beta = 0.$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} s_m(\theta) &= \frac{m+2}{2} a_m(\theta) - \frac{1}{2m} c_m'(\theta); \\ t_m(\theta) &= \frac{m+2}{2} b_m(\theta) - \frac{1}{2m} d_m'(\theta); \\ \alpha &= 2, \beta = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получена

Теорема 1. Гладкое (аналитическое) векторное поле на торе продолжается до гладкого (аналитического) векторного поля на полнотории.

Доказательство. Произвольное гладкое (аналитическое) векторное поле w на торе представимо в виде (7). Из свойств рядов Фурье [5] следует, что для гладкого (аналитического) векторного поля на торе коэффициенты $\{a_m(\theta), b_m(\theta), c_m(\theta), d_m(\theta)\}$ убывают быстрее любой степенной функции $\frac{1}{m^k}$, где $k \in \mathrm{N}$ (как некоторая показательная функция a^m, где $0 < a < 1$). По векторному полю w построим векторное поле u по формулам (10). Из формул (10) следует, что порядок убывания коэффициентов векторного поля u тот же, что и для w, а значит оно гладкое (аналитическое). Тогда векторное поле w+u на торе совпадает с w на торе и имеет нулевую дивергенцию на полнотории. Теорема доказана.

Следствие 1. Гладкий (аналитический) диффеоморфизм тора, изотопный тождественному, продолжается до гладкого (аналитического) диффеоморфизма полнотирия, сохраняющего элемент объема.

Доказательство. Здесь используется теорема о разложении диффеоморфизма, изотопного тождественному в произведение потоков векторных полей. Для гладкого случая это следует из теоремы Терстона о простоте связной компонеты единицы группы диффеоморфизмов компактного многообразия [6], для аналитического - из теоремы М. Эрмана [7] о простоте связной компоненты единицы группы аналитических диффеоморфизмов тора.

2. Некоторые обобщения конструкции продолжения диффеоморфизмов сферы

Вернемся к случаю сферы $S^{d-1} \subset \mathrm{R}^d$, рассмотренному в [3]. Для однородного гармонического многочлена p степени m на сфере имеем:

$$\begin{aligned} &w = \nabla_{S^{d-1}} p = \nabla p - mp\, n; \\ &\operatorname{div} w = -m(m+d)p, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\nabla p, \operatorname{div}$ являются градиентом и дивергенцией в стандартных координатах $(x_1,...,x_d)$ в R^d. Здесь $n = (x_1,...,x_d), r^2 = (n,n) = x_1^2 + ... + x_d^2$.

В [3] показано, что если ввести векторное поле

$$u = \frac{(r^2 - 1)}{2}(d + m)\nabla p, \tag{12}$$

обращающееся в ноль на сфере, то векторное поле $w + u$ является бездивергентным продолжением векторного поля w со сферы внутрь шара. Заметим теперь, что для однородного многочлена степени m имеем $mp = n(p)$. Тогда можно переписать формулу (12) для u в следующем виде

$$u = \frac{1}{2}(d\nabla p + \nabla(n(p))\ . \tag{13}$$

Преимущество формулы (13) состоит в том, что она не зависит от степени многочлена p. Поскольку любая функция на сфере разлагается в ряд по однородным, гармоническим в шаре многочленам ([4]), то получаем формулу для бездивергентного продолжения векторных полей градиентной серии ([3]) на сфере внутрь шара.

Пусть задана гармоническая в шаре функция f и

$$w = \nabla_{S^{d-1}} f = \nabla f - n(f)n\ . \tag{14}$$

Введем векторное поле

$$u = \frac{(r^2-1)}{2}(d\nabla f + \nabla(n(f)). \tag{15}$$

Резюмируя проведенные рассуждения, получаем

Предложение 1. Векторное поле w (14) на сфере, где f – гармоническая в шаре функция, имеет бездивергентное продолжение внутрь шара $w + u$, где u дается формулой (15).

3. Приложения конструкции продолжения диффеоморфизмов

Пример 1. Рассмотрим векторные поля

$$\{g = \partial_\theta, u = \sin(\theta)g, v = \cos(\theta)g\},$$

они порождают подалгебру $sl(2,\mathrm{R})$. Бездивергентными продолжениями этих векторных полей ($\operatorname{div} g = 0$) являются:

$$\bar{u} = u + (r^2 - 1)(2\sin(\theta)g - \frac{1}{2}\cos(\theta)n) =$$

$$= r^2(2\sin(\theta)g - \frac{1}{2}\cos(\theta)n) - \sin(\theta)g + \frac{1}{2}\cos(\theta)n;$$

$$\bar{v} = v + (r^2 - 1)(2\cos(\theta)g + \frac{1}{2}\sin(\theta)n) =$$

$$= r^2(2\cos(\theta)g + \frac{1}{2}\sin(\theta)n) - \cos(\theta)g - \frac{1}{2}\sin(\theta)n.$$

Заметим, что на оси полнотория ($x = y = 0$) имеем $\bar{u} = -\sin(\theta)g, \bar{v} = -\cos(\theta)g$, в частности, это инвариантное множество, на которой бездивергентные продолжения также порождают подалгебру $sl(2,\mathrm{R})$. При этом задаваемые действия группы $SL(2,\mathrm{R})$ на торе и оси полнотория разнонаправлены. При этом непосредственно проверяется, что на всем полнотории векторные поля $g, \bar{u}, \bar{v}$ порождают бесконечномерную алгебру Ли.

Обозначим

$$A = g + \bar{v} \ , \tag{16}$$

на оси полнотория имеем $[A, \bar{u}] = A$. Введем элемент потока векторного поля A $F = \exp(\bar{u})$.

Тогда из свойств действия диффеоморфизма на векторное поле на оси полнотория имеем

$$F_*^{\,n}(A) = \exp(n)A\,. \tag{17}$$

Здесь имеет место эффект, аналогичный кинематическому динамо, но в норме C^0.

Напомним, что эффект кинематического динамо [8] на компактном римановом многообразии M заключается в существовании такого сохраняющего элемент объема M диффеоморфизма f и бездивергентного векторного поля v, что

$$\left\| f_*^n(v) \right\|_{L^2} \ge a^n \left\| v \right\|_{L^2}, \text{где } a > 1\,. \tag{18}$$

Векторное поле $\bar{u}$ имеет на оси полнотория особые точки $a = (0,0,0), b = (\pi,0,0)$, линеаризация $\bar{u}$ в этих точках задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -\cos(\theta), & 0, & 0 \\ 0 & ,\dfrac{\cos(\theta)}{2}, & 0 \\ 0 & ,0 & ,\dfrac{\cos(\theta)}{2} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа линеаризации $\bar{u}$ в точке $b: (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Тогда, согласно [8], имеет место эффект кинематического динамо для действия потока векторного поля $\bar{u}$ на бездивергентное векторное поле, имеющее направление, соответствующее собственному числу 1 линеаризации, в точке b, т.е. $(1,0,0)$. Заметим, что $A|b =: (2,0,0)$ и может служить таким бездивергентным векторным полем. Таким образом, экспоненциальному растяжению (17) вдоль оси полнотория векторного поля A под действием диффеоморфизма F соответствует эффект кинематического динамо (18) в полнотории.

Выводы

Предложена конструкция явного продолжения векторного поля на торе до бездивиргентного векторного поля на полнотории. Как следствие, установлено, что гладкий (аналитический) диффеоморфизм тора продолжается до гладкого (аналитического) диффеоморфизма полнотория. Конструкция продолжения диффеоморфизмов тора позволяет естественным образом построить примеры кинематического динамо на полнотории. Это обусловлено тем, что на границе полнотория – торе действует полная группа диффеоморфизмов тора, и с ее помощью естественным образом получаются примеры экспоненциального растяжения векторного поля при действии потоком другого векторного поля. Бездивергентные продолжения таких векторных полей внутрь полнотория могут давать примеры кинематического динамо в полнотории. Здесь важен явный характер конструкции бездивергентного продолжения векторных полей, поскольку становится возможным получить в явном виде бездивиргентные продолжения для элементов алгебры Ли $sl(2,\mathrm{R})$ и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Задачи Арнольда. - М.: ФАЗИС, 2000. - С. 71.
2. **Лукацкий А.М.** О задаче продролжения диффеоморфизмов // Анализ и особенности (Арнольд-75): тезисы междунар. конф. - М.: МИ РАН, 2012. - С. 77-78.
3. **Lukatsky A.M**. A Construction of Diffeomorphism Extension and its Applications // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2014. - № 204.
4. **Виленкин Н.Я.** Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука, 1965.
5. **Жук В.В., Натансон Г.И**. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. - Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983. - С. 188.
6. **Thurston W.** Folliations and Groups of Diffeomorphisms. Bul. A.M.S., 1975, Vol. 80, p.p. 304-307.
7. **Hermam M.R.** Sur le groupe des diffeomorphismes R-analitiques du tore. Diff. Top. and Geom. (Proc. Colloq. Dijon, 1974) (Lect. Notes. Math., 484) Springer, Berlin, 1975, p.p. 36-42.
8. **Арнольд В.И., Хесин Б.А.** Топологические методы в гидродинамике. - М.: МЦНМО, 2007.

ON THE PROBLEM OF TORE DIFFEOMORPHISM EXTENSION AND ITS APPLICATIONS

Lukatsky A.M.

The construction of the extensions of a 2-torus diffeomorphism up to volume preserving diffeomorphism of solid tori is proposed. The construction is illustrated on the example of extension of diffeomorphism of $SL(2,\mathrm{R})$ action on the torus. These extensions are used for the construction of kinematic dynamo examples onto solid torus. For the case of *n*-sphere a generation of results obtained before is proposed.

Key words: diffeomorphism, boundary, extension, torus, solid torus, analytic extension, free-divergence vector field, volume preserving diffeomorphism, kinematic dynamo.

Сведения об авторе

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института энергетических исследований (ИНЭИ) РАН, автор более 100 научных работ, область научных интересов – бесконечномерные группы Ли в применении к уравнениям математической физики.