УДК 517.988.6+517.988.521

МЕРА НЕКОМПАКТНОСТИ β В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Н.А. ЕРЗАКОВА

Введены геометрические характеристики для произвольного правильного пространства, каковыми являются, в частности, пространства Лебега и Лоренца. Для произвольных подмножеств пространства Лоренца получены неравенства, связывающие меры некомпактности β и ν. В случае компактных по мере множеств доказывается пропорциональность β и ν. Выделен класс уплотняющих операторов, действующих в пространствах Лоренца, относительно β среди частично аддитивных операторов и, в частности, линейных операторов.

Ключевые слова: мера некомпактности, уплотняющий оператор, пространство Лоренца, пространство Лебега, правильное пространство, частично аддитивный оператор.

Введение

Математические модели, описывающие различные явления естествознания, часто имеют вид уравнения, разрешимость которого равносильна существованию неподвижной точки у соответствующего оператора. Поэтому теория неподвижных точек имеет широкое приложение в серьезных научных исследованиях практически во всех сферах деятельности человека.

Теория мер некомпактности и уплотняющих операторов позволяет, в частности, доказать существование неподвижных точек дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах, функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа, интегральных уравнений, а также некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными. Основные результаты и главные прикладные аспекты теории изложены в обзорах [1; 2].

Результаты данной работы имеют тесную связь с предшествующими работами автора [5 - 11]. Цель данной работы – перенести утверждения с пространств Лебега на “родственные” им пространства Лоренца и получить результаты обобщающего характера для произвольного правильного пространства.

1. Постановка и формализация задачи

Пусть Ω – подмножество конечномерного пространства, причем $\mu(\Omega)<\infty$, μ – непрерывная мера, т.е. всякое подмножество Ω можно разбить на два подмножества равной меры.

Пусть $\lambda(u,h)=\mu\{s\in\Omega:|u(s)|\geq h\}$ [3]. Рассматриваются пространства Лоренца $\Lambda_p = \Lambda_p(\Omega)$ $(1\leq p<\infty)$ с нормой $\|u\|_{\Lambda_p} = \int\limits_0^\infty \lambda^{1/p}(u,h)dh$.

Пусть E – банахово пространство, $B(u_0,r)=\{u\in E:\|u-u_0\|\leq r\}$ обозначает шар в E с центром в u_0 и радиуса r, $\overline{B}=\{x\in E:\|x\|\leq 1\}$, θ – нулевой элемент E.

Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества произвольного ограниченного множества U банахова пространства E называется инфимум всех $\varepsilon>0$, при которых U имеет в E конечную ε-сеть.

Мера некомпактности $\beta(U)=\beta_E(U)$ подмножества U банахова пространства E – это точная нижняя грань таких $r>0$, что всякое подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше r, конечно.

Другими словами, мера некомпактности $\beta(U)=\beta_E(U)$ подмножества U банахова пространства E – это точная верхняя грань таких $r>0$, что существует бесконечное подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше r.

Пусть ϕ обозначает ниже χ или β.

МНК (мера некомпактности) ϕ обладает рядом замечательных свойств [2, 1.1.4], среди которых правильность $\phi(U)=0$ тогда и только тогда, когда U относительно компактно; полуоднородность $\phi(tU)=|t|\phi(U)$ (t-число); полуаддитивность $\phi(U_1\cup U_2)=\max\ \{\phi(U_1),\phi(U_2)\}$; инвариантность относительно сдвигов $\phi(U+b)=\phi(U)$ ($b\in E$); алгебраическая полуаддитивность $\phi(U_1+U_2)\le\phi(U_1)+\phi(U_2)$; липшицевость ϕ по метрике Хаусдорфа ρ ($|\phi_{\Lambda_p}(U)-\phi_{\Lambda_p}(U_1)|<2\rho(U,U_1)$, где $\rho(U,U_1)=\inf\{\varepsilon>0:U_1\subset U+\varepsilon\overline{B},U\subset U_1+\varepsilon\overline{B}\}$); инвариантность относительно перехода к замыканию выпуклой оболочки $\phi(U)=\phi(\overline{co}U)$.

Так же как в работах [5 - 11], обозначим через $\nu_E(U)$ меру неравностепенной абсолютной непрерывности норм элементов подмножества U правильного пространства E.

Мера $\nu_E(U)$ обладает всеми вышеперечисленными свойствами ϕ, за исключением правильности: для относительно компактного множества U справедливо равенство $\nu(U)=0$, но равенство $\nu_E(U)=0$ возможно на множествах, не являющихся относительно компактными.

В работах [5; 6] было доказано, что для произвольного ограниченного подмножества U правильного пространства E имеет место $\chi_E(U)\ge\nu_E(U)$; если U к тому же компактно по мере, то $\chi_E(U)=\nu_E(U)$. Ниже будут доказаны аналогичные свойства для β.

Здесь компактность по мере означает [2, 4.9.1] компактность в нормированном пространстве S всех измеримых почти всюду конечных функций u с нормой $\|u\|=\inf\limits_{S>0}\{s+\mu\{t:|u(t)|\ge s\}\}$.

Банахово пространство E вещественных измеримых функций на Ω называется идеальным, если выполнено условие: любая измеримая функция u на Ω, для которой найдется такая функция $v\in E$, что $|u(s)|\le|v(s)|$ почти всюду, также принадлежит E, и справедливо неравенство $\|u\|_E\le\|v\|_E$ [4].

Идеальное пространство E называется правильным, если норма обладает свойством абсолютной непрерывности $\lim\limits_{\mu(D)\to 0}\|P_D u\|_E=0$. В частности,

$$\lim_{T\to\infty}\|P_{D(u,T,u_0)}u\|_E=0, \tag{1}$$

где $u_0\in E$ — функция с положительными значениями, называемая условно *единицей* пространства E, $D(u,T,u_0)=\{s:|u(s)|>Tu_0(s)\}$ для произвольного числа $T>0$, $P_D u(s)=u(s)$, если $s\in D$ и $P_D u(s)=0$, если $s\notin D$.

Определение 1. Пусть $\widetilde{S}$ - множество всех последовательностей $\{u_n\}$ элементов из E, удовлетворяющих следующим условиям: 1) u_n, $n=1,2,...$ имеют попарно непересекающиеся носители; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n\|=1$; 3) мера носителя стремится к нулю при $n\to\infty$; 4) существует такая строго возрастающая последовательность положительных чисел $\{T_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\infty$, что имеет место неравенство $T_n u_0(s)\le|u_n(s)|\le T_{n+1}u_0(s)$ для всех $n=1,2,...$ и $s\in\operatorname{supp}u_n$.

В настоящей работе поставлена задача - получить неравенства, связывающие меры некомпактности β и ν в пространстве Лоренца. В случае компактных по мере множеств доказать пропорциональность β и ν. Найти новый класс β-уплотняющих операторов, действующих в пространствах Лоренца.

2. Неравенства для β и ν в правильном пространстве

Пусть $\underline{c}_E = \inf_{\{u_n\}\in\widetilde{S}} \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E$; $\overline{c}_E = \inf_{\{u_n\}\in\widetilde{S}} \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E$.

В следующем утверждении предположим, что норма в правильном пространстве E удовлетворяет условию:

А) для любой ограниченной последовательности $\{u_n\}$ из E, если последовательность подмножеств $\{D_n\}$ из Ω, $\lim_{n\to\infty}\mu(D_n)=0$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\|P_{D_n}u_n\|_E = \nu_E\{u_n\}$, то $\nu_E\{v_n\}=0$, где $v_n = u_n - P_{D_n}u_n$.

Заметим, что условие А) выполняется, в частности, в пространствах Лоренца.

Лемма 1. Пусть U - произвольное ограниченное подмножество правильного пространства E с $\nu_E(U)>0$. Тогда существует такая последовательность $\{u_n\}$ в U, что

$$\underline{c}_E\nu_E(U) \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E .$$

Если U компактно по мере, то мы можем выбрать последовательность $\{u_n\}$, дополнительно удовлетворяющую неравенству $\overline{c}_E\nu_E(U) \ge \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E$.

Доказательство. Пусть U – произвольное ограниченное подмножество правильного пространства E с $\nu_E(U)>0$. В силу утверждений из [5; 6] существует монотонно возрастающая последовательность чисел $\{T_n\}$, $\lim_{n\to\infty}T_n=\infty$ и последовательность функций $\{u_n\}\subseteq U$, для которых справедливо равенство $\nu_E(U)=\lim_{n\to\infty}\|P_{D(u_n,T_n,u_0)}u_n\|_E$.

Заметим, что (1) влечет $\lim_{n\to\infty}\|P_{D(u_m,T_n,u_0)}u\|_E = 0$ для любого фиксированного m. Рассмотрим такую подпоследовательность (для простоты изложения не меняем обозначение), что $\nu_E(U)=\lim_{n\to\infty}\|P_{\widetilde{D}_n}u_n\|_E$, где $\widetilde{D}_n = \{s : T_n u_0(s) \le |u(s)| \le T_{n+1}u_0(s)\}$. Из ограниченности U следует, что $\lim_{n\to\infty}\sup_{u\in U}\mu(D(u,T_n,u_0))=0$. Поэтому $\lim_{n\to\infty}\mu(\widetilde{D}_n)=0$.

Переходя к подпоследовательностям, можно предполагать без ограничения общности, что мера $\mu\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}\widetilde{D}_k\right)$ достаточно мала, а разность между $\|P_{D_n}u_n\|_E$ и $\|P_{\widetilde{D}_n}u_n\|_E$ незначительна для $D_n = \widetilde{D}_n \setminus \bigcup_{k=n+1}^{\infty}\widetilde{D}_k$. В итоге, очевидно, мы получим последовательность $\{u_n\}\subseteq U$, для которой справедливо равенство $\nu_E(U)=\lim_{n\to\infty}\|P_{D_n}u_n\|_E$, и множества D_n попарно не пересекаются.

Заметим, что по предположению А) относительно нормы в E имеем $\nu_E\{v_n\}=0$, где $v_n = u_n - P_{D_n}u_n$. Следовательно, $\lim_{k\to\infty}\sup_{m,n\ge k}\|P_{D_m}(u_n - P_{D_n}u_n) - P_{D_n}(u_m - P_{D_m}u_m)\|_E = 0$;

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{m,n\ge k}\|P_{D_m}u_n - P_{D_n}u_m\|_E = 0. \qquad (2)$$

Построенная последовательность $\widetilde{u}_n = P_{D_n}u_n$ удовлетворяет условиям 1, 3, 4 определения 1. Вместо условия 2 этого определения имеет место равенство $\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{u}_n\|_E = \nu_E(U)$.

Поэтому $\underline{c}_E \nu_E(U) \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E$. Так как E, в частности, идеальное пространство, то

$$\|u_n - u_m\|_E \ge \left\|P_{D_m \cup D_n}(u_n - u_m)\right\|_E \ge \left| \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \left\|P_{D_m} u_n - P_{D_n} u_m\right\|_E \right|$$

для всех $n \ne m$ и в силу (2) $\underline{c}_E \nu_E(U) \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E$.

Первая часть утверждения леммы доказана.

Заметим, что последовательность $\{\tilde{u}_n\}$ в силу условия 3 стремится по мере к нулю. Так как множество U компактно по мере, то последовательность $\{u_n\} \subseteq U$ тоже компактна по мере. Отсюда компактна по мере последовательность $\{u_n - \tilde{u}_n\}$.

Как было доказано в [5; 6] в этом случае $\chi_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = \nu_E\{u_n - \tilde{u}_n\}$. По предположению А) относительно нормы в E имеем $\chi_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = \nu_E\{u_n - \tilde{u}_n\} = 0$.

По определению меры некомпактности Хаусдорфа для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon-$сеть $C = \{c_1, c_2, ..., c_N\} \subset E$ такая, что $\{u_n - \tilde{u}_n\} \subset C + \varepsilon B$. Так как C конечно, мы можем выбрать бесконечную подпоследовательность (с тем же обозначением), что $\{u_n - \tilde{u}_n\} \subset c^* + \varepsilon B$ для некоторого $c^* \in C$. Отсюда $\left| \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \|u_n - u_m\|_E \right| \le 2\varepsilon$.

Устремляя ε к нулю и переходя к подпоследовательности, не меняя при этом обозначение, получим $\overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \left| \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E - \|u_n - u_m\|_E \right| = 0$.

Вторая часть утверждения леммы доказана, так как $\overline{c}_E \nu_E(U) \ge \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_m\|_E$.

Теорема 1. В правильном пространстве E МНК ν и β связаны неравенством $\beta_E(U) \ge \underline{c}_E \nu_E(U)$ для любого ограниченного подмножества U; более того, если U компактно по мере, то $\underline{c}_E \nu_E(U) \le \beta_E(U) \le \overline{c}_E \nu_E(U)$.

Доказательство. Если $\nu_E(U) = 0$, то неравенство $\beta_E(U) \ge \underline{c}_E \nu_E(U)$ выполнено, если U компактно по мере и $\nu_E(U) = 0$, то по критерию компактности в правильном пространстве [3; 4] U относительно компактно и $\beta_E(U) = 0$. Таким образом, утверждение теоремы 1 для случая $\nu_E(U) = 0$ выполнено. Предположим, что $\nu_E(U) > 0$. Пусть последовательность $\{u_n\}$ такая как в лемме 1. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно выбрано. По лемме 2 [11] мы можем предполагать без ограничения общности, что $\|u_n - u_m\|_E \le \beta_E\{u_n\} + \varepsilon$ для всех m и n. Отсюда в силу монотонности β получим $\|u_n - u_m\|_E \le \beta_E\{u_n\} + \varepsilon \le \beta_E(U) + \varepsilon$ для всех m и n.

Так как ε может быть произвольно малым и по лемме 1 $\underline{c}_E \nu_E(U) \le \underline{\lim}_{m\to\infty} \underline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E$, то мы получаем первую часть утверждения теоремы 1.

Пусть U компактно по мере. По определению β для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $\{\omega_n\}$, такая что $\|\omega_n - \omega_m\|_E \ge \beta_E(U) - \varepsilon$ для всех $n \ne m$. Следовательно, по лемме 1 мы можем извлечь подпоследовательность $\{u_n\}$ из $\{\omega_n\}$, такую что

$$\beta_E(U) - \varepsilon \le \overline{\lim}_{m\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_E \le \overline{c}_E \nu_E\{\omega_n\} \le \overline{c}_E \nu_E(U),$$

что завершает доказательство теоремы, поскольку ε может быть произвольно малым.

Теорема 2. В пространствах Лоренца Λ_p имеет место $\underline{c}_{\Lambda_p} = \overline{c}_{\Lambda_p} = 2$ при $1 \le p < \infty$.

Доказательство. Так как в силу [3, 15.1] множество всех конечнозначных функций плотно в Λ_p при $1 \le p < \infty$, то без ограничения общности мы можем предполагать, что $\tilde{S}$ состоит из последовательностей конечнозначных функций.

По определению 1 $\{u_n\}$ последовательность таких функций с попарно непересекающимися носителями, что существует строго возрастающая последовательность положительных чисел $\{T_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$ и $T_n u_0(s) \le |u_n(s)| \le T_{n+1} u_0(s)$ для всех $n = 1,2,\ldots$ и $s \in \operatorname{supp} u_n$.

Имеем $\| |f| \| = \|f\|$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением функций вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{l_n} c_i \kappa_{D_i},\ u_m = \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} c_i \kappa_{D_i}\ c_1 > c_2 > \ldots > c_{l_n} > c_{l_n+1} > \ldots > c_{l_n+l_m} > c_{l_n+l_m+1} = 0,\ n \ge m.$$

По формуле [3, 15.3] $\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \sum\limits_{i=1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{i} D_k\right)^{1/p}$. Следовательно,

$$\|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \|u_n\|_{\Lambda_p} - c_{l_n+1} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{l_n} D_k\right)^{1/p} + \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \mu\left(\bigcup_{k=1}^{i} D_k\right)^{1/p}.$$

В силу условия 3 определения 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{l_n} D_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(\operatorname{supp} u_n) = 0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_{\Lambda_p} - c_{l_n+1} \left(\mu(\operatorname{supp} u_n)\right)^{1/p} + \sum_{i=l_n+1}^{l_n+l_m} (c_i - c_{i+1}) \left(\mu\left(\bigcup_{k=l_n+1}^{i} D_k\right) + \mu(\operatorname{supp} u_n) \right)^{1/p} \right) =$$

$$= 1 + \|u_m\|_{\Lambda_p},$$

так как при фиксированном m постоянные $c_{l_n+1}, \ldots, c_{l_n+l_m}$ не меняются. В итоге

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \|u_m\|_{\Lambda_p}\right) = 2 \text{ и } \underline{c}_{\Lambda_p} = \overline{c}_{\Lambda_p} = 2.$$

Следствие. В пространствах Лоренца Λ_p имеет место неравенство $\beta_{\Lambda_p}(U) \ge 2\nu_{\Lambda_p}(U)$ при $1 \le p < \infty$ и, в частности, $\beta_{\Lambda_p}(B) = 2$. Если U компактно по мере, то $\beta_{\Lambda_p}(U) = 2\nu_{\Lambda_p}(U)$.

Обозначим так же как в [3, 15.5] через T_p множество функций $u(s)$ вида

$$u(s) = (\mu(D_1) + \mu(D_2))^{-1/p} (\kappa_{D_1} - \kappa_{D_2}),$$

где D_1 и D_2 – непересекающиеся подмножества Ω, в силу [3, 15.3] с единичной нормой.

Лемма 2. Пусть подмножество $U \subset T_p$ такое, что $\mu(D_1) = c$ и $\mu(D_2) = d$ для всех $u \in U$ для некоторых $c \ge 0$ и $d \ge 0$. Тогда $\beta_{\Lambda_p}(U) \le \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\}$.

Доказательство. По определению β для каждого $\varepsilon > 0$ существует в U последовательность $\{u_n\}$ такая, что $\beta_{\Lambda_p}(U) - \varepsilon \le \|u_n - u_m\|_{\Lambda_p}$ для всех $m \ne n$. В силу [11, лемма 4] мы можем предполагать без ограничения общности, что для всех m и n

$$a \overset{def}{=} \mu\{s : |u_n(s) - u_m(s)| = 2(\mu(D_1) + \mu(D_2))^{-1/p} == 2(c+d)^{-1/p}\} \le \frac{1}{2} \mu(\operatorname{supp} u_n \cap \operatorname{supp} u_m) \le \frac{c+d}{2}.$$

Итак, для любых m и n разность $u_n(s) - u_m(s)$ принимает два ненулевых значения по абсолютной величине $(c+d)^{-1/p}$ на множестве с мерой

$$2c + 2d - 2\mu(\operatorname{supp} u_n \cap \operatorname{supp} u_m) \le 2c + 2d - 4a$$

и $2(c+d)^{-1/p}$ на множестве с мерой a. Поэтому в силу [3, 15.3]

$$\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}\le(2(c+d)^{-1/p}-(c+d)^{-1/p})(a)^{1/p}+(c+d)^{-1/p}(2c+2d-3a)^{1/p}.$$

Обозначим через y неотрицательную переменную $y=\dfrac{a}{c+d}\le\dfrac{1}{2}$. Имеем

$$\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}\le y^{1/p}+(2-3y)^{1/p}\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}.$$

Действительно, при $y=0$ имеем $y^{1/p}+(2-3y)^{1/p}=2^{1/p}\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}$, при $y=\dfrac{1}{2}$ имеем $y^{1/p}+(2-3y)^{1/p}=2^{1-1/p}\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}$. Заметим, что $t^{1/p}+(1-3t)^{1/p}\le2$ при $0\le t\le1/4$, так как $\max\{t^{1/p},(1-3t)^{1/p}\}\le1$. Полагая $t=\dfrac{y}{2}$, получим $\left(\dfrac{y}{2}\right)^{1/p}+\left(1-3\dfrac{y}{2}\right)^{1/p}\le2$. Отсюда

$$y^{1/p}+(2-3y)^{1/p}\le2^{1-1/p}\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}.$$

В силу произвольности выбора ε в неравенстве $\beta_{\Lambda_p}(U)-\varepsilon\le\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}$ получаем утверждение леммы 2.

Теорема 3. Пусть $U\subset B_{L_\infty}(\theta,r_1)\cap B_{\Lambda_p}(\theta,r)$ для некоторых $r_1>0$ и $r>0$. Тогда $\beta_{\Lambda_p}(U)\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}r$.

Доказательство. В силу свойства полуоднородности β достаточно доказать для $U\subset B_{L_\infty}(\theta,r_1)\cap B_{\Lambda_p}(\theta,1)$ неравенство $\beta_{\Lambda_p}(U)\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}$. В силу [3, 15.1] U — это подмножество в замыкании выпуклой оболочки функций

$$u(s)=(\mu(D_1)+\mu(D_2))^{-1/p}(\kappa_{D_1}-\kappa_{D_2})$$

из T_p. Поэтому из свойства инвариантности β относительно замыкания выпуклой оболочки, без ограничения общности, можно предположить, что $U\subseteq T_p$. По определению меры некомпактности β для каждого $\varepsilon>0$ в U содержится бесконечная последовательность $\{u_n\}$, для любых различных членов которой справедливо неравенство $\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}\ge\beta_{\Lambda_p}(U)-\varepsilon$. В силу вложения $U\subset B_{L_\infty}(\theta,r_1)$ и липшицевости β по метрике Хаусдорфа мы можем предполагать, что $\{u_n\}$ состоит из функций, удовлетворяющих предположениям леммы 2. Поэтому $\beta_{\Lambda_p}\{u_n\}\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}$. По лемме 2 [11] мы можем предполагать без ограничения общности, что $\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}\le\beta_{\Lambda_p}\{u_n\}+\varepsilon$ для всех m и n. В итоге

$$\beta_{\Lambda_p}(U)-\varepsilon\le\|u_n-u_m\|_{\Lambda_p}\le\beta_{\Lambda_p}\{u_n\}+\varepsilon\le\max\{2^{1/p},2^{1-1/p}\}+\varepsilon,$$

что в силу произвольности выбора ε завершает доказательство теоремы.

3. Мера некомпактности β операторов в пространстве Λ_p

Пусть также как в [7-10]

$$k(U,A,\Lambda_p(\Omega),\Lambda_p(\Omega))=\overline{\lim_{T\to\infty}}\sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}\ne0,u\in U}\frac{\|AP_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}}\le k(B(\theta,\nu_{\Lambda_p}(U)),A,\Lambda_p(\Omega),\Lambda_p(\Omega)).$$

Теорема 4. Пусть A - непрерывный частично аддитивный оператор, действующий из $\Lambda_p(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, сужение которого на $L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывно. Тогда для любого подмножества U из $\Lambda_p(\Omega)$ мы будем иметь

$$\beta_{\Lambda_p}(AU) \le \max\left\{2^{\frac{1}{p}-1}, 2^{-\frac{1}{p}}\right\} k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega))\beta_{\Lambda_p}(U),$$

т.е. оператор A является (k,β) - ограниченным и уплотняющим при всех $1 \le p < \infty$, если

$$k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega)) < \max\left\{2^{1-\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Доказательство. Если U не ограничено, то в этом случае $\beta_{\Lambda_p}(U) = \infty$ и утверждение выполнено. Поэтому без ограничения общности предположим, что U ограничено. Тогда $U \subseteq \{P_{D(u,T)}u : u \in U\} + \{P_{A(u,T)}u : u \in U\}$ для любого $T > 0$.

В силу предположения о частичной аддитивности оператора A имеем

$$AU \subseteq A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} + A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\} - A(\theta).$$

Из алгебраической полуаддитивности β получаем

$$\beta_{\Lambda_p}(AU) \le \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\}) + \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\}) + \beta_{\Lambda_p}(A(\theta)).$$

Имеем $\beta_{\Lambda_p}(A\{P_{A(u,T)}u : u \in U\}) = 0$, так как сужение оператора на $L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывно. Кроме того, $\beta_{\Lambda_p}(A(\theta)) = 0$ как на одноэлементном множестве. Поэтому $\beta_{\Lambda_p}(AU) \le \beta_{\Lambda_p}(A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\})$ и справедливо включение для любого $T > 0$

$$A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} \subseteq B\left(\theta, \sup_{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p} \ne 0, u \in U} \frac{\|AP_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}}{\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}} \sup_{u \in U}\|P_{D(u,T)}u\|_{\Lambda_p}\right).$$

Отсюда $A\{P_{D(u,T)}u : u \in U\} \subseteq B(\theta, k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega))\nu_{\Lambda_p}(U))$. Имеем $\beta_{\Lambda_p}(AU) \le \max\{2^{1/p}, 2^{1-1/p}\} k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega))\nu_{\Lambda_p}(U)$ в силу теоремы 3.

Так как $\beta_{\Lambda_p}(U) \ge 2\nu_{\Lambda_p}(U)$, то получаем утверждение теоремы 4.

Следствие. Линейный оператор является частным случаем частично аддитивного. Поэтому утверждение теоремы 4 останется в силе для линейного оператора с заменой $k(B(\theta, \nu_{\Lambda_p}(U)), A, \Lambda_p(\Omega), \Lambda_p(\Omega))$ на $\|A\|\nu_{\Lambda_p}(U)$.

Заключение

В данной работе для произвольного правильного пространства E введены величины геометрического характера $\overline{c}_E$ и $\underline{c}_E$, значения которых были подсчитаны ранее в пространствах Лебега, а здесь вычисляются в пространствах Лоренца Λ_p $(1 \le p < \infty)$.

Результат получается неожиданный, поскольку значения не зависят от p, в отличие от пространств Лебега.

Кроме того, в настоящей работе было доказано, что для любого ограниченного подмножества U пространств Лоренца справедливы неравенства $\beta_{\Lambda p}(U) \ge 2\nu_{\Lambda p}(U)$. Если U компактно по мере, то $\beta_{\Lambda_p}(U) = 2\nu_{\Lambda_p}(U)$.

Если $U \subset B_{L_\infty}(\theta, r_1) \cap B_{\Lambda_p}(\theta, r)$ для некоторых $r_1 > 0$ и $r > 0$, то получаем оценку для меры некомпактности β, опять таки, в отличие от пространств Лебега, не зависимую от r_1.

Лемма 1 настоящей работы доказана при более слабых предположениях по сравнению с аналогичным утверждением из [12].

Завершает работу утверждение, позволяющее выделить новый класс уплотняющих операторов в пространствах Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Banas' J., Goebel K.** Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.
2. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.** Меры некомпактности и уплотняющие операторы. – Новосибирск: Наука, 1986.
3. **Красносельский М.А., Забрейко П.П. и др.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966.
4. **Väth M.** Ideal Spaces, Let. Notes in Math. 1664, Springer Verlag, Berlin, 1997.
5. **Yerzakova N.A.** On Measures of Non-Compactness in Regular Spaces // Zeitschrift fűr Analysis und ihre Anwendendungen. - 1996. - V. 15. - № 2. - P. 299-307.
6. **Ерзакова Н.А.** Компактность по мере и мера некомпактности // Сибирский математический журнал. - 1997. - Т. 38. - № 5. - С. 1071-1073.
7. **Ерзакова Н.А.** О нелинейных операторах // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2009. - № 140. - С. 57-64.
8. **Ерзакова Н.А.** О разрешимости уравнений с частично аддитивными операторами // Функциональный анализ и его приложения. - 2010. - № 44. - Вып. 3. - С. 69-72.
9. **Ерзакова Н.А.** О компактных по мере операторах // Известия вузов. Математика. - 2011. - № 9. - С. 44-51.
10. **Erzakova N.A.** On locally condensing operators // Nonlinear Analysis: Theory Methods& Applications, 75, 2012, № 8, 3552-3557.
11. **Ерзакова Н.А.** Мера некомпактности β в пространствах L_p // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2013. - № 195. - С. 65-73.
12. **Erzakova N.A.** Measures of Noncompactness in Regular Spaces // Canadian Mathematical Bulletin. Published electronically on March 25, 2014. [Электронный ресурс] URL: http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2014-015-4.

MEASURE OF NON-COMPACTNESS β IN THE LORENTZ SPACES

Erzakova N.A.

Geometric characteristics of regular spaces are determined. Examples of regular spaces are the Lebesgue and Lorentz spaces, in particular. For the Lorentz spaces an inequality for arbitrary subsets, connecting the measures of noncompactness β and ν are proved. A new class of β- condensing operators in the Lorentz spaces among partially-additive operators linear operators, in particular, is obtained.

Key words: measure of non-compactness, condensing operator, Lebesgue space, Lorentz space, regular space, partially-additive operator.

Сведения об авторе

Ерзакова Нина Александровна, окончила НГУ (1976), доктор физико-математических наук, профессор МГТУ ГА, автор более 70 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.