УДК 517.956.223+517.983

О СИЛЬНО УПЛОТНЯЮЩИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОПЕРАТОРАХ

Н.А. ЕРЗАКОВА

Введено понятие сильно уплотняющего на бесконечности оператора. Это естественная вариация понятия локально сильно уплотняющего оператора в конечной точке, введенного автором ранее. Доказывается, что если такие операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна. В частности, сильно уплотняющими операторами на бесконечности могут быть операторы, не являющиеся компактными, уплотняющими, даже (k,ψ)-ограниченными. Такие операторы образуют линейное пространство. Приводится приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.

Ключевые слова: мера некомпактности, уплотняющий оператор, локально сильно уплотняющий оператор, асимптотически линейный оператор, асимптотическая производная, точка бифуркации.

Введение

Уплотняющий оператор - это отображение, при котором образ любого множества в определенном смысле более компактен, чем само множество. Степень некомпактности множества измеряется с помощью функций, называемых мерами некомпактности [1]. В частности, для уплотняющих операторов справедлива теорема Шаудера о существовании неподвижной точки.

В настоящей работе вводится новое понятие, а именно, сильно уплотняющего оператора на бесконечности. Показывается, что сильно уплотняющими операторами на бесконечности могут быть операторы, не являющиеся компактными, уплотняющими, даже (k,ψ)-ограниченными. Введенное понятие можно отнести, как и все, что связано с асимптотикой нелинейностей [2], к новой ветви классического нелинейного анализа. А следовательно, понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности может иметь приложения, в частности, при решении задач о вынужденных колебаниях в системах различных типов (включая одноконтурные и многоконтурные системы управления, системы с запаздыванием и др.).

1. Постановка и формализация задачи

Приведем в удобной для дальнейшего изложения форме используемые определения [1].

Неотрицательная числовая функция ψ, заданная на множестве подмножеств банахова пространства E, называется мерой некомпактности, если она инвариантна относительно перехода к замыканию выпуклой оболочки любого подмножества U из E, т.е. $\psi(\overline{co}\,U)=\psi(U)$.

Пример. Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U)$ множества произвольного ограниченного множества U банахова пространства E называется инфимум всех $\varepsilon>0$, при которых U имеет в E конечную ε-сеть.

Пусть E и E_1 - банаховы пространства. Непрерывный оператор $f:G\subseteq E\to E_1$ называется уплотняющим [1], если для любого ограниченного подмножества U из G, замыкание которого некомпактно, выполняется неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U))<\psi_E(U).$$

Непрерывный оператор $f:G\subseteq E\to E_1$ называется (k,ψ)-ограниченным, если существует такая постоянная $k>0$, что для всех подмножеств U из G выполняется неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U))\le k\psi_E(U).$$

В работах [2; 3] было введено понятие локально сильно ψ-уплотняющего на M отображения, не являющегося компактным, уплотняющим, даже (k,ψ)-ограниченными.

Непрерывное отображение $f: M \subseteq E \to E_1$ называется локально сильно ψ-уплотняющим на M, если существует функция $\lambda_{M,f}: R_+ \to R_+$

$$\lim_{r\to 0}\lambda_{M,f}(r) = 0$$

такая, что для любой точки $x \in M$, для каждого $r > 0$, для произвольного подмножества $U \subseteq B(x,r)\cap M$ справедливо неравенство

$$\psi_{E_1}(f(U)) \le \lambda_{M,f}(r)\psi_E(U).$$

Мы скажем, что мера некомпактности ψ обладает свойством ограниченности, если $\psi_E(U) < \infty$, тогда и только тогда, когда U ограничено в E [2; 3].

В утверждениях, сформулированных ниже, мера некомпактности ψ будет обладать некоторыми свойствами из следующего списка [1-3]:

1) монотонности, т.е. из $U_1 \subseteq U$ следует, что

$$\psi_E(U_1) \le \psi_E(U);$$

2) полуаддитивности, т.е.

$$\psi_E(U_1 \cup U) = \max\{\psi_E(U_1), \psi_E(U)\};$$

3) полуоднородности, т.е.

$$\psi_E(tU) = |t|\psi_E(U),$$

где t - число;

4) алгебраической полуаддитивности, т.е.

$$\psi_E(U+V) \le \psi_E(U) + \psi_E(V),$$

где $U+V = \{u+v : u \in U, v \in V\}$;

5) непрерывности по метрике Хаусдорфа ρ:

$$\forall(U,\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(U_1)[\rho(U,U_1)<\delta \Rightarrow |\psi_E(U)-\psi_E(U_1)|<\varepsilon],$$

где

$$\rho(U,U_1) = \inf\{\varepsilon > 0 : U_1 \subset U + \varepsilon\overline{B}, U \subset U_1 + \varepsilon\overline{B}\},\ \overline{B} = \{x \in E : \|x\| \le 1\};$$

6) липшицевости, т.е.

$$|\psi_E(U) - \psi_E(U_1)| < L_\psi \rho(U,U_1)$$

для некоторой константы $L_\psi > 0$;

7) регулярности, т.е. $\psi_E(U) = 0$, если и только если множество U относительно компактно;

8) ограниченности, т.е. $\psi_E(U) < \infty$, если и только если ограничено подмножество $U \subset E$;

9) инвариантности относительно сдвигов, т.е.

$$\psi_E(U+u) = \psi_E(U)\ \ (u \in E).$$

Цель настоящей работы:

1. Ввести новое понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности.
2. Доказать, что если такие операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна.
3. Привести пример сильно уплотняющего оператора на бесконечности, не являющегося компактным, уплотняющим, даже (k,ψ)-ограниченным.
4. Показать, что сильно уплотняющие операторы на бесконечности образуют линейное пространство.
5. Рассмотреть приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.

2. Основной результат

Пусть $B(x,r)$ – шар радиуса r с центром в точке x. В частности, $B(\theta,r)$ – шар радиуса r с центром в нулевой точке θ банахова пространства E. Пусть R_+ – множество всех положительных вещественных чисел.

Определение. Непрерывное отображение $f: M \subseteq E \to E_1$ (не обязательно линейное) назовем сильно ψ-уплотняющим на бесконечности, если существует число $R_f > 0$ и непрерывная на $[R_f,\infty)$ монотонно убывающая функция $\tilde{\lambda}_f : R_+ \to R_+$

$$\lim_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r) = 0 \tag{1}$$

такая, что

$$\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U) \tag{2}$$

для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и произвольного непустого подмножества $U \subseteq M \cap (B(\theta,R_2)\setminus B(\theta,R_1))$.

Теорема 1. Пусть мера некомпактности ψ обладает свойствами: полуоднородности, алгебраической полуаддитивности и ограниченности. Тогда множество $\tilde{\Lambda}$ всех (не обязательно линейных) операторов $f: E \to E_1$ сильно ψ-уплотняющих на бесконечности, образуют линейное пространство, в частности, абелеву аддитивную группу. Композиция (k,ψ)-ограниченного оператора $E_1 \to E_2$ и сильно ψ-уплотняющего на бесконечности оператора $E \to E_1$ является сильно ψ-уплотняющим на бесконечности оператором $E \to E_2$.

Доказательство. Покажем, что конечная линейная комбинация (над полем вещественных чисел) сильно ψ-уплотняющих операторов на бесконечности будет вновь сильно ψ-уплотняющим оператором на бесконечности. Действительно, пусть $f: E \to E_1$ и $g: E \to E_1$ — сильно ψ-уплотняющие операторы на бесконечности. Тогда существуют числа $R_f > 0$, $R_g > 0$ и функции $\tilde{\lambda}_f$, $\tilde{\lambda}_g$ такие, что для любых чисел $R_1 > R > \max\{R_f, R_g\}$ и произвольного непустого подмножества $U \subseteq B(\theta,R_2)\setminus B(\theta,R_1)$ выполняется $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R)\psi_E(U)$, $\psi_{E_1}(g(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R)\psi_E(U)$. Отсюда

$$\psi((c_1 f + c_2 g)(U)) = \psi(c_1 f(U) + c_2 g(U)) \le |c_1|\tilde{\lambda}_f(R)\psi(U) + |c_2|\tilde{\lambda}_g(R)\psi(U) =$$
$$= (|c_1|\tilde{\lambda}_f + |c_2|\tilde{\lambda}_g)\psi(U).$$

Полагая $\tilde{\lambda}_{c_1 f + c_2 g} = |c_1|\tilde{\lambda}_f + |c_2|\tilde{\lambda}_g$, мы получаем функцию, удовлетворяющую (1) и (2). Таким образом, множество $\tilde{\Lambda}$ всех $f: E \to E_1$ сильно ψ-уплотняющих операторов на бесконечности является линейным пространством над полем вещественных чисел и, в частности, абелевой группой относительно сложения.

Пусть $g: E_1 \to E_2$ - (k,ψ)-ограниченный оператор, а $f: E \to E_1$ - сильно ψ-уплотняющий на бесконечности оператор. Тогда существуют число $R_f > 0$ и функция $\lim\limits_{r\to\infty}\tilde{\lambda}_f(r) = 0$ такие, что $\psi_{E_1}(f(U)) \le \tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U)$ для любых чисел $R_2 > R_1 > R_f$ и произвольного непустого подмножества $U \subseteq B(\theta,R_2)\setminus B(\theta,R_1)$. Поскольку ψ удовлетворяет свойству ограниченности, по лемме 1 [3] $f(U)$ ограничено в E_1. Тогда

$$\psi_{E_2}(g(f(U))) \le k\psi_{E_1}(f(U)) \le k\tilde{\lambda}_f(R_1)\psi_E(U),$$

т.е. композиция (k,ψ)-ограниченного оператора и сильно ψ-уплотняющего на бесконечности оператора является сильно ψ-уплотняющим на бесконечности оператором с $R_{fg}=R_f$ и $\tilde{\lambda}_{gf}=k\tilde{\lambda}_f$.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим непрерывный оператор $F:E\to E$, определенный равенством $F(u)=b+a\cdot\|u\|^{-\gamma}$ для некоторого $b\in E$ и скалярных величин a, $0<\gamma<1$. Тогда F является сильно ψ-уплотняющим оператором на бесконечности с $\tilde{\lambda}_F(r)=|a|r^{-\gamma}$ для всех мер некомпактности ψ, удовлетворяющим свойствам (1), (2), (3), (5), (7), перечисленным выше, и F не является (k,χ)- ограниченным оператором.

Доказательство. Заметим, что F является непрерывным, так как

$$\lim_{u\to 0}\|F(u)-b\|=\lim_{u\to 0}|a|\cdot\|u\|^{1-\gamma}=0.$$

Рассмотрим произвольные числа $R_1>R>1$ и также произвольное непустое подмножество $U\subseteq B(\theta,R_1)\setminus B(\theta,R)$. Для любого $\varepsilon>0$ компакт $[R,R_1]$ допускает конечное покрытие открытыми интервалами

$$[R,R_1]\subset\bigcup_{i=1}^{N}(r_i-\varepsilon,r_i+\varepsilon),$$

где $r_i>R$ для всех i. Тогда $F(U)$ допускает по определению F покрытие

$$F(U)\subset b+a\bigcup_{i=1}^{N}\left(\bigcup_{r\in(r_i-\varepsilon,r_i+\varepsilon)}r^{-\gamma}U\right).$$

В силу свойств монотонности, инвариантности относительно сдвигов, полуоднородности, полуаддитивности, непрерывности относительно метрики Хаусдорфа ρ меры некомпактности ψ имеем

$$\psi(F(U))\le|a|\max_{1\le i\le N}\psi\left(\bigcup_{r\in(r_i-\varepsilon,r_i+\varepsilon)}r^{-\gamma}U\right)\le|a|\max_{1\le i\le N}r_i^{-\gamma}\psi(U)+\omega(\varepsilon),$$

где $\omega(\varepsilon)$ - метрика Хаусдорфа, т.е.

$$\omega(\varepsilon)=\max_{1\le i\le N}\rho\left(\left(\bigcup_{r\in(r_i-\varepsilon,r_i+\varepsilon)}r^{-\gamma}U\right),r_i^{-\gamma}U\right)$$

и $\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Так как $1<R<r_i$ для всех i и ε может быть произвольно малым, мы получаем $\psi(F(U))\le|a|R^{-\gamma}\psi(U)$.

Пусть $S=S(\theta,\varepsilon)=\{u\in E:\|u\|=\varepsilon\}$, тогда $\chi(S)=\varepsilon$, $\chi(F(S))=\varepsilon^{-\gamma}|a|\chi(F(S))$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\chi(F(S))}{\chi(S)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma}|a|=\infty.$$

Поэтому F не является (k,χ)-ограниченным оператором.

Замечание. Все компактные операторы являются сильно ψ-уплотняющими операторами на бесконечности, но, как следует из примера, сильно ψ-уплотняющий на бесконечности оператор необязательно (k,ψ)-ограниченный оператор, в частности, ψ-уплотняющий оператор или компактный оператор.

3. Приложения

Напомним [1, 3.3.3]), что оператор $f: E \to E$ называется асимптотически линейным, если найдется такой линейный оператор $f'(\infty)$, называемый производной оператора f в точке ∞ или асимптотической производной оператора f в точке ∞, что

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\|f(u) - f'(\infty)u\|}{\|u\|} = 0.$$

Как доказано в теореме 3.3.3 из [1], асимптотическая производная (k, χ) -ограниченного оператора в случае ее существования также является (k, χ)-ограниченным оператором. В следующей теореме докажем, практически повторяя доказательство теоремы 3.3.3, что если оператор сильно ψ-уплотняющий на бесконечности, то его асимптотическая производная в случае ее существования вполне непрерывна.

Теорема 2. Пусть мера некомпактности ψ, заданная на подмножествах банахова пространства E, полуоднородна и алгебраически полуаддитивна, непрерывна по метрике Хаусдорфа ρ, и, кроме того, ψ - регулярная мера некомпактности. Тогда если существует непрерывная асимптотическая производная $f'(\infty)$ сильно ψ-уплотняющего на бесконечности оператора $f: E \to E$, то $f'(\infty)$ вполне непрерывна.

Доказательство. Пусть $A = f'(\infty)$ и $\omega(h) = f(h) - Ah$. Тогда $Ah = f(h) - \omega(h)$, $h \in E$, где $\omega(h)/\|h\| \to 0$ при $\|h\| \to \infty$. Предположим сначала, что ограниченное множество $U \subset E$ отделено от нуля $\|u\| \geq \rho > 0$ для $u \in U$. Тогда для произвольного $r > 0$ мы можем записать

$$AU = \frac{1}{r} A(rU) \subseteq \frac{1}{r}[f(rU) - \omega(rU)].$$

Из монотонности ψ

$$\psi(AU) \leq \psi\left(\frac{1}{r} f(rU) - \frac{1}{r}\omega(rU)\right),$$

из алгебраической полуаддитивности ψ

$$\psi(AU) \leq \psi\left(\frac{1}{r} f(rU)\right) + \psi\left(-\frac{1}{r}\omega(rU)\right),$$

из полуоднородности ψ

$$\psi(A(U)) \leq \frac{1}{r}\psi(f(rU)) + \frac{1}{r}\psi(\omega(rU)).$$

По предположению теоремы 2 $f: E \to E_1$ - сильно ψ-уплотняющий на бесконечности оператор, т.е. существуют число $R_f > 0$ и функция $\tilde{\lambda}_f(r)$, удовлетворяющие (1) и (2). Пусть $r\rho > R_f$, $rU \subseteq E \setminus B(\theta, r\rho)$ и $\psi(f(rU)) \leq \tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(rU)$.

Тогда

$$\psi(A(U)) \leq \frac{1}{r}\tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(rU) + \frac{1}{r}\psi(\omega(rU))$$

или из полуоднородности ψ

$$\psi(A(U)) \le \tilde{\lambda}_f(r\rho)\psi(U) + \frac{1}{r}\psi(\omega(rU)).$$

Устремляя в последнем неравенстве $r \to \infty$, получим $\psi\big(A(U)\big) = 0$ в силу (1), т.е. замыкание $A(U)$ компактно, так как ψ — по предположению правильная мера некомпактности.

Пусть U теперь произвольное ограниченное подмножество E. Запишем $U = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = U \cap B(\theta, \rho)$ и $U_2 = U \setminus U_1$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выберем $\rho > 0$ достаточно малое, чтобы выполнялось неравенство $\|Au\| \le \varepsilon$ для всех $u \in U_1$. В силу непрерывности ψ относительно метрики Хаусдорфа мы можем выбрать $\rho > 0$ с дополнительным условием, что $\psi(A(U_1)) \le \varepsilon$. Тогда из свойств меры некомпактности ψ будем иметь

$$\psi(AU) = \psi\big(A(U_1) \cup A(U_2)\big) = \max\{\psi(A(U_1)), \psi(A(U_2))\} \le \max\{\varepsilon, \psi(A(U_2))\}.$$

Так как из первой части доказательства следует, что $\psi(A(U_2)) = 0$ и $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то опять получаем, что $\psi(A(U)) = 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть K - конус в E. Напомним [1, 3.3.8], что конусом в банаховом пространстве E называется выпуклое замкнутое множество, инвариантное относительно умножения на неотрицательные скаляры и не содержащее противоположных элементов. Оператор f называется положительным на множестве M, если $f(M) \subset K$.

Оператор $f'(\infty)$ называется сильной асимптотической производной по конусу K [7], а оператор f - сильно асимптотически линейным по конусу, если

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{\|u\| \ge r, u \in K} \frac{\|f(u) - f'(\infty)u\|}{\|u\|} = 0.$$

Утверждение теоремы 2 останется верным для сильной асимптотической производной по конусу.

Напомним [2, 5-7], что число α_0 называется асимптотической точкой бифуркации f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует шар $B(\theta, r)$ такой, что граница каждого ограниченного открытого множества $U \supset B(\theta, r)$ содержит собственные векторы f с характеристическими числами $\alpha \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, т.е. уравнение

$$u = \alpha f(u) \tag{3}$$

имеет непрерывную ветвь собственных векторов, уходящую в бесконечность.

Теорема 3. Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и существует непрерывная асимптотическая производная $f'(\infty)$ оператора f. Тогда точками бифуркации оператора f могут служить лишь характеристические значения линейного оператора $f'(\infty)$, т.е. такие числа α, что $1/\alpha$ являются собственными значениями оператора $f'(\infty)$.

Доказательство. Обозначим $A = f'(\infty)$. Предположим сначала, что $\|A\| \ne 0$. В силу теоремы 2 A – вполне непрерывный оператор. Пусть α_0 не является характеристическим значением оператора $f'(\theta)$. Следовательно, оператор $(I - \alpha_0 A)^{-1}$ непрерывен. Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{3\|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|\|A\|}.$$

По определению асимптотической производной $Ah = f(h) + \omega(h)$, где $\omega(h)/\|h\|_E \to 0$ при $\|h\|_E \to \infty$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $\|u\| \ge \delta$ было выполнено

$$\|\omega(u)\|_E < \frac{\|u\|_E}{3\|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|(|\alpha_0| + \varepsilon)}.$$

Пусть теперь α – произвольное число, удовлетворяющее условию $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$. Покажем, что решение u уравнения (3) не удовлетворяет $\|u\| \ge \delta$, и поэтому α_0 не является асимптотической точкой бифуркации. Действительно, пусть $u = \alpha f(u)$. Тогда $\alpha Au = \alpha f(u) + \alpha\omega(u) = u + \alpha\omega(u)$ или $u = \alpha Au - \alpha\omega(u)$. Из равенства $u = (I - \alpha_0 A)^{-1}(u - \alpha_0 Au)$ следует, что

$$\|u\|_E \le \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|\|u - \alpha_0 Au\|_E = \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|\|\alpha Au - \alpha\omega(u) - \alpha_0 Au\|_E \le$$

$$\le |\alpha - \alpha_0| \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\| \|A\| \|u\|_E + |\alpha| \|(I - \alpha_0 A)^{-1}\|\|\omega(u)\|_E \le (2/3)\|u\|_E.$$

Таким образом, $u = 0$, и мы пришли к противоречию с тем, что α_0 - точка бифуркации.

Пусть $\|A\| = 0$. По определению асимптотической производной $\theta = f(h) + \omega(h)$, где $\omega(h)/\|h\|_E \to 0$ при $\|h\|_E \to \infty$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольное число α, удовлетворяющее условию $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $\|u\| \ge \delta$ было выполнено

$$\|\omega(u)\|_E < \frac{\|u\|_E}{3(|\alpha_0| + \varepsilon)}.$$

Покажем, что решение u уравнения (3) не удовлетворяет $\|u\| \ge \delta$, и поэтому α_0 не является асимптотической точкой бифуркации. Действительно, пусть $u = \alpha f(u)$ и $\|u\| \ge \delta$. Тогда $u = -\alpha\omega(u)$. Из равенства $u = (I - \alpha_0 A)^{-1}(u - \alpha_0 Au)$ следует, что

$$\|u\|_E \le \|-\alpha\omega(u)\|_E \le (|\alpha_0| + \varepsilon)\|\omega(u)\|_E \le (1/3)\|u\|_E.$$

Таким образом, $u = 0$, и мы пришли к противоречию с тем, что α_0 – точка бифуркации.

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 3 частично совпадает с утверждением теоремы 3.1 из [5]. В отличие от теоремы 3.1 из [5] оператор f не обязательно компактный.

Заключение

Итак, в настоящей работе было введено новое понятие сильно уплотняющего оператора на бесконечности.

Приведен пример сильно уплотняющего оператора на бесконечности, не являющегося компактным, уплотняющим, даже (k,ψ)-ограниченным. Показано, что сильно уплотняющие операторы на бесконечности образуют линейное пространство и, следовательно, указан метод построения таких операторов. Доказано, что если сильно уплотняющего оператора на бесконечности. операторы асимптотически линейные, то их асимптотическая производная компактна. Рассмотрено приложение введенного понятия к теории точек бифуркации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Садовский Б.Н., Родкина А.Е.** Меры некомпактности и уплотняющие операторы. - Новосибирск: Наука, 1986.
2. **Красносельский А.М.** Асимптотика нелинейностей и операторные уравнения. - М.: Наука, 1992.
3. **Erzakova N.A.** On locally condensing operators, Nonlinear Analysis: Theory Methods Applications. 2012,75. no 8, 3552-3557.
4. **Ерзакова Н.А.** Почти-кольцо локально сильно уплотняющих операторов // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2012. - № 184(10). - С. 78-85.
5. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1956.
6. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.: Наука, 1966.
7. **Красносельский М.А**. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. - М.: Физматгиз, 1962.

ON STRONGLY CONDENSING OPERATORS AT INFINITY

Erzakova N.A.

The paper introduces the notion of an operator strongly condensing at infinity, which is a natural variation of the notion of a locally strongly condensing operator at a finite point (introduced by the author earlier). It turns out that if such an operator is asymptotically linear, then its asymptotic derivative is compact. In particular, this notion allows to build examples of operators that are neither compact, nor condensing, not even (k,ψ)-bounded. Such operators form a linear space. Some applications of the notion to the theory of bifurcation points are discussed.

Key words: measure of noncompactness, condensing operator, locally strongly condensing operator, asymptotically linear operator, asymptotic derivative, bifurcation point.

Сведения об авторе

Ерзакова Нина Александровна, окончила НГУ (1976), доктор физико-математических наук, профессор МГТУ ГА, автор более 60 научных работ, область научных интересов – теория неподвижных точек, меры некомпактности, уплотняющие операторы, интегральные операторы, пространства С.Л. Соболева, краевые задачи для уравнений с частными производными.