

МАШИНОСТРОЕНИЕ

- 2.5.12 – Аэродинамика и процессы теплообмена летательных аппаратов;
2.5.13 – Проектирование, конструкция и производство летательных аппаратов;
2.5.14 – Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов;
2.5.15 – Тепловые электроракетные двигатели и энергоустановки
летательных аппаратов;
2.5.16 – Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов*

УДК 62-233.3
DOI: 10.26467/2079-0619-2023-26-6-75-87

Анализ используемых подходов расчета эвольвентных шлицевых соединений и методы учета их влияния на динамическое поведение систем

И.В. Николаев¹, М.К. Леонтьев¹, В.В. Попов²

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

²*МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

Аннотация: Шлицевые соединения ввиду своих высоких параметров надежности и прочности широко распространены не только в машиностроении. Возможность обеспечивать передачу большого крутящего момента при достаточно большом ресурсе работы привела к активному использованию данных соединений в авиастроении. Поскольку в авиационных газотурбинных двигателях данный узел испытывает большие нагрузки, особое внимание уделяется не только прочностным характеристикам, но и влиянию на динамические параметры роторной системы. Для минимизации рисков разрушения и возникновения дефектов проводится большое количество исследований, позволяющих проводить оценку работы роторной системы со шлицами и прогнозировать ее поведение при возникновении различных факторов, приводящих к изменению работы шлицев. В данной статье проведен обзор различных методов, методик и моделей эвольвентных шлицевых соединений, использующихся при анализе динамического поведения роторных систем. Рассмотрены аналитические модели, позволяющие учитывать соединение в различных системах, и конечно-элементные модели, демонстрирующие описание различных процессов в шлицах. Исследованы работы, посвященные сравнению конечно-элементных моделей с аналитическими, подтверждающие результаты, связанные с динамическими характеристиками систем с ростом радиального и углового перекосов. Также представлены результаты сравнения вышеперечисленных моделей и их результатов с экспериментальными исследованиями для верификации и подтверждения различных эффектов. Приведенные исследования роторных систем с перекосом позволяют сделать вывод о существенном влиянии шлицев, поскольку они могут приводить к изменению жесткости соединения, перераспределению контакта, увеличению нагрузок в зацеплении, росту амплитуд вибраций, изменению спектра возбуждаемых частот и автоколебательным процессам вследствие различных факторов.

Ключевые слова: шлицевые соединения, верификация, автоколебания, перекося, моделирование.

Для цитирования: Николаев И.В., Леонтьев М.К., Попов В.В. Анализ используемых подходов расчета эвольвентных шлицевых соединений и методы учета их влияния на динамическое поведение систем // Научный Вестник МГТУ ГА. 2023. Т. 26, № 6. С. 75–87. DOI: 10.26467/2079-0619-2023-26-6-75-87

Analysis of the approaches used for calculating involute splined couplings and the methods of considering their influence on the dynamic behavior of systems

I.V. Nikolaev¹, M.K. Leontiev¹, V.V. Popov²

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

Abstract: Spline couplings, due to their high reliability and strength parameters, are widespread not only in mechanical engineering. The ability to transmit high torque with a sufficiently long service life has led to the extensive use of these couplings in the aircraft industry. Since this unit is under heavy loads in aircraft gas turbine engines, much attention is paid not only to strength characteristics, but also to the influence on the dynamic parameters of the rotor system. To mitigate the risks of destruction and the occurrence of defects, a large number of studies are carried out allowing us to evaluate the rotor system operation with splines and make a forecast of its behavior in the event of various factors leading to a change in the operation of splines. This paper provides a review of various methods, techniques and models of involute spline couplings used in the analysis of the dynamic behavior of rotor systems. The analytical models that allow us to take into account the coupling in various systems as well as finite element models that demonstrate the description of various processes in splines. The publications, devoted to the comparison of finite element models with analytical ones confirming the results associated with the dynamic characteristics of systems with an increase in radial and angular swashes, have been considered. The results of comparing the above models and their results with experimental research to verify and confirm various effects are also presented. The given research of rotor systems with swash allows for a conclusion about a significant spline influence, since they can cause a change in the coupling rigidity, redistribution of contact, increased loads in meshing, increased vibration amplitudes, change in the spectrum of excited frequencies and self-oscillatory processes due to various factors.

Key words: spline couplings, verification, self-oscillations, swash, simulation.

For citation: Nikolaev, I.V., Leontiev, M.K., Popov, V.V. (2023). Analysis of the approaches used for calculating involute splined couplings and the methods of considering their influence on the dynamic behavior of systems. Civil Aviation High Technologies, vol. 26, no. 6, pp. 75–87. DOI: 10.26467/2079-0619-2023-26-6-75-87

Введение

Эвольвентные шлицевые соединения получили большое распространение в авиационной технике благодаря высокой прочности, хорошей точности соединяемых деталей и возможности передавать большой крутящий момент. Повышенная прочность достигается благодаря большому количеству зубьев и утолщению зубьев к основанию, а коэффициенты концентрации напряжений при кручении в 1,5 раза ниже, чем у прямобочного соединения.

Для шлицевых соединений характерно неравномерное распределение нагрузки по длине, а поскольку данное соединение является высоконагруженным, то основной причиной потери работоспособности шлицев является повреждение рабочих поверхностей, а также усталостное разрушение зубьев. Поэтому расчет на прочность шлицевых соединений

включает расчет шлицевых валов на кручение при действии статических и переменных крутящих моментов и расчет зубьев [1].

При анализе динамического поведения роторных систем со шлицами более важным является оценка величины жесткости соединения, давление на контактирующих поверхностях, силы зацепления в шлицах, анализ контакта в зубьях и влияние шлицев на амплитудно-частотную характеристику системы. Рассматривая эвольвентное шлицевое соединение в составе роторной системы, необходимо отметить существование таких факторов, как радиальный и угловой перекося, которые могут приводить к увеличенной нагруженности соединения и являться причинами роста амплитуд вибраций и изменения собственных частот. В связи с этим шлицевые соединения в динамических системах невозможно рассматривать как абсолютно жесткие. Целесообразным методом анализа влияния шлицев является разработка моде-

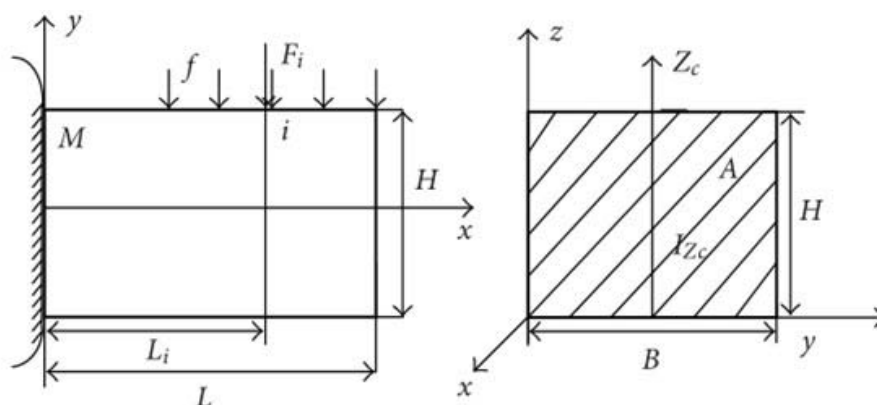


Рис. 1. Схема шлица, представляемого в виде балки
Fig. 1. The spline scheme represented as a beam

лей, позволяющих учитывать вышеперечисленные факторы.

Подобные математические решения позволяют моделировать поведение роторных систем и оценивать влияние шлицевого соединения на динамические параметры при различных условиях – учете боковых зазоров, возникновении радиального и углового перекосов, вариативных законах трения, посадках.

Целью настоящего исследования является анализ существующих моделей, позволяющих учитывать шлицевые соединения и их влияние на роторные системы для решения практических задач проектирования авиационных газотурбинных двигателей (ГТД).

Модели шлицевого соединения

Базовый метод расчета шлицевых муфт основывается на формулах изгиба балки [2]. Представление зуба в виде балочного элемента позволяет определить напряжения достаточно простым методом. Кроме того, контакт между зубьями наиболее часто описывается по теории Герца, что позволяет достаточно просто описывать касательные напряжения и напряжения сжатия в шлицах. Модели, использующие такие допущения, могут не обладать высокой точностью, но дают возможность предварительной оценки нагрузок и напряжений в соединении без использования значительных вычислительных ресурсов.

Одной из первых работ, посвященных вопросам шлицевого соединения с перекосом и действующим в нем силам, можно назвать работу [3]. Автором представлен механизм действующих в перекошенном соединении сил, показано их распределение и предложены простые формулы для оценки рождающихся усилий. Используемые простые соотношения могут быть полезны при оценке предельных нагрузок, действующих в шлицевой муфте. Также автором представлен алгоритм определения зазоров в соединении для каждого зуба. По результатам данной работы можно заключить, что возникающие в шлицевой муфте нагрузки зависят не только от геометрических параметров, но и от величины перекоса и коэффициента трения. Также данная работа продемонстрировала важность учета податливости зубьев, поскольку в случае описания зуба как абсолютно жесткого тела нагрузка в соединении будет передаваться лишь одной парой шлицев, в то время как учет деформаций шлица приводит к распределению передаваемых нагрузок. Это формирует определенные условия к создаваемым математическим моделям динамических систем со шлицевыми соединениями.

Наиболее распространенным методом описания деформаций шлица является представление его в виде балки, упругая деформация которой определяется как сумма деформаций изгиба, сдвига и упругого основания (рис. 1) [4, 5].

В соединении жесткость и силы, действующие на зуб, рассматриваются отдельно для каждого шлица, а результирующие усилия вычисляются как суммарные. Авторами исследуется влияние величины несоосности на силы в зацеплении и жесткость соединения. В результатах исследования отмечается нелинейное поведение сил зацепления и жесткости в зависимости от величины перекоса.

Одним из важных параметров в соединении является распределение нагрузки по шлицам. Аналитические модели, используемые при подобных расчетах, учитывают зазор по боковым поверхностям в шлицевом соединении, что позволяет контролировать степень взаимного проникновения при перекосах и оценивать влияние данного зазора на контакт. В исследованиях [6–8] авторами показано влияние величины перекоса на распределение контакта между зубьями, на жесткость соединения и влияние зазора по боковым поверхностям на нагрузку на зуб. Изменение контактирующих поверхностей происходит главным образом при росте перекоса. Величина зазора между боковыми поверхностями зубьев может перераспределить контакт только в двух крайних случаях – учет зазора и его отсутствие. При сравнении двух разных величин зазора можно отметить лишь рост нагрузки в контактирующих поверхностях, но не их перераспределение.

Влияние же перекоса на распределение контакта в шлицах приводит к увеличению давления на зубьях. Контактующие зоны смещаются, становятся более узкими. Поведение жесткостных характеристик имеет более нелинейный характер – величина радиальной жесткости падает, в то время как угловые коэффициенты возрастают. Однако данный эффект наблюдается лишь при небольших величинах крутящего момента в соединении – при дальнейшем увеличении нагрузки характеристика угловой жесткости становится похожей на радиальную.

Эти исследования позволяют выделить основные параметры, которые необходимо учитывать при создании аналитических моделей. Их сравнение с экспериментальными исследованиями или результатами конечно-

элементного моделирования позволяет говорить о верификации и подтверждении протекающих процессов.

Значительное количество работ посвящено сравнению аналитических и конечно-элементных (КЭ) моделей шлицевых соединений. Например, в работах [9–12] сопоставляются шлицы под действием нескольких величин перекоса (от 20 до 100 мкм) с различной величиной крутящего момента (от 100 до 5000 Н·м). В каждой из моделей отмечается перераспределение контактирующих шлицев, рост напряжений в контакте с ростом величины перекоса (174,8, 215,6 и 276 МПа для 0,02, 0,04 и 0,08 мм соответственно, [11]), увеличение сил зацепления. При верификации аналитических моделей в работах отмечены количественные различия. Авторы [10] связывают несовпадение с допущениями аналитической модели о том, что зацепление зубьев осуществляется одновременно и угловые смещения, создаваемые деформацией зубьев, равны. Предлагается следующее соотношение, позволяющее оценить величину зазора при возникновении радиального перекоса:

$$\eta_j = \eta_0 - e \cdot \cos\left(\varphi_j - \frac{\pi}{2} + \beta\right).$$

Здесь η_0 – зазор со стороны зуба при нормальном состоянии, φ_j – угол между зубом j и положительным направлением оси X , β – угол давления.

Представленные работы показывают необходимость верификации аналитических моделей с экспериментами и подтверждения полученных результатов с использованием конструкций и условий, применяемых в реальных системах. Также подобная необходимость связана с трудностями моделирования определенных процессов и их учетом в численных моделях.

Например, авторы работы [13] проводили сопоставление результатов, полученных в КЭ-модели, эксперименте и аналитически. В анализе использовались различные виды посадок в соединении – натяги величиной 0,05 и 0,03 мм, зазоры величиной 0,03, 0,05 мм

и 0 мм, а также исследовалось влияние усилий предварительной затяжки на жесткость соединения. По результатам верификации аналитическая модель показывала значительные расхождения с результатами конечно-элементного моделирования и эксперимента. Авторы связывают данный эффект с потерей жесткости шлицевого соединения, обусловленной скольжением контактных поверхностей, и предлагают использовать параметрическую КЭ-модель при моделировании динамики ротора.

Также отмечаются исследования, связанные со сравнением жесткостных характеристик моделей и экспериментальных установок. Авторами [14] предложено сравнение результатов по статической жесткости роторной системы, полученной экспериментально, и конечно-элементной модели. Следует отметить, что при моделировании использовались три различных вида контакта между центрирующими поясками шлицев – зафиксированные относительно друг друга, контакт с трением (коэффициент трения скольжения 0,22) и параметрический (описывается с использованием модулей упругости двух контактирующих деталей). По результатам анализа наилучшее совпадение с экспериментальными данными показывает контактная модель.

В исследованиях [15] также анализируются результаты трех видов моделей – аналитической, конечно-элементной и экспериментальной. Распределение контактного давления в соединении получено для двух значений крутящего момента – 16,4 и 26,2 Н·м. Можно заметить, что в обоих случаях присутствуют две характерные зоны – зона повышенного давления, расположенная ближе к концу шлицевого соединения, и зона пониженного давления, находящаяся на длине 0,4–0,5 от длины соединения. Авторы отмечают существование отдельных зон с противоречивыми результатами, несмотря на хорошее совпадение. Приближения результатов авторы добивались путем корректирующих коэффициентов, выбираемых путем минимизации как стандартного отклонения, так и средней абсолютной ошибки.

Изучение влияния углового перекоса на величину деформаций и жесткость зубьев

шлицевого соединения представлено в работе [16]. Рассматривая соединение при трех значениях углового перекоса (0, 5' и 10'), сравнивают результаты между конечно-элементной моделью, экспериментом и численной моделью, предложенной авторами для оценки величин деформаций. Отмечается хорошее совпадение результатов – разница между результатами эксперимента и КЭ-модели составляет 7,6 %, а между аналитической моделью и экспериментом – 8,5 %. Также можно заметить, что увеличение величины угловой несоосности приводит к увеличению деформаций зубьев и падению жесткости зуба.

В некоторых исследованиях шлицевых соединений под действием перекоса рассматривается эффект самоцентрирования. Данный процесс происходит при действии крутящего момента, приводящего к возникновению центрирующего момента между поверхностями шлицев, находящихся в контакте. Например, в работе [17] авторами проводится сравнение результатов аналитической, численной и экспериментальной моделей на предмет величины центрирующего момента в перекошенном шлицевом соединении. Разработанная численная модель отличается от аналитических формул, доступных в литературе, итерационным вычислением контактной площадки зуба, а также учетом его жесткости и угла смещения. По результатам проведенного сравнения авторы отмечают значительное расхождение между аналитическими и экспериментальными исследованиями. Данные же численной модели более близки к экспериментальной, однако также имеют несовпадение – авторы связывают это с учетом лишь одной пары зубьев в зацеплении. Улучшение результатов может быть достигнуто путем учета фактического количества контактирующих зубьев.

Влияние шлицевого соединения на динамическое поведение системы

Влияние несоосности в шлицевом соединении не ограничивается жесткостными или прочностными характеристиками. Значи-

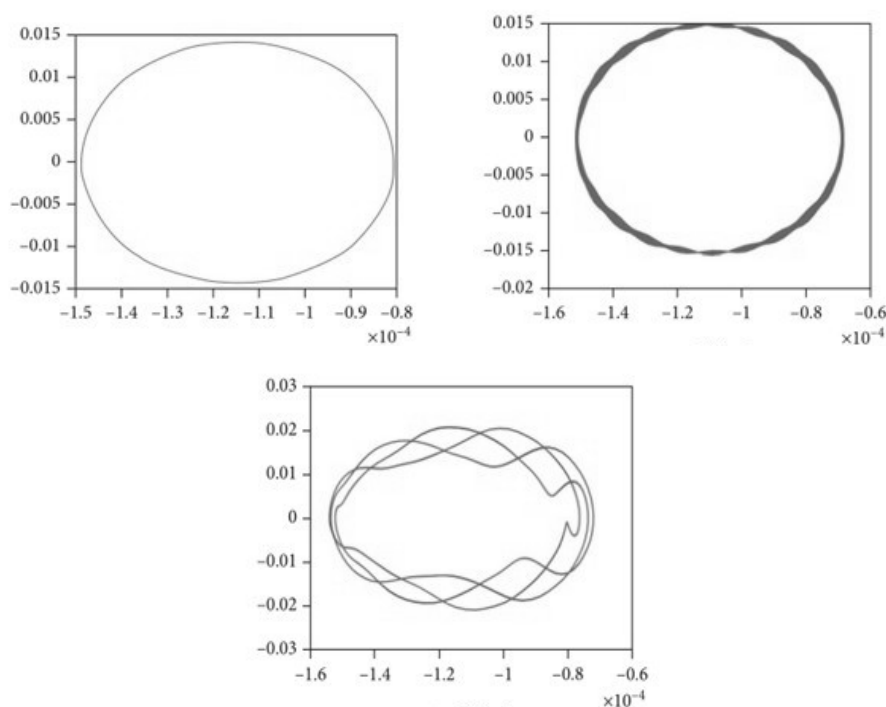


Рис. 2. Орбиты движения роторной системы
Fig. 2. Orbits of the rotor system motions

тельное влияние оказывается и на такие динамические параметры, как положение критических скоростей, амплитуды вибраций, спектр возбуждаемых частот и устойчивость системы.

Особый интерес представляют исследования, связанные с влиянием шлицевой муфты с перекосом на спектр возбуждаемых частот. Работа [18] посвящена анализу двухвальной системы на шариковых подшипниках, соединенной шлицевой муфтой. Возникновение радиального перекоса позволяет увидеть в спектре возбуждаемых частот гармоники x_1 , x_2 в горизонтальном направлении и x_1 и $x_{2,5}$, а также частоту 70 Гц, близкую к четвертой критической скорости системы (69 Гц) в вертикальном направлении. При возникновении углового перекоса на спектре частот присутствуют лишь гармоники x_1 (в обоих направлениях) и x_2 (в вертикальном направлении), а при действии одновременно двух видов несоосности в вертикальном направлении также возбуждается частота 34 Гц.

Например, авторы исследования [19] анализируют модель двух валов, соединенных шлицевым соединением с перекосом. При

постоянном значении скорости вращения и перекоса в вертикальной плоскости (4000 об/мин и $1 \cdot 10^{-5}$ м соответственно) и одновременном увеличении перекоса в горизонтальной плоскости (от 273 до 283 мкм) наблюдается переход к квазипериодическому состоянию системы. Дальнейшее увеличение несоосности до 305 мкм приводит к переходу в мультипериодическое и хаотическое состояние, что делает систему весьма неустойчивой и подверженной высоким нагрузкам (рис. 2). Данные результаты подтверждаются спектром возбуждаемых частот и диаграммами Пуанкаре.

Верификация аналитических моделей может проводиться также с позиции сравнения таких параметров системы, как собственные частоты и спектр возбуждения. Как правило, экспериментальные модели таких работ состоят из двух роторов, соединенных между собой шлицевой муфтой, имеющих две опоры (для каждого вала) и приводящихся во вращение электромотором. В некоторых работах установка состоит из электромотора и вала, соединенных между собой шлицами, которые являются объектом исследования.

Авторы статьи [20] приводят результаты сравнения первых четырех собственных частот, полученных на экспериментальной системе и с использованием аналитической модели, использующей метод матриц перехода Риккати. Разница между полученными данными не превышает 3 %.

Верификация аналитической модели в работе [21] проведена с позиции анализа влияния перекоса на спектр возбуждаемых частот. Как показывают результаты, рост перекоса приводит не только к возбуждению трех дополнительных частот (32, 49 и 66 Гц), но и к росту амплитуд по первой и второй частотам. При сравнении с результатами эксперимента авторами отмечается некоторое расхождение, связанное с упрощением модели, а также учетом процессов трения.

При верификации аналитических моделей и полученных в процессе их расчета данных также часто проводят анализ роторных систем с исследованием типа посадки шлицев на динамику системы. Как правило, рассматриваются три качественных типа посадки – с зазором, с натягом и переходная. Основными зависящими параметрами являются критические скорости и амплитуды вибраций.

Исследования, проведенные в работах [22, 23], показывают, что критическая скорость динамической системы со шлицевой муфтой увеличивается при посадке с натягом или при свободной посадке. Помимо влияния посадки отмечается влияние условий смазывания самого соединения. По результатам исследований авторы заключают, что при использовании жесткой посадки отмечается уменьшение амплитуд вибраций относительно переходной посадки. Однако данные выводы справедливы лишь для соединения без смазки; в случае наличия смазывающего материала амплитуды вибраций распределяются ровно наоборот. Посадка с зазором показывает меньшие вибрации относительно переходной посадки, что указывает на ее целесообразное использование при больших величинах внешнего демпфирования. При наличии смазывающего материала в шлицах критическая скорость системы при посадке с натягом – 3273 об/мин, а для системы с переходной посадкой – 3207 об/мин.

Рассматривая динамические системы со шлицевыми соединениями, нельзя не отметить важность учета и анализа воздействия силы трения на динамику шлицевого соединения. Изучение данного вопроса включает рассмотрение различных моделей трения, их влияние на положение критических частот и амплитуду вибраций, а также возможность возникновения автоколебательных процессов.

Как правило, автоколебательные процессы связывают с характеристикой трения. В работах [24–29] приведены примеры простейших механических систем, показывающих возможность действия силы трения не как диссипативного процесса, а как возбуждающей силы. Одним из условий появления подобного явления указывается наличие участка падения на характеристике трения. Однако в некоторых исследованиях авторами отмечено изменение амплитудно-частотных характеристик системы при переходе от влажного трения к сухому.

Например, в работе [30] исследуется связь между величиной трения и автоколебательными процессами. Рассматривается численная модель роторной системы из двух валов, соединенных шлицевой муфтой, и имеющей три опоры в виде подшипников. Шлицевое соединение описывается как матрица жесткости с коэффициентами радиальных и угловых значений. Используя каскадные диаграммы, авторы показывают, что в случае вязкого трения (коэффициент трения 0,05) присутствует лишь частота вращения. Однако с увеличением трения (рост коэффициента от 0,1 до 0,3) появляется еще одна собственная частота колебаний. При этом амплитуды вибраций по данной частоте и ее положение на каскадной диаграмме напрямую зависели от величины трения. Авторы связывают данный эффект автоколебательного процесса в системе с вращением модели выше критической частоты и достаточной величиной силы трения. Однако при работе ниже критической скорости система остается устойчивой и трение мало влияет на амплитудно-частотные характеристики. Отмечается, что, несмотря на реализацию данного эффекта, его исследование не было достаточным ввиду простоты

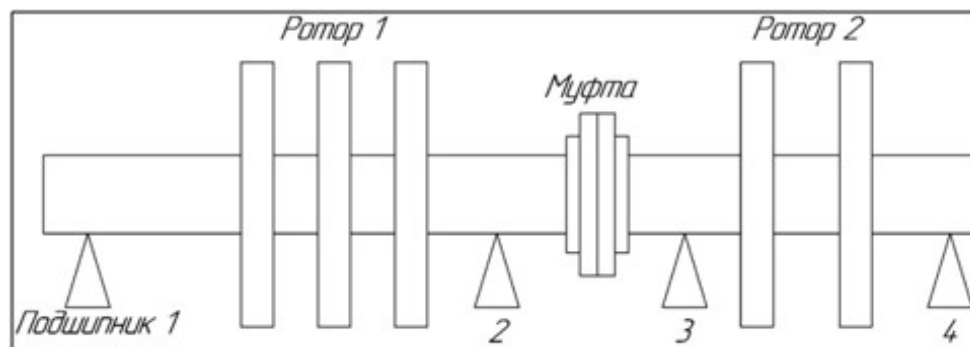


Рис. 3. Схема исследуемой системы
Fig. 3. The scheme of the system under study

модели и нуждается в экспериментальном подтверждении.

В исследовании [31] авторами представлены результаты динамического поведения роторной системы с тремя типами муфт – жесткой, шлицевой и податливой (рис. 3).

Согласно полученным результатам пороговая частота системы находится в окрестности 3450 об/мин. Потеря устойчивости при вращении выше данной частоты может быть вызвана эффектом «масляного вихря» подшипника скольжения 2 или автоколебательным процессом от шлицевой муфты. В результатах проведенного эксперимента отмечается, что при увеличении частоты вращения от 3050 до 3300 об/мин потеря устойчивости ротора связана с возникновением масляного вихря в подшипнике 2. При дальнейшем увеличении частоты вращения вибрации ротора 1 остаются прежними, в то время как для ротора 2 наблюдается рост вибраций по гармонике, равной 0,6875 от частоты вращения. При уменьшении частоты вращения амплитуда данной формы колебаний может достигать больших значений.

Исходя из полученных результатов авторы отмечают, что первая критическая частота, связанная с большими вибрациями ротора 1, равна 1650 об/мин, а вторая, связанная с вибрациями ротора 2, – 2280 об/мин. Следовательно, потеря устойчивости ротора на частоте 3302 об/мин обусловлена появлением автоколебаний шлицевой муфты.

Работа [32] посвящена анализу возникновения автоколебательного процесса вслед-

ствие перекоса из-за различных посадок на центрирующих поверхностях. Разработанная авторами численная модель, учитывающая силу трения между поверхностями зубьев, позволяет определять коэффициент трения и его влияние на частоты системы. Используя для решения β -метод Ньюмарка, авторы реализуют трение между шлицами и как компоненту матрицы демпфирования, и как компоненту матрицы жесткости, что позволяет смоделировать прямое влияние на спектр частот.

По результатам исследований системы с тремя различными типами посадок (натяг на двух поверхностях; натяг на поверхности 1, зазор на поверхности 2 и зазор на двух поверхностях) авторы отмечают, что при появлении посадки с зазором при увеличении числа оборотов ротора в спектре возбуждения можно наблюдать появления субгармонической частоты, а также рост вибраций. Сброс скорости вращения приводит к резкому падению амплитуд, и система возвращается в устойчивое положение.

Заключение

В рассмотренных работах продемонстрированы различные подходы к расчету, анализу и оценке влияния шлицевых соединений в роторных системах на динамические характеристики этих систем. Можно отметить, что в последнее десятилетие количество работ, посвященных математическому моделирова-

нию шлицевых соединений с перекосом, значительно возросло. При рассмотрении различных методов учета всех возможных эффектов авторами проводится верификация создаваемых моделей с результатами экспериментальных исследований, что говорит о достоверности получаемых результатов. Использование аналитических методов анализа зацепления позволяет проектировать динамические системы со шлицевыми муфтами с учетом перераспределения контакта, увеличения давления и нагрузок, влияния посадки и перекоса на амплитудно-частотные характеристики.

Изучаемый эффект возникновения субгармонических частот в спектре также находит экспериментальное подтверждение. Выполненные в данном направлении работы указывают на необходимость учета в моделях законов трения, которое, согласно многим источникам, является одной из основных причин возбуждения таких частот.

Список литературы

1. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: справочник. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1979. 704 с.
2. Dudley D.W. How to design involute splines // Product Engineering, 1957. October. Pp. 75–80.
3. Crease A.B. Forces generated by gear couplings // Proceedings of the International Conference on Flexible Couplings for High Powers and Speeds, 1977. June 29 – July 1. Pp. 572–578.
4. Zhao G., Liu Z., Chen F. Meshing force of misalignment spline coupling and the influence on rotor system [Электронный ресурс] // International Journal of Rotating Machinery. 2008. Vol. 2008. 8 p. DOI: 10.1155/2008/321308 (дата обращения: 03.12.2022).
5. Liu Z., Zhao G. Modeling research on radial force in gear coupling with parallel misalignment [Электронный ресурс] // 12th IFToMM World Congress. Besancon, France, 2007. URL: https://www.europeana.eu/en/item/2020801/dmglb_handler_docum_20363009 (дата обращения: 03.02.2023).
6. Xue X. Nonlinear dynamic load analysis of aviation spline coupling with mass eccentricity and misalignment / X. Xue, Q. Huo, J. Liu, J. Jia [Электронный ресурс] // Advances in Mechanical Engineering. 2021. Vol. 13, no. 2. 19 p. DOI: 10.1177/1687814021996 (дата обращения: 03.02.2023).
7. Hong J., Talbot D., Kahraman A. A stiffness formulation for spline joints [Электронный журнал] // Journal of mechanical design. 2016. Vol. 138, no. 4. 8 p. DOI: 10.1115/1.4032631 (дата обращения: 03.02.2023).
8. Wink C.H., Nakandakar M. Influence of gear loads on spline coupling // Power Transmission Engineering. 2014. Pp. 42–49.
9. Curà F., Mura A., Gravina M. Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment // Journal of mechanical engineering science. 2015. Vol. 227, iss. 10. Pp. 2195–2205. DOI: 10.1177/0954406212471916
10. Hu Y. Study on the meshing force of misaligned gear coupling / Y. Hu, H. Wang, Y. Tan, L. Jiang, S. Jiang // Proceedings of the 2016 International Forum on Mechanical, Control and Automation (IFMCA 2016), 2016. Vol. 113. Pp. 452–458. DOI: 10.2991/ifmca-16.2017.70
11. Bai J. Dynamic simulation analysis on axle spline of high-speed train gauge-change system / J. Bai, W. Wang, P. Zhou, Y. Wang [Электронный ресурс] // Shock and Vibration. 2021. Vol. 2021, ID: 8866405. P. 19. DOI: 10.1155/2021/8866405 (дата обращения: 03.02.2023).
12. Curà F., Mura A. Analysis of a load application point in spline coupling teeth // Journal of Zhejiang University-Science A. 2014. Vol. 15, no. 4. Pp. 302–308. DOI: 10.1631/jzus.A1300323
13. Zhang Q. Study on the stiffness loss and its affecting factors of the spline joint used in rotor system / Q. Zhang, W. Li, Z. Liang, J. Hong [Электронный ресурс] // Proceedings of ASME Turbo Expo. 2014. 11 p. DOI: 10.1115/GT2014-26176 (дата обращения: 03.02.2023).

14. **Wu F.** Bending stiffness and dynamic characteristics of a rotor with spline joints [Электронный ресурс] / F. Wu, Z. Liang, Y. Ma, D. Zhang // Proceedings of the ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 4A: Dynamics, Vibration and Control. San Diego, California, USA. November 15–21, 2013. 7 p. DOI: 10.1115/IMECE2013-62657 (дата обращения: 03.02.2023).
15. **Cuffaro V., Curà F., Mura A.** Analysis of the pressure distribution in spline couplings // Journal of Mechanical Engineering Science. 2012. Vol. 226, no. 11. Pp. 2852–2859. DOI: 10.1177/0954406212440670
16. **Curà F., Mura A.** Experimental procedure for evaluation of tooth stiffness in spline coupling including angular misalignment // Mechanical Systems and Signal Processing. 2013. Vol. 40. Pp. 545–555. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.06.033
17. **Curà F., Mura A.** Experimental and theoretical investigation about reaction moments in misaligned splined couplings // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45. Pp. 504–512. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.12.005
18. **Gupta T.C., Gupta K.** Modeling of flexible coupling to connect misalignment flexible rotors supported on ball bearing [Электронный ресурс] // Proceedings of ASME Turbo Expo. 2014. 14 p. DOI: 10.1115/GT2014-26891 (дата обращения: 03.02.2023).
19. **Xue X., Huo Q., Liu J.** Nonlinear vibration characteristic of the involute spline coupling in aero engine with the parallel misalignment [Электронный ресурс] // International Journal of Aerospace Engineering. 2021. Vol. 2021. ID: 6689442. 19 p. DOI: 10.1155/2021/6689442 (дата обращения: 03.02.2023).
20. **Su X.** Analysis of dynamic characteristic for misalignment-spline gear shaft based on whole transfer matrix method / X. Su, H. Lu, X. Zhang, W. Fan, Y. Zhang // Journal of Vibroengineering. 2018. Vol. 20, no. 5. Pp. 1392–1408. DOI: 10.21595/jve.2017.18761
21. **Wei F.** Dynamic Characteristics of gear coupling and rotor system in transmission process considering misalignment and tooth contact analysis / F. Wei, L. Hong, Z. Yongquan, S. Xiangang [Электронный ресурс] // Processes. 2020. Vol. 8, iss. 11. 23 p. DOI: 10.3390/pr8111336 (дата обращения: 03.02.2023).
22. **Jing J., Gao T., Chen Ch.** The study on spline coupling dynamic coefficients and its impact on rotor stability // 23rd International Congress on Sound and Vibration 2016 (ICSV 23). Greece, Athens, 2016. Pp. 3390–3397.
23. **Dai Z.** Extensive experimental study on the stability of rotor system with spline coupling / Z. Dai, J. Jing, C. Chen, J. Cong [Электронный ресурс] // Proceedings of the ASME Turbo Expo 2018: Turbomachinery Technical Conference and Exposition, 2018. Vol. 7A: Structures and Dynamics. Oslo, Norway, 11–15 June 2018. V07AT33A021. ASME. DOI: 10.1115/GT2018-76262 (дата обращения: 03.02.2023).
24. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
25. **Харкевич А.А.** Автоколебания. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1954. 172 с.
26. **Хейл Дж.К.** Колебания в нелинейных системах: пер. с англ. М.: Мир, 1966. 232 с.
27. **Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник.** В 3 т. / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 1864 с.
28. **Магнус К.** Колебания: Введение в исследование колебательных систем: пер. с нем. М.: Мир, 1982. 304 p.
29. **Попов В.Л.** Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
30. **Zhu H., Chen W., Zhu R. et al.** Modeling and dynamic analysis of spline-connected multi-span rotor system // Meccanica. 2020. Vol. 55. Pp. 1413–1433. DOI: 10.1007/s11012-020-01163-9
31. **Zhao G.** Study of stabilities of rotor-bearing system with different types of couplings / G. Zhao, Z. Liu, Y. Wang, J. Zhang [Электронный ресурс] // Proceedings of the ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea, and Air, 2009. Vol. 6: Structures and Dynamics, Parts A and B. Orlando, Florida, USA,

8–12 June 2009. Pp. 919–928. DOI: 10.1115/GT2009-59751 (дата обращения: 03.02.2023).

32. Wang T. Stability analysis of rotor with a spline coupling / T. Wang, Y. Wang, M. Liu, Z. Zhong [Электронный ресурс] // *Journal of Physics: Conference Series*. 2022. 13 p. DOI: 10.1088/1742-6596/2252/1/012001 (дата обращения: 03.02.2023).

References

- 1. Birger, I.A., Shorr, B.F., Iosilevich, G.B.** (1979). Calculation of machine parts strength: Handbook. 3rd ed., pererab. i dop. Moscow: Mashinostroyeniye, 704 p. (in Russian)
- 2. Dudley, D.W.** (1957). How to design involute splines. *Product Engineering*, October, pp. 75–80.
- 3. Crease, A.B.** (1977). Forces generated by gear couplings. In: *Proceedings of the International Conference on Flexible Couplings for High Powers and Speeds*, June 29–July 1, pp. 572–578.
- 4. Zhao, G., Liu, Z., Chen, F.** (2008). Meshing force of misalignment spline coupling and the influence on rotor system. *International Journal of Rotating Machinery*, vol. 2008, 8 p. DOI: 10.1155/2008/321308 (accessed: 03.02.2023).
- 5. Liu, Z., Zhao, G.** (2007). Modeling research on radial force in gear coupling with parallel misalignment. In: *12th IFToMM World Congress*, Besancon, France. Available at: https://www.europeana.eu/en/item/2020801/dmg_lib_handler_docum_20363009 (accessed: 03.02.2023).
- 6. Xue, X., Huo, Q., Liu, J., Jia, J.** (2021). Nonlinear dynamic load analysis of aviation spline coupling with mass eccentricity and misalignment. *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 13, no. 2, 19 p. DOI: 10.1177/1687814021996 (accessed: 03.02.2023).
- 7. Hong, J., Talbot, D., Kahraman, A.** (2016). A stiffness formulation for spline joints. *Journal of mechanical design*, vol. 138, no. 4, 8 p. DOI: 10.1115/1.4032631 (accessed: 03.02.2023).
- 8. Wink, C.H., Nakandakar, M.** (2014). Influence of gear loads on spline coupling. *Power Transmission Engineering*, pp. 42–49.
- 9. Curà, F., Mura, A., Gravina, M.** (2015). Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment. *Journal of mechanical engineering science*, vol. 227, issue 10, pp. 2195–2205. DOI: 10.1177/0954406212471916
- 10. Hu, Y., Wang, H., Tan, Y., Jiang, L., Jiang, S.** (2016). Study on the meshing force of misaligned gear coupling. In: *Proceedings of the 2016 International Forum on Mechanical, Control and Automation (IFMCA 2016)*, vol. 113, pp. 452–458. DOI: 10.2991/ifmca-16.2017.70
- 11. Bai, J., Wang, W., Zhou, P., Wang, Y.** (2021). Dynamic simulation analysis on axle spline of high-speed train gauge-change system. *Shock and Vibration*, vol. 2021, ID: 8866405, p. 19. DOI: 10.1155/2021/8866405 (accessed: 03.02.2023).
- 12. Curà, F., Mura, A.** (2014). Analysis of a load application point in spline coupling teeth. *Journal of Zhejiang University-Science A*, vol. 15, no. 4, pp. 302–308. DOI: 10.1631/jzus. A1300323
- 13. Zhang, Q., Li, W., Liang, Z., Hong, J.** (2014). Study on the stiffness loss and its affecting factors of the spline joint used in rotor system. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 11 p. DOI: 10.1115/GT2014-26176 (accessed: 03.02.2023).
- 14. Wu, F., Liang, Z., Ma, Y., Zhang, D.** (2013). Bending stiffness and dynamic characteristics of a rotor with spline joints. In: *Proceedings of the ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Volume 4A: Dynamics, Vibration and Control*. San Diego, California, USA. November 15–21, 7 p. DOI: 10.1115/IMECE2013-62657 (accessed: 03.02.2023).
- 15. Cuffaro, V., Curà, F., Mura, A.** (2012). Analysis of the pressure distribution in spline couplings. *Journal of mechanical engineering science*, vol. 226, no. 11, pp. 2852–2859. DOI: 10.1177/0954406212440670
- 16. Curà, F., Mura, A.** (2013). Experimental procedure for evaluation of tooth

stiffness in spline coupling including angular misalignment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 40, pp. 545–555. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.06.033

17. Curà, F., Mura, A. (2014). Experimental and theoretical investigation about reaction moments in misaligned splined couplings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 45, pp. 504–512. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.12.005

18. Gupta, T.C., Gupta, K. (2014). Modeling of flexible coupling to connect misalignment flexible rotors supported on ball bearing. *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 14 p. DOI: 10.1115/GT2014-26891 (accessed: 03.02.2023).

19. Xue, X., Huo, Q., Liu, J. (2021). Nonlinear vibration characteristic of the involute spline coupling in aero engine with the parallel misalignment. *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2021, ID: 6689442, 19 p. DOI: 10.1155/2021/6689442

20. Su, X., Lu, H., Zhang, X., Fan, W., Zhang, Y. (2018). Analysis of dynamic characteristic for misalignment-spline gear shaft based on whole transfer matrix method. *Journal of Vibroengineering*, vol. 20, no. 5, pp.1392–1408. DOI: 10.21595/jve.2017.18761

21. Fan, W., Lu, H., Zhang, Y., Su, X. (2020). Dynamic Characteristics of gear coupling and rotor system in transmission process considering misalignment and tooth contact analysis. *Processes*, vol. 8, issue 11, 23 p. DOI: 10.3390/pr8111336 (accessed: 03.02.2023).

22. Jing, J., Gao, T., Chen, Ch. (2016). The study on spline coupling dynamic coefficients and its impact on rotor stability. In: *23rd International Congress on Sound and Vibration (ICSV 23)*. Athens, Greece, pp. 3390–3397.

23. Dai, Z., Jing, J., Chen, C., Cong, J. (2018). Extensive experimental study on the stability of rotor system with spline coupling. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2018:*

Turbomachinery Technical Conference and Exposition, vol. 7A: Structures and Dynamics. Oslo, Norway. June 11–15. V07AT33A021. ASME. DOI: 10.1115/GT2018-76262 (accessed: 03.02.2023).

24. Andronov, A.A., Vitt, A.A., Khaykin, S.E. (1959). Oscillation theory. Moscow: Fizmatgiz, 915 p. (in Russian)

25. Harkevich, A.A. (1954). Self-oscillations. Moscow: Gosudarstvennoye izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 172 p. (in Russian)

26. Hale, J.K. (1963). Oscillations in nonlinear systems. McGraw-Hill, 180 p.

27. Birger, I.A., Panovko, Y.G. (Eds.). (1968). Strength. Sustainability. Oscillations: Reference book. In 3 vols. Moscow: Mashinostroyeniye, 1864 p. (in Russian)

28. Magnus, K. (1982). Oscillations: An introduction to the study of oscillatory systems. Translated from German. Moscow: Mir, 304 p. (in Russian)

29. Popov, V.L. (2013). Mechanics of contact interaction and physics of friction. From nanotribology to earthquake dynamics. Moscow: FIZMATLIT, 352 p. (in Russian)

30. Zhu, H., Chen, W., Zhu, R. et al. (2020). Modelling and dynamic analysis of spline-connected multi-span rotor system. *Meccanica*, vol. 55, pp. 1413–1433. DOI: 10.1007/s11012-020-01163-9

31. Zhao, G., Liu, Z., Wang, Y., Zhang, J. (2009). Study on stabilities of rotor-bearing systems with different types of couplings. In: *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea, and Air. Volume 6: Structures and Dynamics*, Parts A and B. Orlando, Florida, USA. June 8–12, pp. 919–928. DOI: 10.1115/GT2009-59751 (accessed: 03.02.2023).

32. Wang, T., Wang, Y., Liu, M., Zhong, Z. (2022). Stability analysis of rotor with a spline coupling. *Journal of Physics: Conference Series*, 13 p. DOI: 10.1088/1742-6596/2252/1/012001 (accessed: 03.02.2023).

Сведения об авторах

Николаев Илья Витальевич, аспирант кафедры конструкции и проектирования двигателей Московского авиационного института, nikolka831@mail.ru.

Леонтьев Михаил Константинович, д. т. н., профессор кафедры конструкции и проектирования двигателей Московского авиационного института, lemka@alfatran.com.

Попов Валерий Васильевич, старший преподаватель кафедры прикладной механики МГТУ им. Баумана, vvpopov.bmstu@gmail.com.

Information about the authors

Ilya V. Nikolaev, Postgraduate Student of the Engine Design and Engineering Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), nikolka831@mail.ru.

Michael K. Leontiev, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Engine Design and Engineering Chair, Moscow Aviation Institute (National Research University), lemka@alfatran.com.

Valery V. Popov, Senior Lecturer of the Applied Mechanics Chair, Bauman Moscow State Technical University, vvpopov.bmstu@gmail.com.

Поступила в редакцию	21.04.2023	Received	21.04.2023
Одобрена после рецензирования	23.05.2023	Approved after reviewing	23.05.2023
Принята в печать	21.11.2023	Accepted for publication	21.11.2023