УДК 512.541

ГРУППА УМНОЖЕНИЙ ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ

Е.И. КОМПАНЦЕВА, А.А. ФОМИН

В работе описаны группы умножений, а также главные абсолютные идеалы жестких почти вполне разложимых абелевых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Показано, что в группах из этого класса любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой.

Ключевые слова: умножение на абелевой группе, кольцо на абелевой группе, почти вполне разложимые группы, абсолютный идеал.

Умножением на абелевой группе G называется любой гомоморфизм $\mu : G \oplus G \to G$. Группа $MultG = Hom(G \times G, G)$ называется группой умножений группы G. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. При исследовании колец на группе G в первую очередь возникает вопрос о ее подгруппах, являющихся идеалами в любой кольце на G, такие подгруппы называют абсолютными идеалами группы G. Проблема изучения абсолютных идеалов абелевых групп сформулирована в [1]. Очевидно, любая вполне характеристическая подгруппа абелевой группы является ее абсолютным идеалом. В [2] поставлена задача описания абелевых групп, для которых верно обратное утверждение, то есть любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой. Такие группы называют afi-группами. Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» везде в дальнейшем означает «абелева группа».

Настоящая работа посвящена изучению колец на почти вполне разложимых группах. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой, если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Почти вполне разложимые группы изучаются давно, им посвящены исследования многих авторов. Любая почти вполне разложимая группа содержит некоторую вполне характеристическую подгруппу A конечного индекса, которая является вполне разложимой и называется регулятором группы G. Факторгруппа G/A называется регуляторным фактором группы G, индекс подгруппы A в группе G – регуляторным индексом. Почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором часто называют ЦРФ-группами.

Пусть G – почти вполне разложимая группа, A – ее регулятор, $T(G) = T(A)$ – множество критических типов группы G [3]. Если типы прямых слагаемых A_τ ранга 1 группы A попарно не сравнимы, то группы G и A называются жесткими. В случае, когда $T(G)$ состоит только из идемпотентных типов, G называется группой кольцевого типа.

Далее везде G – это редуцированная почти вполне разложимая жесткая группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором $G/A = \langle d + A \rangle$ и регуляторным индексом n. Из теории вполне разложимых групп известно [3], что существует разложение $G = G_1 \oplus C$, в котором G_1 – жесткая ЦРФ-группа с регулятором B и множеством критических типов $T(G_1) \subset T(G)$, C – вполне разложимая группа. Это разложение называется главным. Существуют такие элементы $e_\tau \in A_\tau, \tau \in T(G)$, что группы B и C можно представить в виде $B = \bigoplus_{\tau \in T(B)} R_\tau e_\tau, C = \bigoplus_{\tau \in T(C)} R_\tau e_\tau$, где R_τ – подкольца с единицей кольца Q рациональных чисел. При этом $d \in B$ и выполняется

$$nd = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{n}{m_\tau} s_\tau e_\tau, \tag{1}$$

где $s_\tau \in Z$, $m_\tau \in N$ $(\tau \in T(G))$ – инварианты почти изоморфизма группы G. Равенство (1) называется стандартным представлением ЦРФ-группы G.

Так как в делимой оболочке $\overline{G_1} = \overline{B}$ группы G_1 элемент d можно представить в виде $d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_\tau$, а любой элемент $g \in G_1$ имеет вид $g = kd + b$ для некоторых $k \in Z, b \in B$, то в группе $\overline{G_1}$ элемент g можно представить в виде $g = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau$, где $r_\tau \in R_\tau$. В дальнейшем будем использовать такое представление элементов группы G_1.

Умножение $\mu : G \otimes G \to G$ часто будем обозначать знаком $\times$, то есть $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для $g_1, g_2 \in G$. Кольцо на группе G, определенное этим умножением, обозначается $(G,\times)$. Очевидно, в любом кольце $(G,\times)$ на жесткой группе G произведение $e_\tau \times e_\tau \in A_\tau$ при всех $\tau \in T(G)$ и $e_\tau \times e_\sigma = 0$ при $\tau \neq \sigma$.

Заметим, что если $(G,\times)$ – кольцо на G, то регулятор A и все его τ-однородные компоненты A_τ являются идеалами этого кольца. При этом определено кольцо $(\overline{A},\times)$ на делимой оболочке $\overline{A}$ группы A. При этом G – подкольцо кольца $(\overline{A},\times)$. Поскольку для любых элементов кольца $(\overline{A_\tau},\times)$ выполняется $(q_1 e_\tau) \times (q_2 e_\tau) = q_1 q_2 (e_\tau \times e_\tau)$, то это же верно в кольце $(G,\times)$. Поэтому для любых элементов $\mu_\tau \in R_\tau (\tau \in T(G))$ существует кольцо $(A,\times)$, в котором $e_\tau \times e_\tau = \mu_\tau e_\tau$. Однако не любое умножение на А продолжается до умножения на G.

Будем говорить, что элементы $\mu_\tau \in R_\tau (\tau \in T(G))$ определяют умножение на G относительно разложения $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$, если существует кольцо $(G,\times)$, в котором $e_\tau \times e_\tau = \mu_\tau e_\tau$.

Пусть для всех $\tau \in T(B)$ заданы элементы $x_\tau \in R_\tau$, будем обозначать $\overline{x_\tau} = x_\tau + m_\tau R_\tau \in R_\tau / m_\tau R_\tau, x_B = (x_\tau)_{\tau \in T(B)} \in \prod_{\tau \in T(B)} R_\tau, \overline{x_B} = (\overline{x_\tau})_{\tau \in T(B)} \in \prod_{\tau \in T(B)} (R_\tau / m_\tau R_\tau)$. Если $x_\tau \in Z$ и $(x_\tau, m_\tau) = 1$ для всех $\tau \in T(B)$, то $\overline{x_\tau}$ обратим в $R_\tau / m_\tau R_\tau$, обозначим $\overline{x_B}^{-1} = (\overline{x_\tau}^{-1})_{\tau \in T(B)} \in \prod_{\tau \in T(B)} (R_\tau / m_\tau R_\tau)$. Через x_τ^{-1} обозначим целое число, для которого $x_\tau x_\tau^{-1} + m_\tau v_\tau = 1$ при некотором $v_\tau \in Z$.

В следующей теореме описаны умножения на группах из рассматриваемого класса.

Теорема 1. Пусть G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа со стандартным представлением (1). Элементы $\mu_\tau (\tau \in T(G))$ определяют умножение на G относительно разложения $A = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau e_\tau$ тогда и только тогда, когда при всех $\tau \in T(B)$ имеем $\mu_\tau = m_\tau \delta_\tau$, где $\delta_\tau \in R_\tau$ и $\overline{\delta_B} = \alpha \overline{s_B}^{-1}$ при некотором $\alpha \in Z$.

Доказательство. Пусть $\mu_\tau \in R_\tau (\tau \in T(A))$, и пусть $\mu_\tau = m_\tau \delta_\tau, \delta_\tau = \alpha s_\tau^{-1} + m_\tau t_\tau \in R_\tau (t_\tau \in R_\tau)$ и $s_\tau s_\tau^{-1} = 1 + m_\tau v_\tau (v_\tau \in Z)$ при всех $\tau \in T(B)$. Очевидно, существует кольцо $(A,\times)$, в котором $e_\tau \times e_\tau = \mu_\tau e_\tau$ при всех $\tau \in T(A)$. Это умножение однозначно продолжается до умножения на делимой оболочке $\overline{A}$ группы A. Покажем, что G – подкольцо кольца $(\overline{A},\times)$. Представим d в виде $d = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{s_\tau}{m_\tau} e_\tau$, тогда

$$d\times d=\sum_{\tau\in T(B)}(\frac{s_\tau^{\ 2}}{m_\tau^{\ 2}}\mu_\tau)e_\tau=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{s_\tau^{\ 2}(\alpha s_\tau^{\ -1}+m_\tau t_\tau)}{m_\tau}e_\tau=\alpha d+\sum_{\tau\in T(B)}(\alpha v_\tau+s_\tau^{\ 2}t_\tau)e_\tau\in G.$$

Если $\tau\in T(B)$, то $d\times e_\tau=\frac{s_\tau}{m_\tau}(e_\tau\times e_\tau)=s_\tau\delta_\tau e_\tau\in A$. Если $\tau\in T(C)$, то $d\times e_\tau=0$, значит, $d\times A\subset A$ и $A\times d\subset A$. Так как любой элемент $g\in G$ можно представить в виде $g=kd+a$, где $k\in Z, a\in A$, то G – подкольцо кольца $(\overline{A},\times)$. Следовательно, элементы $\mu_\tau(\tau\in T(A))$ определяют умножение на G.

Пусть теперь элементы $\mu_\tau\in R_\tau(\tau\in T(A))$ определяют умножение на G относительно разложения $A=\bigoplus_{\tau\in T(G)}R_\tau e_\tau$. В [4] показано, что $B_\tau\times B_\tau\subset m_\tau B_\tau$ при всех $\tau\in T(B)$, поэтому $\mu_\tau=m_\tau\delta_\tau$ для некоторых $\delta_\tau\in R_\tau$. Так как $d\times d\in G$, то $d\times d=\alpha d+\sum_{\tau\in T(A)}b_\tau e_\tau$ при некоторых $\alpha\in Z$ и $b_\tau\in R_\tau(\tau\in T(B))$. Отсюда

$$d\times d=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{\alpha s_\tau+m_\tau b_\tau}{m_\tau}e_\tau. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$d\times d=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{s_\tau^2}{m_\tau^2}(e_\tau\times e_\tau)=\sum_{\tau\in T(B)}(\frac{s_\tau^2}{m_\tau}\delta_\tau)e_\tau. \tag{3}$$

Из (2) и (3) для всех $\tau\in T(B)$ получаем $\frac{s_\tau^2}{m_\tau}\delta_\tau=\frac{\alpha s_\tau+m_\tau b_\tau}{m_\tau}$, откуда $s_\tau^2\delta_\tau=\alpha s_\tau+m_\tau b_\tau$, то есть $\overline{s_\tau}^{-2}\overline{\delta_\tau}=\overline{\alpha}\,\overline{s_\tau}$, и, значит, $\overline{\delta_\tau}=\overline{\alpha}\,\overline{s_\tau}^{-1}$. Получили, что $\overline{\delta_B}=\overline{\alpha}\,\overline{s_B}^{-1}$.

Поскольку при фиксированном разложении $A=\bigoplus_{\tau\in T(G)}R_\tau e_\tau$ вектор $\overline{s_B}$ определен однозначно с точностью до множителя $\beta\in Z,(\beta,n)=1$, критерий того, что элементы $\mu_\tau(\tau\in T(G))$ определяют умножение на G, не зависит от выбора элементов $s_\tau(\tau\in T(G))$ в главном представлении группы G. Отметим также, что элементы $\mu_\tau(\tau\in T(G))$ могут определять умножение относительно одного разложения группы A и не определять ни одного умножения относительно другого разложения.

Для каждого $\alpha\in Z$ определим множество $M(\alpha)=\alpha m_B s_B^{\ -1}+\prod_{m_\tau\neq 1}m_\tau^2R_\tau\subset\prod_{m_\tau\neq 1}R_\tau$.

Пусть M – подгруппа группы $\prod_{m_\tau\neq 1}R_\tau$, порожденная множествами $M(\alpha), M=<M(\alpha)\,|\,\alpha\in Z>$.

Следствие 2. Если G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа со стандартным представлением (1), то $MultG\cong M\oplus\prod_{m_\tau=1}R_I$.

Пусть $EndG$ - кольцо эндоморфизмов группы G. Если $\Gamma\subset EndG, g\in G$ будем обозначать $\Gamma(\mathrm{g})=\{\varphi(\mathrm{g})\,|\,\varphi\in\Gamma\}$.

Лемма 3. Пусть G – жесткая ЦРФ-группа с главным представлением (1), $g=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau}{m_\tau}e_\tau+\sum_{\tau\in T(C)}c_\tau e_\tau\in G, L=\bigoplus_{\tau\in T(B)}r_\tau B_\tau\bigoplus\bigoplus_{\tau\in T(C)}c_\tau C_\tau$. Тогда $(EndG)(g)\subset<g>+L$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in EndG$, тогда, согласно [3], найдется $k\in Z$ и $t_\tau\in R_\tau$ такие, что $\varphi(e_\tau)=(k+m_\tau t_\tau)e_\tau$ при всех $\tau\in T(B)$. Следовательно,

$$\varphi(\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau}{m_\tau}e_\tau)=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau}{m_\tau}\varphi(e_\tau)=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau(k+m_\tau t_\tau)}{m_\tau}e_\tau=k\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau}{m_\tau}e_\tau+\sum_{\tau\in T(B)}r_\tau t_\tau e_\tau=$$

$kg-\sum_{\tau\in T(C)}kc_\tau e_\tau+\sum_{\tau\in T(C)}r_\tau t_\tau e_\tau\in<g>+L$. Так как $\varphi(\sum_{\tau\in T(C)}c_\tau e_\tau)=\sum_{\tau\in T(C)}c_\tau\varphi(e_\tau)\in\bigoplus_{\tau\in T(C)}c_\tau C_\tau\subset L$, то $\varphi(g)\in<g>+L$.

При изучении абсолютных идеалов групп важную роль играет понятие главного абсолютного идеала, поскольку любой абсолютный идеал является суммой главных. Главным абсолютным идеалом, порожденным элементом $g\in G$, называют наименьший абсолютный идеал $<g>_{AI}$, содержащий g.

В [1] определено множество $M(G)=<\Phi(g)\mid \mathrm{g}\in \mathrm{G}, \Phi\in \mathrm{Hom(G,End\,G)}>\subset \mathrm{End\,G}$,

и доказано, что $M(G)$ является идеалом кольца $EndG$. Известно, что если $g\in G$, то $<g>_{AI}=<g>+M(G)(g)$. Этот факт позволяет в следующей теореме описать главные абсолютные идеалы жесткой ЦРФ-группы.

Теорема 4. Пусть G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа, $g=\sum_{\tau\in T(B)}\frac{r_\tau}{m_\tau}e_\tau+\sum_{\tau\in T(C)}c_\tau e_\tau\in G$. Тогда $<g>_{AI}=<g>+(\bigoplus_{\tau\in T(B)}r_\tau A_\tau\bigoplus\bigoplus_{\tau\in T(C)}c_\tau A_\tau)$.

Доказательство. Пусть $L=\bigoplus_{\tau\in T(B)}r_\tau A_\tau\bigoplus\bigoplus_{\tau\in T(C)}c_\tau A_\tau=\bigoplus_{\tau\in T(B)}r_\tau B_\tau\bigoplus\bigoplus_{\tau\in T(C)}c_\tau C_\tau$. Покажем, что $<g>_{AI}=<g>+L$.

Так как $M(G)\subset EndG$, то $M(G)(g)\subset<g>+L$ по лемме 3, откуда $<g>_{AI}=<g>+M(G)(g)\subset<g>+L$.

Докажем обратное включение, для этого достаточно показать, что $L\subset<g>_{AI}$. Пусть сначала $\tau\in T(C)$. Определим умножение $\times$ на G, положив $e_\tau\times e_\tau=e_\tau$ и $e_\sigma\times e_\sigma=0$ при $\sigma\neq\tau$. Тогда $g\times t_\tau e_\tau=c_\tau t_\tau e_\tau\in<g>_\times\subset<g>_{AI}$ для всех $t_\tau\in R_\tau$ (здесь $<g>_\times$ – идеал, порожденный элементом g в кольце $(G,\times)$). Следовательно, $\bigoplus_{\tau\in T(G)}c_\tau C_\tau\subset<g>_{AI}$. Пусть теперь $\tau\in T(B)$ и v_σ – целые числа, для которых $s_\sigma s_\sigma^{-1}+m_\sigma v_\sigma=1$ $(\sigma\in T(B))$. В силу теоремы 1 определено кольцо $(G,\times)$, в котором $e_\sigma\times e_\sigma=m_\sigma(s_\tau s_\sigma^{-1}+m_\sigma v_\sigma)e_\sigma$ для всех $\sigma\in T(B)$ и $e_\sigma\times e_\sigma=0$ при $\sigma\in T(C)$. Тогда $g\times t_\tau e_\tau=\frac{r_\tau t_\tau}{m_\tau}(e_\tau\times e_\tau)=r_\tau t_\tau(s_\tau s_\tau^{-1}+m_\tau v_\tau)e_\tau=r_\tau t_\tau e_\tau\in<g>_\times\subset<g>_{AI}$ при всех $t_\tau\in R_\tau$. Следовательно, $\bigoplus_{\tau\in T(B)}r_\tau B_\tau\subset<g>_{AI}$ и, значит, $<g>+L\subset<g>_{AI}$.

Заметим, что элементы $r_\tau(\tau\in T(B))$ и $c_\tau(\tau\in T(C))$ в представлении элемента $g\in G$ определены однозначно с точностью до множителя, обратимого в R_τ. Поэтому вид главного идеала $<g>_{AI}$ не зависит от разложения $A=\bigoplus_{\tau\in T(G)}R_\tau e_\tau$.

Так как группа является afi-группой тогда и только тогда, когда любой ее главный абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой, то из описания главных абсолютных идеалов жестких ЦРФ-групп кольцевого типа получаем, что все группы из этого класса являются afi-группами.

Теорема 5. В жесткой ЦРФ-группе кольцевого типа любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой группы G.

Доказательство. Пусть G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа и

$g = \sum_{\tau \in T(B)} \frac{r_\tau}{m_\tau} e_\tau + \sum_{\tau \in T(C)} c_\tau e_\tau \in G$. По теореме 4 главный абсолютный идеал $< g >_{AI} =< g > +L$, где $L = \bigoplus_{\tau \in T(B)} r_\tau A_\tau \oplus \bigoplus_{\tau \in T(C)} c_\tau A_\tau$. Очевидно, L – вполне характеристическая подгруппа группы G. Так как $(EndG)(g) \subset < g > +L$ по лемме 3, то $< g >_{AI}$ также является вполне характеристической подгруппой. Следовательно, и любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой группы G.

Литература

[1] Fried E., On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring // Proc.Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 51-55.
[2] McLean K.R. The additive adeals of a p-ring // J. London Math. Soc. 1975. V.2. P. 523-529.
[3] Благовещенская Е.А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. СПб: Политехнический университет, 2009.
[4] Kompantseva E.I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. of Mathematical Sciences. 2009. V. 163, № 6. P. 688-693.

The group of multiplications for an almost completely decomposable group

Kompantseva E.I., Fomin A.A.

The groups of multiplications and the absolute principal ideals are described in the present paper for the rigid almost completely decomposable groups of the ring type with the cyclic regulator factor. It is shown that every absolute ideal is a fully invariant subgroup of such group.

Key words: multiplication on an abelian group, almost completely decomposable group, absolute ideal.

REFERENCES

[1] Fried E., On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring // Proc.Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 51-55.
[2] McLean K.R. The additive adeals of a p-ring // J. London Math. Soc. 1975. V.2. P. 523-529.
[3] Blagoveshchenskaya E.A. Pochti vpolne razlozhimye abelevy gruppy i ih kol'tsa endomorfizmov. SPb: Politekhnicheskiy universitet, 2009.
[4] Kompantseva E.I. Rings on almost completely decomposable Abelian groups // J. of Mathematical Sciences. 2009. V. 163, № 6. P. 688-693.

Сведения об авторах

Компанцева Екатерина Игоревна, окончила МПГУ, математический факультет, д.т.н., доцент, Финансовый университет при Правительстве РФ, профессор кафедры ТВиМС, МПГУ, профессор кафедры алгебры, общее количество научных работ - 59, основные направления научных интересов: теория групп, теория колец, их применение к проблеме **обеспечения помехоустойчивого кодирования.**

Фомин Александр Александрович, 1949 г. р., окончил МПГУ, математический факультет., д.ф.-м.н., профессор, МПГУ, зав. кафедрой алгебры, общее количество публикаций -70. Основные направления научных интересов: теория групп и ее применение к проблеме обеспечения помехоустойчивого кодирования.