УДК 629.735.072.1: 656.71.003

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ ПС-МЕТОДОМ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕННЫЕ

С.В. ПЕТРУНИН

В работе рассматриваются открытые транспортные задачи линейного программирования, в которых на некоторые переменные положено ограничение больше или меньше. Если первое ограничение не создает дополнительных трудностей при решении задачи, то ограничения сверху на переменные требуют особого подхода. Показано, что такие задачи достаточно хорошо решаются с помощью предложенного автором ПС-метода.

Ключевые слова: линейное программирование, транспортная задача, ограничения на переменные снизу и сверху, ПС-метод, «очищение» задачи, основная и базовая строки, нулевые переменные.

В инженерной и экономической практике часто встречаются транспортные задачи с ограничением провозной возможности на маршрутах. Формализацию таких задач можно представить в следующем виде:

$$\sum_j x_{ij} = a_i\;; \tag{1}$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j\;; \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0; \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq d_{ij} \text{ или } x_{ij} \leq d_{ij}, \tag{4}$$

где x_{ij} - объем ресурса, перевозимого из i-го пункта в j -й пункт; a_i - объем ресурса в пункте i; b_j - потребности в ресурсе в пункте j; d_{ij} - либо максимально, либо минимально возможный объем ресурса, перевозимого из i в j.

Как правило, в таких задачах следует найти экстремум некоторой линейной функции ресурса, перевозимого в сети

$$C = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}\,. \tag{5}$$

В настоящей работе предлагается метод решения транспортных задач с различными типами ограничений. Эта инициатива вызвана тем, что многие типы таких задач достаточно хорошо решаются с помощью ПС-метода, разработанного автором в работе [1].

Закрытые транспортные задачи

1. Транспортные задачи без ограничений

Самыми простыми из задач (1) - (3) являются задачи, в которых ограничения (1) и (2) представляют собой равенства. Условием разрешимости такой задачи служит равенство

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j\,. \tag{6}$$

Если существуют равенства в ограничениях (1) и (2), то говорят о так называемой “закрытой” транспортной задаче. Отсутствие равенства (6) в “закрытой” задаче означает, что решения задачи нет.

Методы решения большинства закрытых задач достаточно широко известны. Самый распространенный способ, метод “потенциалов”, состоит в том, что находится решение, удовлетворяющее условиям-ограничениям задачи (допустимое решение или опорный план) и затем это решение проверяется на оптимальность [2]. Если решение неоптимально, по некоторому алгоритму переходят к другому допустимому решению, по крайней мере, не худшему по сравнению с предыдущим. Как видно, на каждом этапе находится совокупность ненулевых элементов. Если рассматривать транспортную задачу размерности $n \times m$, то число ненулевых элементов будет не более $n + m - 1$. Поэтому матрица решения будет содержать большое число нулей.

В [1] предложен другой метод решения, а именно, определение тех переменных, которые обязательно должны быть равны нулю. В связи со значимостью этого метода имеет смысл в настоящей работе повторить его наиболее важные позиции. Прежде всего определим понятия, используемые при доказательстве справедливости предложенного метода. Назовем переменную, не входящую в оптимальное решение, нулевым элементом. Основной строкой (столбцом) будем считать строку (столбец), в которой определяется нулевой элемент. Базовой строкой (столбцом) назовём строку (столбец), с элементами которой сравниваются элементы основной строки при поиске нулевого элемента.

Для введения следующего определения обратимся к решению задачи, отвечающему ограничениям (1) – (3), т.е. допустимому (не обязательно оптимальному) решению.

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \qquad i = 1,n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \qquad j = 1,m;$$

$$x_{ij} \geq 0\,.$$

В этом случае диапазон изменения каждой переменной зависит от величин правых частей ограничений, т.е. от a_i и b_j. Естественно, что эти переменные ограничены сверху. Но существуют случаи, когда неизвестные ограничены и снизу. Другими словами, иногда переменные не могут быть меньше некоторой величины, большей нуля. Рассмотрим k-ю строку ограничений задачи. Она характеризуется величиной a_k. Из величин $\{b_j\}$ выберем самую наибольшую. Пусть она будет b_p. Тогда оценим величины a_k и $\sum_{j \neq p} b_j$. Если $a_k > \sum_{j \neq p} b_j$, то переменная x_{kp} будет не меньше величины $d_{kp}=a_k - \sum_{j \neq p} b_j$. Это позволяет ввести новую переменную $y_{kp} = x_{kp} - d_{kp}$ и уменьшить a_k и b_p на d_{kp}, т.е. ввести новые $a^*_k = a_k - d_{kp}$ и $b^*_p = b_p - d_{kp}$. Такую операцию, которую назовём “очищением”, следует проводить со всеми строками и столбцами после каждой процедуры определения переменных. “Очищенная” задача имеет неизвестные, для которых допустимо минимальными значениями будут нули. Все далее сказанное в данной работе относится к “очищенным” задачам. Особое значение приобретает процесс “очищения” при решении задач с ограничениями на переменные.

Следующая теорема определяет свойства, которым должен удовлетворять нулевой элемент.

Теорема. В транспортной задаче элемент основной строки и p-го столбца будет нулевым, если:

a) разность между коэффициентами основной и базовой строк в p-м столбце больше той же разницы в остальных столбцах;

b) свободный член базовой строки не меньше свободного члена p-го столбца.

Доказательство этой теоремы приведено в [3]. Теорема позволяет создать алгоритм, состоящий из нескольких этапов.

Этап 1. Первую строку матрицы коэффициентов сравнивают со второй и находят разности $c_{1j} – c_{2j}$. Из этих разностей выбирают наибольшую. Пусть она будет в p-м столбце. Если $a_2 \geq b_p$, то в соответствии с теоремой элемент x_{1p} будет равен нулю. Помечают этот элемент.

Если $b_p > a_2$, никакого вывода сделать нельзя. В этом случае пропускают этап 2 и переходят к этапу 3.

Этап 2. Если элемент x_{1p} равен нулю, то разность $c_{1p}- c_{2p}$ не должна быть меньше самой большой разности $c_{1j} - c_{2j}$ для всех $j \neq p$. Обозначим эту разность через h. Тогда новое $c^*_{1p} = c_{2p} + h$.

Этап 3. Первую строку сравнивают с 3 строкой и выполняют этапы 1 и 2. Затем первая строка сравнивается со всеми остальными строками. После этого переходят к этапу 4.

Этап 4. Подобно первой, все строки сравниваются с другими в соответствии с этапами 1 и 2. После перебора всех строк переходят к этапу 5.

Этап 5. Операции, аналогичные операциям этапов 1-4, проводят со всеми столбцами. Только вместо разностей $c_{ij} - c_{0j}$ рассматриваются разности $c_{ij} - c_{i0}$ и выбирается строка ω, где разность $c_{\omega j} - c_{\omega p}$ – наибольшая. Вместо условия $a_i \geq b_p$ следует использовать условие $b_p \geq a_i$. Иными словами, условия этапа 1 должны быть выполнены для транспонированной матрицы. Если решение не получено, переходят к этапу 1.

После каждого этапа обязательно следует проводить:

- “очищение” задачи;
- анализ строк и столбцов. Если в строке (столбце) остался только один ненулевой элемент, то определяют его значение. Строка (столбец) выпадает из дальнейшего рассмотрения.

2. Закрытые транспортные задачи с ограничениями на переменные

2.1. Ограничения снизу на переменные

Закрытую транспортную задачу с переменными, ограниченными снизу, можно представить в следующем виде:

$$\sum_j x_{ij} = a_i\ ;\ \ \sum_i x_{ij} = b_j\ ;\ \ x_{ij} \geq d_{ij};\ \ C = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Решение такого типа задач не представляет трудностей. Достаточно ввести новые неотрицательные переменные $y_{ij} = x_{ij} - d_{ij}$, для того чтобы свести задачу к обычной закрытой транспортной задаче, а именно:

$$\sum_j y_{ij} = a_i - \sum_j d_{ij}\ ;\ \ \sum_i y_{ij} = b_j - \sum_i d_{ij}\ ;\ \ y_{ij} \geq 0\ ;$$

$$C = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij} d_{ij} \to \min.$$

Наряду с известным требованием разрешимости $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ должны также выполняться очевидные требования: $a_i \geq \sum_j d_{ij}$ и $b_j \geq \sum_i d_{ij}$. Определение исходных переменных после решения задачи не составляет труда

$$x_{ij} = y_{ij} + d_{ij}.$$

2.2. Ограничения сверху на переменные

Задача с переменными, ограниченными сверху, требует для своего решения гораздо более сложного алгоритма. В общем виде она может быть сформулирована так:

$$\sum_j x_{ij} = a_i\ ;\ \ \sum_i x_{ij} = b_j\ ;\ \ x_{ij} \leq d_{ij}\ ;\ \ C = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Наряду с требованием разрешимости $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ должны также выполняться дополнительные требования: $a_i \le \sum_j d_{ij}$ и $b_j \le \sum_i d_{ij}$.

Для решения такой задачи предлагается несколько изменений ПС-метода. Они касаются и способа нахождения нулевых элементов, и процесса очищения.

Способ нахождения нулевых элементов. Так как ПС-метод состоит в том, что он позволяет определять нулевые элементы, то в самом начале задача с ограничениями сверху на переменные решается так же, как и обычная транспортная задача. Особенности начинаются, когда некоторые переменные приобретают своё предельное значение. Это происходит в двух случаях: либо в процессе очищения, либо тогда, когда остается одно неизвестное в строке (столбце).

Так как переменные, принявшие величину ограничений, обладают свойствами, отличными от обычных ненулевых переменных [2, с. 83, теорема 2.2], то следует добиться, чтобы они не участвовали далее в методе как основные и базовые переменные. Более того, если переменная, равная ограничению, закрывает строку (или столбец), то нулевые неизвестные вновь участвуют в ПС-методе.

Процесс “очищения”. В нем для каждой переменной рассматриваются три величины: a_i, b_j и d_{ij} (если последняя существует). Из этих величин выбирается наименьшая, которая и фигурирует в процессе “очищения”. Обозначим такие величины для каждого элемента через z_{ij}. Покажем процесс “очищения” на примере k-й строки. Эта строка характеризуется величиной правой части a_k. Из величин z_{kj} для всех неотрицательных ячеек выберем наибольшую. Пусть она будет z_{kp}. Оценим величины a_k и $\sum_{j \ne p} z_{kj}$. Если $a_k \le \sum_{j \ne p} z_{kj}$, то процесс продолжается как в обычной транспортной задаче. Если же $a_k > \sum_{j \ne p} z_{kj}$, то переменная x_{kp} должна быть увеличена на $w =$ a_k - $\sum_{j \ne p} z_{kj}$. Соответственно должны быть уменьшены на ***w*** величины a_k, b_p, d_{kp} и z_{kp}. Если a_k после уменьшения станет равной 0, то k-я строка исключается из рассмотрения. Аналогично, если b_p = 0, то p-й столбец исключается из рассмотрения. Если z_{kp} = 0, то соответствующий элемент с его значением становится запретным для дальнейшего рассмотрения. Процесс “очищения” следует проводить для всех ненулевых строк и столбцов.

С учетом этих замечаний ПС-метод может быть применен к задачам с переменными, ограниченными сверху.

2.3. Ограничения на переменные снизу и сверху

Закрытую транспортную задачу с переменными, ограниченными и сверху, и снизу, можно сформулировать так:

$$\sum_j x_{ij} = a_i\,;\;\; \sum_i x_{ij} = b_j\,;\;\; d_{ij1} \le x_{ij} \le d_{ij2}\,;\;\; C = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Предлагаем следующий метод её решения. Сначала следует рассмотреть только ограничения снизу. Для этого нужно ввести новые неотрицательные переменные $y_{ij} = x_{ij} - d_{ij1}$. Тогда задача примет вид:

$$\sum_j y_{ij} = a_i - \sum_j d_{ij1}\,;\;\; \sum_i y_{ij} = b_j - \sum_i d_{ij1}\,;\;\; y_{ij} \ge 0\,;\;\; y_{ij} \le d_{ij2} - d_{ij1}\,;$$

$$C = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij} d_{ij} \to \min.$$

Последняя же задача является задачей с ограничениями сверху на переменные. Метод её решения приведен выше в разделе 2.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петрунин С.В.** Использование метода последовательной сепарации для решения задач транспортного типа // Научный Вестник МГТУ ГА, серия Общество, экономика, образование. - 2004. - № 78(5). - С. 55 – 60.
2. **Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.** Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Изд-во «Наука», 1969.
3. **Петрунин С.В.** О решении транспортных задач большой размерности // Научный Вестник МГТУ ГА. - 2008. - № 131. - С. 183 – 185.

SOLUTION OF TRANSPORTATION PROBLEMS WITH BOUNDED-VARIABLES USING PC-METHOD

Petrunin S.V.

The research considers transportation problems of linear programming where restrictions (greater or less) are imposed on some variables. If the first restriction doesn't create an additional complexity then an excessive restrictions on variables require a special approach. It has been shown that these tasks could be solved applying PC-method proposed by the author.

Key words: linear programming, transportation problem, lower and upper bounded variables, PC-method, task "clearing", main and basic row, zero variables.

Сведения об авторе

Петрунин Станислав Владимирович, 1936 г.р., окончил ЛПИ (1959), доктор технических наук, профессор кафедры организации перевозок на воздушном транспорте МГТУ ГА, автор более 40 научных работ, область научных интересов - исследование операций, логистика.