УДК 514.7
DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-3-150-159

О БЕСКОНЕЧНЫХ СЕРИЯХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н.Г. ХОРЬКОВА[1]
[1]*Московский государственный технический университет им. Баумана, г. Москва, Россия*

Популярное в математике понятие интегрируемости дифференциальных уравнений (и столь же разнообразно трактуемое) тесно связано с существованием симметрий и законов сохранения. Все известные интегрируемые дифференциальные уравнения обладают бесконечными сериями симметрий и (или) законов сохранения. Однако также имеется целый ряд уравнений, важных для приложений, но имеющих крайне скудный запас симметрий или законов сохранения. Попытки расширить понятия симметрии и закона сохранения предпринимались разными авторами, и на эту тему имеется обширная литература. В данной статье представлен следующий результат. Если ℓ-нормальная система дифференциальных уравнений в частных производных имеет когомологически нетривиальный закон сохранения, то этот закон сохранения порождает бесконечную серию нелокальных законов сохранения. Этот факт обобщает аналогичный результат статьи автора для дифференциальных уравнений (не систем). Результат получен в рамках геометрической теории дифференциальных уравнений в частных производных. Согласно геометрическому подходу, многообразие, снабженное конечномерным распределением, удовлетворяющим условиям интегрируемости Фробениуса, называется диффеотопом (diffiety), если локально оно имеет вид бесконечно продолженного уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Диффеотопы являются объектами категории дифференциальных уравнений, введенной А.М. Виноградовым. Под симметриями уравнения понимают преобразования (конечные или инфинитизимальные) бесконечного продолжения уравнения, которые сохраняют распределение Картана, а под законами сохранения – $(n-1)$-е классы когомологий горизонтального комплекса де Рама уравнения, где n – число независимых переменных уравнения. Накрытием называется эпиморфизм $\tau\colon \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ в категории дифференциальных уравнений, порождающий изоморфизм распределений. Симметрии и законы сохранения диффеотопа $\tilde{\mathcal{E}}$ называются нелокальными симметриями и законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Выбор подходящего накрытия позволяет получать новые (нелокальные) симметрии и законы сохранения исследуемого уравнения. В работе приведена конструкция одного накрытия и доказано существование бесконечных серий нелокальных законов сохранения у широкого класса систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений в частных производных, накрытия дифференциальных уравнений, нелокальные симметрии и законы сохранения.

ВВЕДЕНИЕ

Популярное в математике понятие интегрируемости дифференциальных уравнений (и столь же разнообразно трактуемое) тесно связано с существованием симметрий и законов сохранения (см., например, [12, 13, 3, 6, 1]). Все «признанные» интегрируемые дифференциальные уравнения обладают бесконечными сериями симметрий и (или) законов сохранения. Однако также имеется целый ряд уравнений, важных для приложений, но имеющих крайне скудный запас симметрий или законов сохранения [14, 15]. Попытки расширить понятия симметрии и закона сохранения предпринимались разными авторами (см., например, [1, 6] и имеющиеся в этих работах списки литературы). В данной статье представлен следующий результат. Если ℓ-нормальная система дифференциальных уравнений в частных производных имеет когомологически нетривиальный закон сохранения, то этот закон сохранения порождает бесконечную серию нелокальных законов сохранения. Этот факт обобщает аналогичный результат статьи [11] для дифференциальных уравнений (не систем).

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводятся основные понятия и факты теории симметрий и законов сохранения дифференциальных уравнений [1, 2, 4–6]. В разделе 2 представлена конструкция одного специального накрытия [1, 8, 11]. Далее, в разделе 3 доказывается существование при определенных условиях бесконечных серий нелокальных законов сохранения.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В этом разделе собраны необходимые для дальнейшего понятия и факты геометрической теории дифференциальных уравнений в частных производных. Подробное изложение теории может быть найдено в [1, 2, 4–6].

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть дана система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\mathcal{E}: F_i\left(x, u, \dots, \frac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial x_\sigma}, \dots\right) = 0,\ i = 1, \dots, r,$$

где $u = (u^1, \dots, u^m)$ – неизвестная вектор-функция переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$.

В рамках геометрической теории любая система дифференциальных уравнений рассматривается как подмногообразие пространства джетов k-го порядка $J^k(\pi)$ расслоения $\pi: E^{n+m} \to M^n$, где k – максимальный порядок уравнений, входящих в систему, n – число независимых переменных, а m – неизвестных функций (зависимых переменных). Далее для краткости будем называть $\mathcal{E}$ «дифференциальным уравнением» или просто «уравнением» и записывать в виде $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, $F = (F_1, \dots, F_r)$, $F_i \in C^\infty(J^k(\pi))$.

На многообразии бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$ имеется n-мерное интегрируемое распределение $\mathcal{C}$ (распределение Картана), задаваемое операторами полных производных $D_1, \dots, D_n$,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} p^j_{\sigma+1_i} \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}, \tag{1}$$

где $(x_i,\ p^j_\sigma)$ – канонические координаты в пространстве бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$.

Векторные поля (1) касаются бесконечного продолжения $\mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}$, которое является подмногообразием пространства бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$ и задается бесконечной системой $D_\sigma(F_s) = 0$, где $D_\sigma = D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_r}$, $\sigma = (i_1, \dots, i_r)$. Поэтому распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ допускает ограничение $\bar{\mathcal{C}} =< \bar{D}_1, \dots, \bar{D}_n >$ на бесконечно продолженное уравнение $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ (здесь и далее черта обозначает ограничение на $\mathcal{E}^\infty$). Распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ и $\mathcal{E}^\infty$ вполне интегрируемы в смысле Фробениуса, т. е. $[D_i, D_j] = [\bar{D}_i, \bar{D}_j] = 0$. Многообразие, снабженное конечномерным распределением, удовлетворяющим условиям интегрируемости Фробениуса, называется диффеотопом (diffiety), если локально оно имеет вид $\mathcal{E}^\infty$ (А.М. Виноградов, [4, 1]). Диффеотопы являются объектами категории дифференциальных уравнений. Примерами диффеотопов служат пространства бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$ и бесконечно продолженные уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

ЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Под симметриями уравнения $\mathcal{E}$ понимают преобразования (конечные или инфинитизимальные) бесконечно продолженного уравнения $\mathcal{E}^\infty$, которые сохраняют распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$.

Алгебра инфинитезимальных симметрий уравнения $\mathcal{E}$ (далее – локальных симметрий) изоморфна фактор-алгебре Ли

$$\operatorname{Sym} \mathcal{E} = D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)/\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty),$$

где

$$\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{D}_i \,|\, a_i \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty) \right\},$$

а $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ состоит из таких векторных полей X на $\mathcal{E}^\infty$, что $[X, \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)] \subset \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$.
Можно показать, что любая локальная симметрия уравнения $\mathcal{E}$ является ограничением на $\mathcal{E}^\infty$ некоторого эволюционного дифференцирования $\ni_\varphi = \sum_{\sigma,j} D_\sigma \left(\varphi^j\right) \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}$, $\varphi = \left(\varphi^1, \ldots, \varphi^m\right)$, $\varphi^i \in C^\infty(J^\infty(\pi))$. Эволюционное дифференцирование $\ni_\varphi$ допускает ограничение на $\mathcal{E}^\infty$, если

$$\ni_\varphi (I(\mathcal{E}^\infty)) \subset I(\mathcal{E}^\infty), \tag{2}$$

где $I(\mathcal{E}^\infty) \subset C^\infty(J^\infty(\pi))$ – идеал уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Если $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, $F = (F_1, \ldots, F_r)$, $F_i \in C^\infty(J^k(\pi))$, то (2) равносильно системе уравнений $\bar{\ell}_F(\bar{\varphi}) = 0$, $\bar{\varphi} = \varphi|_\mathcal{E}$, где ℓ_F – оператор универсальной линеаризации

$$\ell_F = \left\| \sum_\sigma \frac{\partial F_i}{\partial p_\sigma^j} D_\sigma \right\|, \;\; \bar{\ell}_F = \ell_F|_\mathcal{E}.$$

Таким образом, любая локальная симметрия уравнения $\mathcal{E}$ есть ограничение $\bar{\ni}_\varphi$ на $\mathcal{E}^\infty$ такого эволюционного дифференцирования $\ni_\varphi$, что

$$\bar{\ell}_F(\bar{\varphi}) = 0. \tag{3}$$

Векторное поле $\bar{\ni}_\varphi$ однозначно определяется своей производящей функцией $\bar{\varphi}$.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Горизонтальным комплексом де Рама уравнения $\mathcal{E}$ называется поднятие на $\mathcal{E}^\infty$ комплекса де Рама многообразия M:

$$0 \longrightarrow C^\infty(\mathcal{E}^\infty) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^1 (\mathcal{E}^\infty) \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^2 (\mathcal{E}^\infty) \xrightarrow{\bar{d}} \ldots \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^n (\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow 0.$$

В локальных координатах любая горизонтальная форма $\omega \in \bar{\Lambda}^p(\mathcal{E}^\infty)$ может быть представлена в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_p} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \;\; a_{i_1 \ldots i_p} \in C^\infty(\mathcal{E}^\infty),$$

т. е. локально такая форма является линейной комбинацией форм на многообразии M с коэффициентами в $C^\infty(\mathcal{E}^\infty)$.

Действие дифференциала $\bar{d}$ на горизонтальную форму ω определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{d}\omega &= \sum \bar{d}\, a_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = \\ &= \sum \sum_{i=1}^{n} \bar{D}_i \, (a_{i_1 \ldots i_p}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Когомологии горизонтального комплекса де Рама уравнения $\mathcal{E}$ называются горизонтальными когомологиями и обозначаются $\bar{H}^p(\mathcal{E}^\infty)$.

Законом сохранения уравнения $\mathcal{E}$ называется $(n-1)$-й класс когомологий $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$ горизонтального комплекса де Рама уравнения $\mathcal{E}$, замкнутая горизонтальная форма $\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$ называется сохраняющейся плотностью уравнения $\mathcal{E}$.

Если уравнение $\mathcal{E}^\infty \ell$-нормально, то закон сохранения $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$ определяется своей производящей функцией ψ, которая вычисляется по формуле $\psi = \nabla^*(1)|_{\mathcal{E}}$, где $d\omega = \nabla(F)$ для некоторого $\mathcal{C}$-дифференциального оператора ∇. Производящая функция ψ закона сохранения удовлетворяет уравнению

$$\bar{\ell}_F^*(\psi) = 0. \tag{4}$$

Заметим, что не каждое решение уравнения (4) является производящей функцией некоторого закона сохранения [4, 5, 1].

Опишем действие локальных симметрий уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ на его законы сохранения. Пусть даны локальная симметрия φ и закон сохранения $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$ уравнения $\mathcal{E}$ с производящей функцией $\psi \in \ker \bar{\ell}_F^*$. Обозначим через $\bar{\ni}_\varphi\,(\omega)$ производную Ли $L_{\bar{\ni}_\varphi}(\omega)$ формы ω. Тогда $[\bar{\ni}_\varphi\,(\omega)]$ снова закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$, а его производящая функция имеет вид

$$\bar{\ni}_\varphi\,(\psi) + \bar{\triangle}^*\,(\psi), \tag{5}$$

где $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\triangle$ определяется условием $\ni_\varphi\,(F) = \triangle\,(F)$.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ: НАКРЫТИЯ, НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Будем говорить, что задано накрытие $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}$, если:

- имеется диффеотоп $\tilde{\mathcal{E}}$ с n-мерным интегрируемым распределением $\tilde{\mathcal{C}} = \{\tilde{\mathcal{C}}_\theta\}_{\theta \in \tilde{\mathcal{E}}}$,
- определено такое регулярное сюръективное отображение $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, что для любой точки $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}$ касательное отображение $\tau_{*,\theta}$ является изоморфизмом $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ на картановскую плоскость $\mathcal{C}_{\tau(\theta)}$ уравнения $\mathcal{E}$ в точке $\tau(\theta)$.

Многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ локально является прямым произведением $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \mathrm{IR}^N$, а отображение τ – естественной проекцией $\tau: \tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \mathrm{IR}^\mathrm{N} \longrightarrow \mathcal{E}$. Распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ порождается системой векторных полей

$$\widetilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j}, i = 1, \dots, n,$$

где $X_i = \sum_{j=1}^N X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j}$, $X_{ij} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, – τ-вертикальные поля на $\tilde{\mathcal{E}}$, $w_1, w_2, \dots, w_N$ – координаты в слое проекции IR^N, которые называются нелокальными переменными. Число N называется размерностью накрытия, возможен случай $N = \infty$. Условие интегрируемости Фробениуса $[\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_j] = 0, i, j = 1, \dots, n$, эквивалентно системе уравнений

$$\widetilde{D}_i(X_{jk}) = \widetilde{D}_j(X_{ik}).$$

Нелокальными симметриями уравнения $\mathcal{E}$ называются инфинитезимальные симметрии диффеотопа $\widetilde{\mathcal{E}}$, более точно алгебра нелокальных симметрий типа τ (или нелокальных τ-симметрий) уравнения $\mathcal{E}$ есть фактор-алгебра Ли

$$\mathrm{Sym}_\tau \mathcal{E} = D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{E}})/\mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{E}}),$$

где

$$\mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{E}}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{D}_i | \, a_i \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}) \right\},$$

а $D_{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{E}})$ состоит из таких векторных полей X на $\widetilde{\mathcal{E}}$, что $[X, \mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{E}})] \subset \mathcal{C}D(\tilde{\mathcal{E}})$.

Легко видеть [7, 1], что если накрытие $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ задано, то любая нелокальная симметрия типа τ имеет вид эволюционного дифференцирования

$$\tilde{\ni}_{\varphi,A} = \tilde{\ni}_{\varphi} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial w_j},$$

где $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m), A = (a_1, \dots, a_N), \varphi^i, a_j \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$, причем функции φ^i, a_j удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\tilde{\ell}_F(\varphi) = 0, \tag{6}$$

$$\widetilde{D}_i(a_j) = \tilde{\ni}_{\varphi,A} (X_{ij}). \tag{7}$$

Если задано накрытие $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}$, то горизонтальный комплекс де Рама уравнения $\mathcal{E}$ поднимается на диффеотоп $\tilde{\mathcal{E}}$. В локальных координатах любая горизонтальная форма $\omega \in \widetilde{\Lambda}^p(\tilde{\mathcal{E}})$ может быть представлена в виде

$$\omega = \sum a_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \;\; a_{i_1 \dots i_p} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}),$$

а дифференциал $\tilde{d}$ на горизонтальную форму ω действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{d}\omega &= \sum \tilde{d}\, a_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \\ &= \sum \sum_{i=1}^{n} \widetilde{D}_i\,(a_{i_1 \dots i_p}) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Когомологии горизонтального комплекса де Рама на $\tilde{\mathcal{E}}$ будем обозначать $\widetilde{H}^p(\tilde{\mathcal{E}})$. Группа $\widetilde{H}^{n-1}(\tilde{\mathcal{E}})$ называется группой нелокальных законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$.

КОНСТРУКЦИЯ НАКРЫТИЯ

Бесконечные серии нелокальных законов сохранения будут построены в одном специальном накрытии [8, 11, 1]. Приведем его конструкцию.

1. Пусть дано накрытие $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, в котором распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ на $\tilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\widetilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j}, i = 1, \dots, n.$$

Положим $\tilde{\mathcal{E}}_\tau = \tilde{\mathcal{E}} \times \mathrm{IR}^\infty$, координатами в IR^∞ (новыми нелокальными переменными) являются $v_j^l, j = 1, \dots, N, l > 0$; $p_\sigma^{j,k}$, $k > 0$, где $p_\sigma^{j,0} = p_\sigma^j$ – внутренние координаты на уравнении $\mathcal{E}^\infty$. Отображение $\tau_S : \tilde{\mathcal{E}}_\tau \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ является композицией проекции на первый сомножитель и отображения τ. Распределение на $\tilde{\mathcal{E}}_\tau$ зададим системой векторных полей

$$\widetilde{D}_i^\tau = \bar{D}_i^S + \sum_{l\geq 0,j}(S_p + S_v)^l \left(X_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial v_j^l}, i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где

$$\bar{D}_i^S = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{l\geq 0,\sigma} S_p^l \left(\bar{p}_{\sigma+1_i}^j\right) \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,l}},$$

$$S_p = \sum_{l\geq 0,\sigma} p_\sigma^{j,l+1} \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,l}}, \; S_v = \sum_{l\geq 0,j} v_j^{l+1}\frac{\partial}{\partial v_j^l}, v_j^0 = w_j.$$

Несложно показать, что:

1) $[\widetilde{D}_\alpha^\tau, \widetilde{D}_\beta^\tau] = 0, \alpha, \beta = 1, \dots, n$, т. е. система полей (8) определяет структуру накрытия на $\tilde{\mathcal{E}}_\tau$;

2) векторное поле $S_\tau = S_p + S_w$ является нелокальной τ_S-симметрией уравнения.

2. Дадим альтернативное описание конструкции накрытия $\tau_S: \tilde{\mathcal{E}}_\tau \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ в случае тождественного накрытия $\tau = \mathrm{id}: \mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty$.
Пусть дано уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, причем $F = (F_1, \dots, F_r)$, $F_i \in C^\infty(J^k(\pi))$, $\pi: E^{n+m} \to M^n$. Рассмотрим две копии $\pi^{(k)}: E^{(k)} = E^{n+m} \to M^n$, $k = 0{,}1$, расслоения π и их сумму Уитни $\pi^{(0)} \oplus \pi^{(1)}$.
Если $(x, p_\emptyset^{j,k})$ – локальные координаты в расслоениях $E^{(k)} \to M^n$, $k = 0{,}1$, соответственно, то $\left(x, p_\sigma^{j,0} p_\sigma^{j,1}\right)$, $j = 1, \dots, m$, $|\sigma| \leq k$ – канонические координаты в расслоении джетов $J^k\left(\pi^{(0)} \oplus \pi^{(1)}\right)$.
Определим оператор $S^{(1)} = \sum_{j,\sigma} p_\sigma^{j,1} \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,0}} \in D(J^k(\pi^{(0)} \oplus \pi^{(1)}))$ и уравнение

$$E_1 = \{F = 0, S^{(1)}F = 0\} \subset J^k\left(\pi^{(0)} \oplus \pi^{(1)}\right).$$

Операторы полных производных по переменной x_i в пространствах джетов $J^\infty(\pi^{(0)})$ и $J^\infty(\pi^{(0)} \oplus \pi^{(1)})$ соответственно определяются формулами

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} p_{\sigma+1_i}^{j,0} \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,0}}, \; D_i^{(1)} = D_i + \sum_{j,\sigma} p_{\sigma+1_i}^{j,1} \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,1}}.$$

Определим проекцию $\tau_{1,0}: \mathcal{E}_1^\infty \to \mathcal{E}^\infty$:

$$\tau_{1,0}(x, p_\sigma^{j,0}, p_\sigma^{j,1}) = (x, p_\sigma^{j,0}).$$

Очевидно, что $(\tau_{1,0})_*\left(\bar{D}_i^{(1)}\right) = \bar{D}_i$, где $\bar{D}_i^{(1)}$ и $\bar{D}_i$ – ограничения полей $D_i^{(1)}$ и D_i на уравнения $\mathcal{E}_1^\infty$ и $E^\infty = E_0^\infty$ соответственно. Следовательно, построено накрытие $\tau_{1,0}: \mathcal{E}_1^\infty \to \mathcal{E}^\infty$.

Аналогичным образом определяем накрытия

$$\tau_{k,k-1}\colon \mathcal{E}_k^\infty \to \mathcal{E}_{k-1}^\infty,\ k > 1,$$

где

$$\mathcal{E}_k\colon F = 0,\, SF = 0, \dots, S^k F = 0,$$
$$S = \sum_{j,l,\sigma} p_\sigma^{j,l+1} \frac{\partial}{\partial p_\sigma^{j,l}}.$$

Пусть $\tau_{SE}\colon S\mathcal{E} \to \mathcal{E}^\infty$ – обратный предел цепочки отображений

$$\dots \xrightarrow{\tau_{k+1,k}} \mathcal{E}_k^\infty \xrightarrow{\tau_{k,k-1}} \mathcal{E}_{k-1}^\infty \xrightarrow{\tau_{k-1,k-2}} \dots \xrightarrow{\tau_{2,1}} \mathcal{E}_1^\infty \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}^\infty.$$

Диффеотоп $S\mathcal{E}$ является бесконечно продолженным уравнением $(\mathcal{E}_S)^\infty$, где

$$\mathcal{E}_S\colon F = 0,\, SF = 0, \dots, S^k F = 0, \dots \tag{9}$$

3. Пример. Рассмотрим уравнение Кортевега – де Фриза $\mathcal{E}\colon u_t = u_{xxx} + u u_x$. Для упрощения обозначений положим $p_\emptyset^{1,0} = u$, $p_\emptyset^{1,1} = v$, $p_\emptyset^{1,2} = w$, производные функций u, v и w будем обозначать с помощью индексов x и t. Тогда уравнение $\mathcal{E}_2$ имеет вид

$$\begin{cases} u_t &= u_{xxx} + u u_x, \\ v_t &= v_{xxx} + u v_x + v u_x, \\ w_t &= w_{xxx} + 2 v v_x + w u_x + u w_x. \end{cases}$$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В НАКРЫТИИ $\tau_{S\mathcal{E}}$

В этом разделе будет показано, что с помощью симметрии S можно построить бесконечную серию нелокальных законов сохранения для любого ℓ-нормального дифференциального уравнения [5, 1], имеющего хотя бы один топологически нетривиальный закон сохранения, т. е. такой закон сохранения, сохраняющаяся плотность которого зависит хотя бы от одной производной. Напомним, что в ℓ-нормальной системе число уравнений равно числу неизвестных функций ($r = m$).

Заметим, что если уравнение $\mathcal{E}^\infty$ является ℓ-нормальным, то уравнения $\mathcal{E}_k^\infty$ также будут ℓ-нормальными для всех k. Следовательно, определено действие симметрии S на законы сохранения уравнений $\mathcal{E}_k^\infty$.

Если $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(S\mathcal{E})$ – закон сохранения уравнения $S\mathcal{E}$, то его сохраняющаяся плотность ω является горизонтальной формой на некотором уравнении $\mathcal{E}_s^\infty$: $\omega \in \bar{\Lambda}^{n-1}(\mathcal{E}_s^\infty)$. Пусть $(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_s, 0, 0, \dots)$, $\psi_i \in C^\infty(\mathcal{E}_s^\infty)$ – производящая функция закона сохранения $[\omega]$. Легко видеть, что матрица $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $\triangle$ в формуле (5) для закона сохранения $[S\omega]$ имеет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – нулевая и единичная матрицы порядка m соответственно.

Используя (5), получаем

$$S(\psi) + \triangle^* (\psi) = (S\psi_0, S\psi_1 + \psi_0, \dots, S\psi_k + \psi_{k-1}, \psi_k).$$

Следовательно, $(S\psi_0, S\psi_1 + \psi_0, \dots, S\psi_s + \psi_{s-1}, \psi_s, 0, \dots)$ – производящая функция закона сохранения $[S\omega]$.

Отсюда следует, что любой топологически нетривиальный закон сохранения $[\omega]$ любой ℓ-нормальной системы дифференциальных уравнений порождает бесконечную серию нелокальных законов сохранения $[S^k(\omega)]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров А.В. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов, С.В. Дужин, И.С. Красильщик, Ю.Н. Торхов, А.В. Самохин, Н.Г. Хорькова, В.Н. Четвериков. 2-е изд. М.: Факториал-Пресс, 2005. 380 с.

2. Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathemetical Phisics // Translations of Mathematical Monographs / A.V. Bocharov and etc. Providence, RI: AMS, 1999. Vol. 182. 333 p.

3. Виноградов А.М. Интегрируемость и симметрии // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 279–290.

4. Vinogradov A.M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. Vol. 2, No. 1. Pp. 21–78.

5. Vinogradov A.M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol. 100, No. 3. Pp. 1–129.

6. Krasilshchik I.S., Vinogradov A.M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math. 1989. Vol. 15. Pp. 161–209.

7. Хорькова Н.Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Математические заметки. 1988. Т. 44. С. 134–144.

8. Хорькова Н.Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Труды МВТУ. 1988. № 512. С. 105–119.

9. Kiso K. Pseudopotentials and symmetries of evolution equation: preprint. 1986. 18 p.

10. Kiso K. Pseudopotentials and symmetries of evolution equation // Hokkaido Math. J. 1989. Vol. 18, No. 1. Pp. 125–136.

11. Khor'kova N.G. On some constructions in the nonlocal theory of partial differential equations // Differential Geometry and its Appl. 2017. Vol. 54. Pp. 226–235.

12. Sokolov V.V., Shabat A.B. Classification of integrable evolution equations // Sov. Scientific Rev. Section C. New York: Hardwood Acad. Publ., 1984. Vol. 4. Pp. 221–280.

13. Konopelchenko B.G. Nonlinear integrable equations (Recursion operators, group-theoretical ang Hamilton structures of soliton equations) // Lecture Notes in Physics. Vol. 270. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

14. CRC handbook of Lie group to differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws / Ed. N.H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1994.

15. CRC handbook of Lie group to differential equations. Vol. 2. Applications in engineering and physical sciences / Ed. N.H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1995.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Хорькова Нина Григорьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики МГТУ им. Н.Э. Баумана, nkhorkova@diffiety.ac.ru, ninakhorkova@yandex.ru.

ON INFINITE SERIES OF NONLOCAL CONSERVATION LAWS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.G. Khor'kova[1]

[1] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The notion of integrability of differential equations is closely connected with the existence of symmetries and conservation laws. All known integrable differential equations have infinite series of symmetries and (or) conservation laws. However, there is also a number of equations that are important for applications, but with an extremely scarce stock of symmetries or conservation laws. Attempts to extend the concepts of symmetry and conservation law were made by different authors. This article presents the following result. If a ℓ-normal system of partial differential equations has a cohomologically nontrivial conservation law, then this conservation law generates an infinite series of non-local conservation laws. This fact generalizes the analogous result of the author for differential equations (not systems). The result is obtained within the framework of geometrical theory of partial differential equations (PDE). A manifold supplied with an infinite-dimensional distribution satisfying the Frobenius complete integrability condition is called a diffiety, if it is locally in the form of $\mathcal{E}^\infty$. Diffieties are objects of the category of differential equations introduced by A.M. Vinogradov. Symmetries of PDE are transformations (finite or infinitesimal) of the infinite prolongation $\mathcal{E}^\infty$ preserving the Cartan distribution, while conservation laws are $(n-1)$-cohomology classes of the horizontal de Rham cohomology. If a covering $\tau: \tilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ is given, then symmetries and conservation laws of the diffiety $\tilde{\mathcal{E}}$ are called nonlocal symmetries and conservation laws of the equation $\mathcal{E}$. In appropriate coverings one can get new (nonlocal) symmetries and conservation laws for an equation under consideration. In this paper we investigate one covering and prove the existence of infinite series of nonlocal conservation laws.

Key words: systems of partial differential equations, coverings of differential equations, nonlocal symmetries and conservation laws.

REFERENCES

1. **Bocharov, A.V., Verboveckij, A.M., Vinogradov, A.M., Duzhin, S.V., Krasil'shchik, I.S., Torhov, YU.N., Samohin, A.V. and Khor'kova, N.G.** (2005). *Simmetrii i zakony sochraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki* [Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathemetical Phisics]. Ed. A.V. Bocharov. 2-e izd. Moscow: Factorial-Press, 380 p. (in Russian)

2. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equation of Mathemetical Phisics.* (1999). Ed. A.V. Bocharov and etc. Translations of Mathematical Monographs, vol. 182. Providence, RI: AMS, 333 p.

3. **Vinogradov, A.M.** (1987). *Integriruemost i simmetrii* [Integrability and Symmetries]. *Nelineinye volny. Structury i bifurkacii*. Moscow: Nauka, pp. 279–290. (in Russian)

4. **Vinogradov, A.M.** (1984). *Local symmetries and conservation laws.* Acta Appl. Math., vol. 2, no. 1, pp. 21–78.

5. **Vinogradov, A.M.** (1984). *The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws.* J. Math. Anal. Appl., vol. 100, no. 3, pp. 1–129.

6. **Krasilshchik, I.S. and Vinogradov, A.M.** (1989). *Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations.* Acta Appl. Math., vol. 15, pp. 161–209.

7. Khor'kova, N.G. (1988). *Conservation laws and nonlocal symmetries.* Math. Notes, vol. 44, pp. 562–568.

8. Khor'kova, N.G. (1988). *Zakony sochraneniya i nelocal'nye simmetrii* [Conservation laws and nonlocal symmetries]. Trudy MVTU, no. 512, pp. 105–119. (in Russian)

9. Kiso, K. (1986). *Pseudopotentials and symmetries of evolution equation*: preprint, 18 p.

10. Kiso, K. (1989). *Pseudopotentials and symmetries of evolution equation.* Hokkaido Math. J., vol. 18, no. 1, pp. 125–136.

11. Khor'kova, N.G. (2017). *On some constructions in the nonlocal theory of partial differential equations.* Differential Geometry and its Appl., vol. 54, pp. 226–235.

12. Sokolov, B.V. and Shabat, A.B. (1984). *Classification of integrable evolution equations.* Sov. Scientific Rev. Section C. New York: Hardwood Acad. Publ., vol. 4, pp. 221–280.

13. Konopelchenko, B.G. (1987). *Nonlinear integrable equations (Recursion operators, group-theoretical ang Hamilton structures of soliton equations).* Lecture Notes in Physics, vol. 270. Berlin: Springer-Verlag.

14. *CRC handbook of Lie group to differential equations.* (1994). Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. Ed. N.H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press.

15. *CRC handbook of Lie group to differential equations.* (1995). Vol. 2. Applications in ingeneering and physical sciences. Ed. N.H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nina G. Khor'kova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Applied Mathematics Chair of Bauman Moscow State Technical University, nkhorkova@diffiety.ac.ru, ninakhorkova@yandex.ru.

Поступила в редакцию	15.09.2017	Received	15.09.2017
Принята в печать	15.05.2018	Accepted for publication	15.05.2018