УДК 519.46
DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-105-113

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА НА ТРЕХМЕРНОМ ТОРЕ

А.М. ЛУКАЦКИЙ[1]
[1]Институт энергетических исследований Российской академии наук, г. Москва, Россия

Рассматривается уравнение Ландау – Лифшица на трехмерном торе. Уравнение приводится к форме уравнения Эйлера на геодезические левоинвариантной метрики в бесконечномерной алгебре Ли группы токов. Группа токов задается поточечным отображением трехмерного тора в трехмерную ортогональную группу. В алгебре Ли используется введенный ранее нестандартный коммутатор. Решения уравнения Ландау – Лифшица разлагаются по ортонормированному базису левоинвариантной метрики в алгебре токов. Для коэффициентов разложения решения уравнения Ландау – Лифшица в рамках построенной модели вычисляется явный вид эволюционных уравнений. Для этого используются полученные ранее выражения для сумм операторов присоединенного и коприсоединенного действия в бесконечномерной алгебре Ли токов с нестандартным коммутатором. Свойство компактности указанных операторов суммы позволяет получить асимптотическую форму уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе. Найдены эволюционные уравнения на подпространство потоков, состоящее из векторных полей, чьи Фурье-разложения содержат только простые гармоники вида $\cos k\phi$. Такие векторные поля составляют подалгебру алгебры токов, которая является также замкнутой относительно действия коприсоединенных операторов. В таком случае произвольное уравнение Ландау – Лифшица, для которого вектор начальных условий лежит в этой подалгебре, останется в ней для всех *t*, для которых это решение определено. Отметим, что для изучения уравнения Ландау – Лифшица алгебра токов со стандартным коммутатором оказалась неэффективной: в частности, уравнение Ландау – Лифшица не является уравнением Эйлера на алгебре токов со стандартным коммутатором. Таким образом, для уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе вычислен явный вид эволюционных уравнений на коэффициенты Фурье-разложений его решений при помощи операторов, представляющих собой сумму операторов присоединенного и коприсоединенного действия алгебры токов на трехмерном торе с нестандартным коммутатором. При этом именно свойство компактности указанных операторов суммы (в то время как по отдельности их составляющие оператор присоединенного и оператор коприсоединенного действий не являются даже непрерывными) позволило получить указанную асимптотическую форму.

Ключевые слова: алгебра токов, скобка Ли, оператор присоединенного действия, оператор коприсоединенного действия, трехмерный тор, уравнение Ландау – Лифшица, асимптотика.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дан трехмерный тор T^3. Обозначим через $V(\mathrm{T}^3)$ пространство гладких векторных полей на T^3. Пространство $V(\mathrm{T}^3)$ с операцией поточечного векторного произведения

$$(m\times n)(x)=m(x)\times n(x) \tag{1}$$

является алгеброй Ли, которая называется алгеброй токов. Назовем операцию (1) стандартным коммутатором.

Рассмотрим уравнение Ландау – Лифшица [1] на T^3:

$$\frac{\partial m}{\partial t}=m\times\Delta m. \tag{2}$$

Здесь $m\in V(T^3)$, Δ – оператор Лапласа на векторных полях.

Для изучения уравнения Ландау – Лифшица алгебра токов со стандартным коммутатором (1) оказалась неэффективной. В частности, уравнение Ландау – Лифшица (Л-Л) не является уравнением Эйлера на алгебре токов со стандартным коммутатором [1]. Чтобы представить (Л-Л) как уравнение Эйлера, в пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ в [2] был введен нестандартный коммутатор. Для пояснения этой конструкции фиксируем $a > 0$ и введем оператор

$$P_a = -a\mathrm{Id} + \Delta,$$

здесь Id – тождественный оператор. Оператор P_a не имеет ядра, в отличие от оператора Лапласа Δ, и является обратимым.

Нестандартный коммутатор в пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ (в дальнейшем называемый также оператором присоединенного действия) задается следующим образом:

$$\mathrm{ad}_m n = [m, n] = P_a^{-1}(P_a m \times P_a n). \tag{3}$$

В пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ имеется также скалярное произведение

$$< m, n > = \int_{T^3} (m(x), -P_a(n)(x))\, dx. \tag{4}$$

Уравнение Л-Л (2) по отношению к алгебре Ли с коммутатором [3] и скалярному произведению (4) принимает вид уравнения Эйлера в алгебре Ли группы токов [2–5]:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \mathrm{ad}_m^*(m). \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{ad}_{\mathrm{m}}^* n$ является оператором коприсоединенного действия в пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ с коммутатором (3) и скалярным произведением (4), задаваемым условием

$$< \mathrm{ad}_m^*(u), v > = < u, \mathrm{ad}_{\mathrm{m}}(v) > \tag{6}$$

Из [6 , (6)] оператор коприсоединенного действия имеет вид

$$\mathrm{ad}_m^*(n) = -P_a \mathrm{ad}_m P_a^{-1}(n) = -P_a m \times n. \tag{7}$$

Согласно [2–5] решениями уравнения (5) на отрезке времени [0, T] являются кривые $m(t)$, которые минимизируют следующий функционал:

$$I = \int_0^T < m, m > dt = \int_0^T \left(\int_{\mathrm{T}^3} (m(x), -P_a(m)(x))\, dx \right) dt. \tag{8}$$

Решения Л-Л являются геодезическими левоинвариантной метрики на группе токов с алгеброй Ли $V(\mathrm{T}^3)$. Эта метрика задается в касательном пространстве к единице группы токов, отождествляемом с $V(\mathrm{T}^3)$, скалярным произведением (4).

Введем в алгебре токов оператор, представляющий собой сумму операторов присоединенного и коприсоединенного действий:

$$\mathrm{S}_m = \frac{1}{2}(\mathrm{ad}_m + \mathrm{ad}_m^*). \tag{9}$$

Далее мы будем использовать введенный в [5, (9)] ортонормированный в смысле метрики (4) базис в пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ из собственных векторов оператора P_a:

$$e_k^i = \frac{\lambda_k}{\sqrt{(|k|^2 + a)}}(\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})\cos(kx),\ f_k^i = \frac{\lambda_k}{\sqrt{(|k|^2 + a)}}(\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})\sin(kx),\ k \neq 0. \tag{10}$$

Здесь $k \in \mathrm{Z}^3$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_k = \sqrt{\dfrac{2}{vol(\mathrm{T}^3)}}$, $k \neq 0$; $\lambda_0 = \sqrt{\dfrac{1}{vol(\mathrm{T}^3)}}$.

Следуя [6], для однозначности при индексации элементов базиса (10) в дальнейшем будем представлять произвольный целочисленный вектор $k \neq 0$ в виде $k = \varepsilon(k)\bar{\bar{k}}$, где первая ненулевая координата вектора $\bar{\bar{k}}$ – положительна, а $\varepsilon(k) \in \{1, -1\}$.

Введем также фактор-пространство $[\mathrm{Z}^3] = \mathrm{Z}^3 / \{\pm 1\}$.

Пусть теперь $m(t)$ является решением уравнения Л-Л в форме уравнения Эйлера на группе токов (5). Разложим его по ортонормированному базису (10).

$$m(t) = \sum_i g_{0,i}(t)\, e_0^i + \sum_{k \in [Z^3], i} (g_{k,i}(t)\, e_k^i + h_{k,i}(t) f_k^i). \tag{11}$$

Тогда из [6] уравнение Л-Л распадается на серию эволюционных уравнений на коэффициенты разложения (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} &= -< \mathrm{S}_{e_k^i}\, m, m >, \\ \frac{\partial h_{k,i}}{\partial t} &= -< \mathrm{S}_{f_k^i}\, m, m >. \end{aligned} \tag{12}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА

В [6] были вычислены матричные коэффициенты операторов $\mathrm{S}_{e_k^i}, \mathrm{S}_{f_k^i}$ в базисе (10), причем там даны как их точные [6, (18)–(19)], так и приближенные [6, (22)] формулы. Используя эти формулы, раскроем уравнения на коэффициенты разложения решений Л-Л (12).

Введем векторы $\delta_i = (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \delta_{i,3})$. Здесь заметим, что при вычислении структурных констант алгебры токов в [6] можно было ограничиться рассмотрением только таких пар i, j, что $\delta_i \times \delta_j = \delta_s$, т. к., имея вычисленными эти случаи, все остальные легко получить заменой знака в соответствующих выражениях. Теперь же для суммирования рядов, возникающих при раскрытии рассматриваемых ниже эволюционных уравнений, необходимо ввести следующую функцию

$$\gamma(i,j)=\begin{cases}1, \delta_i\times\delta_j=\delta_s\\ -1, \delta_i\times\delta_j=-\delta_s\end{cases}.$$

Здесь удобно привести наиболее важные для последующих расчетов формулы, фигурирующие при вычислении операторов $\mathrm{S}_{e_k^i}, \mathrm{S}_{f_k^i}$, из [6, (20)].

$$\mu_{k,l}=\frac{2(k,l)+|k|^2}{\sqrt{(a+|k+l|^2)(a+|l|^2)}},$$
$$\nu_{k,l}=\frac{-2(k,l)+|k|^2}{\sqrt{(a+|k-l|^2)(a+|l|^2)}}. \tag{13}$$

Чтобы избежать излишне громоздких формул, условимся, что в приводимых ниже суммах в\при употреблении символа $\sum\limits_{l,j}$ подразумевается, что первый вектор l пробегает пространство $[\mathrm{Z}^3]$. Индексы k, j, s отождествляются с векторами $\delta_i, \delta_j, \delta_s$, причем соблюдается следующее соотношение знаков при их подстановке в следующие ниже формулы:

$$\delta_i\times\delta_j=\gamma(i,j)\,\delta_s.$$

Теперь, используя [6, (18)–(19)], получаем следующие выражения для эволюционных уравнений на коэффициенты разложения (11).

Предложение 1. Коэффициенты разложения (11) удовлетворяют эволюционным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t}=-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\Bigg\{&\sum_{l,j}g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,g_{k+l,s}+\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\\ &+\sum_{l\neq k,j}h_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,h_{k+l,s}-\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,h_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\\ &+h_{k,j}\frac{1}{\lambda_{2k}}\mu_{k,k}\,h_{2k,s}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{k,i}}{\partial t}=-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\Bigg\{&\sum_{l,j}h_{l,j}\left(-\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,g_{k+l,s}+\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\\ &+\sum_{l\neq k,j}g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,h_{k+l,s}+\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,h_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\\ &+g_{k,j}\frac{1}{\lambda_{2k}}\mu_{k,k}\,h_{2k,s}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство проводится путем раскрытия уравнений (12) на коэффициенты разложения (11) с использованием формул [6, (18)–(19)].

ПОЛУЧЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ

В [6] было установлено, что линейные операторы $\mathrm{S}_{e_k^i}$, $\mathrm{S}_{f_k^i}$ в пространстве $V(\mathrm{T}^3)$ с нормой, определяемой метрикой (4), являются компактными. Свойство компактности этих операторов позволяет получить асимптотические выражения для эволюционных уравнений (14)–(15). Фиксируем $L > 0$ и введем следующие частичные суммы для рядов (14), (15):

$$
\begin{aligned}
P_{k,i,L} = &-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\ \gamma(i,j)\Bigg\{\sum_{|l|\le L,\, j} g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\, g_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s}\right) + \\
&+ \sum_{|l|\le L,\, l\ne k,\, j} h_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\, h_{k+l,s} - \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\, h_{\overline{k-l},s}\right) + \\
&+ h_{k,j}\,\frac{1}{\lambda_{2k}}\mu_{k,k}\, h_{2k,s}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{k,i,L} = &-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\ \gamma(i,j)\Bigg\{\sum_{|l|\le L,\, j} h_{l,j}\left(-\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\, g_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l} g_{\overline{k-l},s}\right) + \\
&+ \sum_{|l|\le L,\, l\ne k,\, j} g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\, h_{k+l,s} + \frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\, h_{\overline{k-l},s}\right) + \\
&+ g_{k,j}\,\frac{1}{\lambda_{2k}}\mu_{k,k}\, h_{2k,s}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Для дальнейшего удобно воспроизвести асимптотические формулы для выражений, фигурирующих в структурных константах алгебры Ли токов, из [6, (21)]:

$$
\begin{aligned}
\mu_{k,l} &= \frac{2(k,l)}{|l|^2} + \frac{|k|^2}{|l|^2} - \frac{2(k,l)^2}{|l|^4} + o\left(\frac{1}{|l|^2}\right), \\
\nu_{k,l} &= -\frac{2(k,l)}{|l|^2} + \frac{|k|^2}{|l|^2} - \frac{2(k,l)^2}{|l|^4} + o\left(\frac{1}{|l|^2}\right).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Приведем также обозначения из [6]: $\lambda_k = \sqrt{\dfrac{2}{vol(T^3)}} = \lambda$, $a_{\kappa,l} = \dfrac{2(k,l)}{|l|^2}$, $b_{k,l} = \dfrac{|k|^2}{|l|^2} - \dfrac{2(k,l)^2}{|l|^4}$.

Предложение 2. Для эволюционных уравнений (14)–(15) получаем следующие асимптотические выражения при $|l| \to \infty$.

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t}=P_{k,i,L}-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\left\{\sum_{|l|>L,\,j} g_{l,j}\left((a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))\,g_{k+l,s}+(-a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{|l|>L,\,j} h_{l,j}\left((a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))\,h_{k+l,s}+(a_{k,l}-b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))h_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)\right\} \tag{19}$$

$$\frac{\partial h_{k,i}}{\partial t}=Q_{k,i,L}-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\left\{\sum_{|l|>L,\,j} g_{l,j}\left((a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))\,h_{k+l,s}+(-a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))h_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{|l|>L,\,j} h_{l,j}\left((-a_{k,l}-b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))\,g_{k+l,s}+(-a_{k,l}+b_{k,l}+o(\frac{1}{|l|^2}))g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right)\right\} \tag{20}$$

Доказательство проводится декомпозицией правых частей выражений (14) и (15) с использованием формул из [6, (22)].

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ – ЛИФШИЦА НА ПОДАЛГЕБРЕ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

Рассмотрим также подпространство $V_0(\mathrm{T}^3)$ в алгебре токов $V(\mathrm{T}^3)$, состоящее из векторных полей, в разложении в ряд Фурье которых участвуют только простые гармоники вида $\cos k\varphi$ (элементы базиса (9) вида e_k^i). Для элементов из $V_0(\mathrm{T}^3)$ в разложении (11) ненулевыми являются только коэффициенты $g_{0,i}(t),\ g_{k,i}(t)$.

Легко проверить, что векторные поля из $V_0(\mathrm{T}^3)$ образуют подалгебру в алгебре токов $V(\mathrm{T}^3)$. Пространство $V_0(\mathrm{T}^3)$ является замкнутым не только относительно операторов присоединенного действия элементами из $V_0(\mathrm{T}^3)$ (свойство подалгебры), но также относительно операторов коприсоединенного действия (последнее вытекает из формулы для оператора коприсоединенного действия (7)).

Для такого типа подалгебр в алгебре токов произвольное решение $m(t)$ уравнения Л-Л, у которого вектор начальных условий $m(0)$ лежит в подалгебре $V_0(\mathrm{T}^3)$, будет оставаться в подалгебре $V_0(\mathrm{T}^3)$ при всех t, для которых это решение определено.

Предложение 3. Для элементов из $V_0(\mathrm{T}^3)$ получаем следующую форму эволюционных уравнений их коэффициентов разложения по базису $\{e_k^i\}$.

$$\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t}=-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\sum_{l,\,j} g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,g_{k+l,s}+\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right) \tag{21}$$

Здесь, как и выше, получим асимптотические формулы для эволюционных уравнений. Для этого также фиксируем $L>0$ и введем следующие частичные суммы:

$$P_{k,i,L}=-\frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\;\gamma(i,j)\sum_{|l|\le L,\,j} g_{l,j}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_{k+l}}\mu_{k,l}\,g_{k+l,s}+\frac{\lambda_l}{\lambda_{k-l}}\nu_{k,l}\,g_{\overline{\overline{k-l}},s}\right) \tag{22}$$

Предложение 4. Для уравнений (21) получаем следующие асимптотические выражения эволюционных уравнений при $|l| \to \infty$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{k,i}}{\partial t} &= P_{r,i,L} - \\ &- \frac{\lambda_k}{4}\sqrt{(a+|k|^2)}\ \gamma(i,j) \sum_{|l|>L,\, j} g_{l,j}\left((a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2}))\, g_{k+l,s} + (-a_{k,l} + b_{k,l} + o(\frac{1}{|l|^2}))\, g_{\overline{\overline{}}k-l,s} \right)\end{aligned} \tag{23}$$

ВЫВОДЫ

Для уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе вычислен явный вид эволюционных уравнений на коэффициенты Фурье-разложений его решений. Для этого использованы вычисленные ранее операторы, представляющие суммы операторов присоединенного и коприсоединенного действия для алгебры токов на трехмерном торе с нестандартным коммутатором.

Установленное ранее свойство компактности указанных операторов суммы (в то время как по отдельности их составляющие оператор присоединенного и оператор коприсоединенного действий не являются даже непрерывными) позволило получить асимптотическую форму для уравнения Ландау – Лифшица на трехмерном торе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексовский В.А., Лукацкий А.М. Нелинейная динамика намагниченности ферромагнетиков и движение обобщенного твердого тела с группой токов // Теоретическая и математическая физика. 1990. Т. 85, № 1. С. 115–123.

2. Lukatsky A.M. On the geometry of current group and a model of the Landau Lifschitz equation // Lie groups and Lie Algebras / B.P. Komrakov et al.(eds.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998. Pp. 425–433.

3. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.

4. Хесин Б.А., Вендт Р. Геометрия бесконечномерных групп. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2014. 368 с.

5. Лукацкий А.М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 175 с.

6. Лукацкий А.М. О структуре действия коприсоединенного оператора на алгебре токов трехмерного тора // Научный Вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20, № 02. С. 117–125.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

8. Lukatskii A.M. On the structure of spherical Lie vector fields and groups of diffeomorphisms and // Siberian Math. Zh. 1977. T. 28, No. 1. Pp. 161–173.

9. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis // North Holland Publ. Comp., 1979.

10. Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry. 3rd ed. Springer-Verlag, 1966.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Лукацкий Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИНЭИ РАН, lukatskii.a.m.math@mail.ru.

ON THE ASYMPTOTIC FORM OF THE LANDAU-LIFSHITZ EQUATION ON A THREE-DIMENSIONAL TORUS

Alexander M. Lukatsky[1]

[1]*Energy Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

We consider the Landau-Lifshitz equation on a three-dimensional torus. The equation is reduced to the form of the Euler equation for the geodesic left-invariant metric on the infinite-dimensional Lie algebra of the current group. The group of currents is given by a pointwise mapping of the three-dimensional torus into a three-dimensional orthogonal group. In Lie algebra we use the non-standard commutator introduced earlier. The solutions of the Landau-Lifshitz equation can be expanded in terms of the orthonormal basis of the left-invariant metric in the currents algebra. For the expansion coefficients of the solution of the Landau-Lifshitz equation, the explicit form of the evolution equations is deduced in the framework of the constructed model. To do this, we use the expressions obtained earlier for the sums of the adjoint and coadjoint action operators in an infinite-dimensional Lie algebra of currents with nonstandard commutator. The compactness property of the indicated sum operators makes it possible to obtain the asymptotic form of the Landau-Lifshitz equation on a three-dimensional torus. Evolution equations are found on the subspace of flows consisting of vector fields whose Fourier expansions contain only simple harmonics of the form $\cos(k\varphi)$. Such vector fields form a subalgebra of the currents algebra which is also closed under the action of coadjoint operators. In this case, an arbitrary Landau-Lifshitz equation for which the vector of initial conditions lies in this subalgebra remains in it for all t for which this solution is defined. We note that to study the Landau-Lifshitz equation the currents algebra with the standard commutator turned out to be ineffective: in particular, the Landau-Lifshitz equation is not an Euler equation on the current algebra with a standard commutator. Thus, for the Landau-Lifshitz equation on the three-dimensional torus, the explicit form of the evolution equations for the coefficients of the Fourier expansion of its solutions by means of operators representing the sum of the operators of the adjoint and co-adjoint action of the current algebra on a three-dimensional torus with nonstandard commutator is obtained. Moreover, it is the property of compactness of the indicated sum operators (while, separately, their components, the operator of the adjoint action operator as well as the coadjoint one are not even continuous) made it possible to obtain the indicated asymptotic form.

Key words: currents algebra, Lie bracket, operator of the adjoint action, operator of the co-adjoint action, three-dimensional torus, the Landau-Lifshitz equation, asymptotics.

REFERENCES

1. Aleksovskiy V.A., Lukatskiy A.M. *Nelineynaya dinamika namagnichennosti feromagnetikov i dvizhenie oboshyonnogo tverdogo tela s gruppoy tokov* [Nonlinear dynamics of ferromagnets magnetization and motion of generalized solid body with the current group]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics], 1990, vol. 85, No. 1, pp. 1090–1096. (in Russian)

2. Lukatsky A.M. On the geometry of current group and a model of the Landau Lifschitz equation. Lie groups and Lie Algebras / B.P. Komrakov et al. (eds.). Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, 1998, pp. 425–433.

3. Arnold V.I., Khesin B.A. *Topologicheskiye metody v gidrodinamike* [Topological methods in hydro-dynamics]. M.: MCCME Publ. 2007, 392 p. (in Russian)

4. Khesin B.A., Wendt R. *Geometriya beskonechnomernyh grupp. Topologicheskiye metody v gidrodinamike* [The geometry of infinite-dimensional groups. Topological methods in hydrodynamics]. M.: MCCME, 2014, 368p. (in Russian)

5. Lukatsky A.M. *Strukturno-geometricheskiye svoystva beskonechnomrnykh grupp Li v primenenii k uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Structural and geometric properties of infinite – dimensional Lie groups in the application to the equations of mathematical physics]. Yaroslavl': Yaroslavl State University named after P.G. Demidov, 2010, 175p. (in Russian)

6. Lukatsky A.M. On the structure of the operator coadjoint action for the current algebra on the three-dimensional torus. Civil Aviation High Technologies, 2017, vol. 20, no. 02, pp. 117–125.

7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1972, 496 p. (in Russian)

8. Lukatskii A.M. On the structure of spherical Lie vector fields and groups of diffeomorphisms and. Siberian Math. Zh., 1977, vol. 28, no. 1, pp. 161–173.

9. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. North Holland Publ.Comp., 1979.

10. Hirzebruch F. Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd ed., Springer-Verlag, 1966.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander M. Lukatsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Energy Research Institute of Russian Academy of Sciences, lukatskii.a.m.math@mail.ru.

Поступила в редакцию	23.11.2017	Received	23.11.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018