УДК 517.957
DOI: 10.26467/2079-0619-2018-21-2-96-104

ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАПОПОРТА – ЛИСА

Е.Н. КУШНЕР[1]

[1] *Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия*

Для обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса построена алгебра дифференциальных инвариантов относительно точечных преобразований, то есть преобразований независимых и зависимых переменных. Нахождение общего преобразования такого типа сводится к решению крайне сложного функционального уравнения. Поэтому мы, следуя подходу Софуса Ли, ограничимся поиском инфинитезимальных преобразований, то есть таких, которые порождаются сдвигами вдоль траекторий векторных полей. Задача отыскания этих векторных полей сводится к решению переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений относительно их коэффициентов. Уравнения Рапопорта – Лиса возникают при изучении процессов нелинейной фильтрации в пористых средах, а также в других областях естествознания: например, эти уравнения описывают различные физические процессы: двухфазную фильтрацию в пористой среде, фильтрацию политропного газа, распространение тепла при ядерном взрыве. Они являются актуальной темой для исследования: в недавних работах Бибикова, Лычагина и других проведен анализ симметрий обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса и найдены его конечномерные динамики и условия существования аттракторов. Поскольку обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, для их изучения в работе используются методы геометрической теории дифференциальных уравнений. Согласно этой теории дифференциальные уравнения порождают подмногообразия в пространстве джетов. Это позволяет использовать аппарат современной дифференциальной геометрии для исследования дифференциальных уравнений. Вводится понятие допустимых преобразований, то есть замен переменных, не выводящих уравнения за пределы класса уравнений Рапопорта – Лиса. Такие преобразования образуют группу Ли. Для этой группы Ли находятся дифференциальные инварианты, которые разделяют ее регулярные орбиты, что позволяет классифицировать обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса.

Ключевые слова: джеты, точечные преобразования, дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования.

ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные уравнения Рапопорта – Лиса имеют следующий вид [1, 2]:

$$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}, \tag{1}$$

где $u = u(t, x)$ – неизвестная функция, A и B – функции от переменной u, которые мы будем считать бесконечно дифференцируемыми. Эти уравнения описывают различные физические процессы: двухфазную фильтрацию в пористой среде, фильтрацию политропного газа, распространение тепла при ядерном взрыве [3].

В данной работе построена алгебра дифференциальных инвариантов уравнений (1) относительно точечных преобразований. А именно, среди точечных преобразований выделяются преобразования, сохраняющие класс обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса. Такие преобразования мы называем допустимыми. Они образуют группу Ли, а ее дифференциальные инварианты являются также и дифференциальными инвариантами обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса.

В работе [4] проведен анализ симметрий обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса, а в работе [1] найдены его конечномерные динамики и условия существования аттракторов.

ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Уравнение (1) можно записать в виде

$$u_t = A'(u)u_x + B'(u)u_{xx} + B''(u)u_x^2. \tag{2}$$

Для упрощения вычислений обозначим

$$a(u) = A'(u), \qquad b(u) = B'(u)$$

и вместо уравнения (2) будем рассматривать уравнение

$$u_t = a(u)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2. \tag{3}$$

В пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$ с каноническими координатами $t, x, u_{0,0}, u_{1,0}, \dots, u_{0,2}$ уравнение (3) определяет гиперповерхность [6]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(a,b)} = \{F(a,b) = 0\},$$

где

$$F(a,b) = u_{1,0} - a(u_{0,0})u_{0,1} - b(u_{0,0})u_{0,2} - b'(u_{0,0})u_{0,1}^2.$$

Пусть $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{(\tilde{a},\tilde{b})}$ – другое уравнение типа (3).

Будем говорить, что уравнения $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ эквивалентны, если существует точечное преобразование $\varphi: J^0(\mathbb{R}^2) \to J^0(\mathbb{R}^2)$ такое, что

$$\varphi^{(2)}(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}.$$

Здесь $\varphi^{(2)}$ – продолжение преобразования φ в пространство 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$. В терминах функций это означает, что

$$\left(\varphi^{(2)}\right)^*(F(a,b)) = \lambda F(\tilde{a},\tilde{b}), \tag{4}$$

где λ – некоторая функция на пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$.

Заметим, что нахождение общего преобразования φ сводится к решению крайне сложного функционального уравнения. Поэтому мы, следуя подходу Софуса Ли, ограничимся поиском инфинитезимальных преобразований, то есть таких, которые порождаются сдвигами вдоль траекторий векторных полей. Задача отыскания этих векторных полей сводится к решению переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений относительно их коэффициентов.

Пусть X – векторное поле на пространстве $J^0(\mathbb{R}^2)$ и φ_τ – преобразование сдвига вдоль его траекторий от $\tau = 0$ до τ. Тогда φ_0 – тождественное преобразование. Вместо формулы (4) получаем

$$\left(\varphi_\tau^{(2)}\right)^*(F(a,b)) = \lambda_\tau F(\tilde{a}_\tau,\tilde{b}_\tau), \tag{5}$$

где λ_τ – однопараметрическое семейство функций на $J^2(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{a}_\tau, \tilde{b}_\tau$ – однопараметрические семейства функций от переменной u, причем $\lambda_0 = 1$, $\tilde{a}_0 = a, \tilde{b}_0 = b$.

Дифференцируя обе части формулы (5) по параметру τ при $\tau = 0$ и ограничивая полученное равенство на уравнение $\mathcal{E}$, получим

$$X^{(2)}(F(a,b))\Big|_{F(a,b)=0} = -\frac{da_\tau}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,1} - \frac{db_\tau}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,2} - \frac{db'_\tau}{d\tau}\Big|_{\tau=0} u_{0,1}^2. \qquad (6)$$

Здесь $X^{(2)}$ – продолжение векторного поля X в пространство 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$.

Формула (6) эквивалентна системе одиннадцати линейных дифференциальных уравнений на коэффициенты векторного поля X, решая которую получаем вид векторного поля X:

$$X = (\alpha_0 + \alpha_1 t)\frac{\partial}{\partial t} + (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x)\frac{\partial}{\partial x} + (\delta_0 + \delta_1 u_{0,0})\frac{\partial}{\partial u_{0,0}}.$$

Греческими буквами здесь обозначены произвольные постоянные.

Таким образом, базис алгебры Ли векторных полей, порождающих группу Ли допустимых преобразований, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t},\quad t\frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial x},\quad t\frac{\partial}{\partial x},\quad x\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial u_{0,0}},\quad u_{0,0}\frac{\partial}{\partial u_{0,0}}.$$

Преобразования сдвига вдоль траекторий этих векторных полей имеют вид:

$$\begin{gathered} t \mapsto t+\tau;\quad t \mapsto te^\tau; \\ x \mapsto x+\tau;\quad x \mapsto x+t\tau;\quad x \mapsto xe^\tau; \\ u_{0,0} \mapsto u_{0,0}+\tau;\quad u_{0,0} \mapsto u_{0,0}e^\tau. \end{gathered} \qquad (7)$$

Для краткости здесь мы указываем только те переменные, которые изменяются при сдвигах.

Видим, что группа Ли допустимых преобразований порождена трансляциями и растяжениями вдоль осей координат $t, x, u_{0,0}$, а также одним обобщенным растяжением вдоль оси x.

РАССЛОЕНИЕ RL

Выясним, как группа Ли допустимых преобразований действует на коэффициенты a и b уравнения (3).

Введем пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами u, a, b и пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами a, b и определим тривиальное расслоение

$$\pi_{RL}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \pi_{RL}: (u,a,b) \mapsto (a,b).$$

Это расслоение будем называть *расслоением Рапопорта – Лиса* или расслоением RL.

Первое преобразование в (7) не меняет уравнения (3). Второе переводит его в уравнение

$$e^{-\tau}u_t = a(u)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2,$$

и поэтому на расслоении Рапопорта – Лиса оно действует так:

$$(u,a,b) \mapsto (u, e^\tau a, e^\tau b).$$

Третье преобразование не меняет уравнения, а четвертое переводит его в уравнение

$$u_t = (a(u)+\tau)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2,$$

и на расслоении Рапопорта – Лиса оно действует так:

$$(u, a, b) \mapsto (u, a + \tau, b).$$

Пятое преобразование переводит уравнение (3) в уравнение

$$u_t = e^{-\tau}a(u)u_x + e^{-2\tau}b(u)u_{xx} + e^{-2\tau}b'(u)u_x^2$$

и порождает преобразование

$$(u, a, b) \mapsto (u, e^{-\tau}a, e^{-2\tau}b)$$

на расслоении.

Последние два преобразования на расслоении Рапопорта – Лиса действуют следуюшим образом:

$$(u, a, b) \mapsto (u + \tau, a, b)$$

и

$$(u, a, b) \mapsto (e^{\tau}u, a, b).$$

Таким образом, допустимые преобразования, ограниченные на расслоение Рапопорта – Лиса, образуют пятимерную группу Ли, которую обозначим через G_{RL}. Соответствующая алгебра Ли $\mathcal{G}_{RL}$ порождена векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial a}, \quad Y_4 = a\frac{\partial}{\partial a}, \quad Y_5 = b\frac{\partial}{\partial b}.$$

Таблица 1

Table 1

Коммутационные соотношении

Commutation correlations

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1	0	Y_1	0	0	0
Y_2	$-Y_1$	0	0	0	0
Y_3	0	0	0	Y_3	0
Y_4	0	0	$-Y_3$	0	0
Y_5	0	0	0	0	0

Ее коммутационные соотношения приведены в таблице 1.

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Пусть $J^k(\pi_{RL})$ – пространство k-джетов сечений расслоения RL и $u, a_0, b_0, \dots, a_k, b_k$ – канонические координаты на этом пространстве.

Дифференциальным инвариантом порядка k группы Ли G_{RL} (и обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса) называется функция J на пространстве k-джетов расслоения RL, постоянная на орбитах продолженной в пространство $J^k(\pi_{RL})$ группы Ли G_{RL} [5].

При этом функция J является решением системы пяти линейных дифференциальных уравнений $J^k(\pi_{RL})$

$$Y_i^{(k)}(J) = 0, \quad i = 1, \dots, 5. \tag{8}$$

Здесь $Y_i^{(k)}$ – продолжение векторного поля Y_i в пространство $J^k(\pi_{RL})$.

Дифференциальные инварианты образуют алгебру относительно операции сложения и умножения, то есть если J_1 и J_2 – дифференциальные инварианты, то их сумма $J_1 + J_2$ и произведение J_1J_2 также являются дифференциальными инвариантами.

Дифференциальные инварианты $J_1, \dots, J_s$ порядка не выше k называются *базовыми*, если они функционально независимы и любой другой дифференциальный инвариант порядка не выше k является функцией от них. В этом случае число s называется *размерностью* алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k.

Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k равна коразмерности регулярной орбиты группы Ли $G_{RL}^{(k)}$.

В нашем случае точка $\theta \in J^k(\pi_{RL})$ является регулярной, если ранг системы касательных векторов $Y_{1,\theta}^{(k)}, \dots, Y_{5,\theta}^{(k)}$ максимален.

Это означает, например, что в пространстве $J^0(\pi_{RL})$ регулярными являются все точки, в которых ни одна из координат u, a_0, b_0 не обращается в нуль.

В пространстве $J^k(\pi_{RL})$ точки, в которых ни одна из координат $u, a_0, b_0, \dots, a_k, b_k$ не обращается в нуль, также являются регулярными. Это следует из вида векторных полей

$$Y_1^{(k)} = \frac{\partial}{\partial u},$$
$$Y_2^{(k)} = u\frac{\partial}{\partial u} - \sum_{i=1}^{k} i\left(a_i\frac{\partial}{\partial a_i} + b_i\frac{\partial}{\partial b_i}\right),$$
$$Y_3^{(k)} = \frac{\partial}{\partial a_0},$$
$$Y_4^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} a_j\frac{\partial}{\partial a_j},$$
$$Y_5^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} b_j\frac{\partial}{\partial b_j}.$$

Первые два нетривиальных дифференциальных инварианта имеют порядок два. Действительно,

$$\dim J^k(\pi_{RL}) = 2k + 3,$$

а размерность регулярной орбиты равна пяти. Эти инварианты мы получаем, решая систему (8) для $k = 2$:

$$J_{2,1} = \frac{a_2 b_0}{a_1 b_1},$$
$$J_{2,2} = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}.$$

Легко подсчитать, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше k равна $2k$ $(k \geq 2)$. При этом порядок равный ровно k имеют только два инварианта.

Для вычисления дифференциальных инвариантов более высоких порядков мы используем инвариантное дифференцирование.

Напомним, что дифференциальный оператор

$$\nabla = f\frac{d}{du}$$

называется *инвариантным дифференцированием*, если для любого векторного поля X^* на пространстве $J^\infty(\pi_{RL})$

$$X^* \circ \nabla = \nabla \circ X^*. \tag{9}$$

Здесь f – некоторая локально гладкая функция на пространстве бесконечных джетов $\dim J^\infty(\pi_{RL})$, а

$$\frac{d}{du} = \frac{\partial}{\partial u} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial}{\partial b_0} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial b_1} + \cdots$$

– оператор полного дифференцирования по переменной u.

Несложно проверить, что оператор

$$\nabla = \frac{b_0}{b_1} \frac{d}{du}$$

является оператором инвариантного дифференцирования.

Из формулы (9) следует, что если J – дифференциальный инвариант, то и функция $\nabla(J)$ также является дифференциальным инвариантом.

Действительно, для любого векторного поля

$$X^*(J) = 0.$$

Но тогда в силу формулы (9) получаем, что

$$X^*(\nabla(J)) = \nabla(X^*(J)) = 0.$$

Таким образом, применяя к двум найденным дифференциальным инвариантам $J_{2,1}$ и $J_{2,2}$ оператор ∇, получим два дифференциальных оператора третьего порядка

$$J_{3,1} = \nabla(J_{21}) = \frac{b_0}{a_1^2 b_1^3}(a_1 a_2 b_0 b_2 - a_1 a_2 b_1^2 - a_1 a_3 b_0 b_1 + a_2^2 b_0^2 b_1),$$
$$J_{3,2} = \nabla(J_{22}) = \frac{b_0}{b_1^4}(b_1^2 b_2 - 2 b_0 b_2^2 + b_0 b_1 b_2).$$

Таким же образом можно получить новые дифференциальные инварианты порядка k:

$$J_{k,1} = \nabla\big(J_{k-1,1}\big),$$
$$J_{k,2} = \nabla(J_{k-1,2}).$$

Следующая теорема дает описание структуры алгебры дифференциальных инвариантов.

Теорема 1. Алгебра дифференциальных инвариантов обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса порождена двумя базовыми инвариантами второго порядка

$$J_{2,1} = \frac{a_2 b_0}{a_1 b_1} \quad \text{и} \quad J_{2,2} = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}$$

и одним инвариантным дифференцированием

$$\nabla = \frac{b_0}{b_1} \frac{d}{du}.$$

Эта алгебра разделяет регулярные орбиты группы Ли G_{RL}.

Доказательство. Пусть $\theta \in J^k(\pi_{RL})$ – регулярная точка и

$$\pi_{k,0}: J^k(\pi_{RL}) \to J^0(\pi_{RL}),$$
$$\pi_{k,0}: (u, a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) \mapsto (u, a_0, b_0)$$

– естественная проекция на пространство 0-джетов. Так как точка θ регулярная, то ее проекция

$$\pi_{k,0}(\theta) = (u(\theta), a_0(\theta), b_0(\theta))$$

имеет ненулевую компоненту $b_0(\theta)$.

На множестве

$$M = J^0(\pi_{RL}) \setminus \{(u, a_0, 0) | u, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

группа Ли G_{RL} действует транзитивно.

Действительно, сдвигом вдоль траекторий векторных полей

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial a_0}, \qquad Y_5 = b_0 \frac{\partial}{\partial b_0}$$

любую точку множества M можно перевести в точку $(0,0,1)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\pi_{k,0}(\theta) = \sigma = (0,0,1)$.

Стационарная подалгебра точки σ порождена векторными полями

$$Y_2 = u \frac{\partial}{\partial u} \text{ и } Y_4 = a_0 \frac{\partial}{\partial a_0}.$$

Рассмотрим слой проекции

$$N_\sigma = \pi_{k,0}^{-1}(\sigma) \subset J^k(\pi_{RL}).$$

Размерность этого слоя равна $2k$ и функции $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ можно рассматривать как координаты на нем. Ограничение векторных полей $Y_2^{(k)}$ и $Y_4^{(k)}$ на этот слой имеют вид

$$Y_2^{(k)}\Big|_{N_\sigma} = -b_1 \frac{\partial}{\partial b_1} - 2b_2 \frac{\partial}{\partial b_2} - \dots - kb_k \frac{\partial}{\partial b_k},$$
$$Y_4^{(k)}\Big|_{N_\sigma} = a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \dots + a_k \frac{\partial}{\partial a_k}.$$

Так как точка θ регулярная, то в каждой точке слоя N_σ эти поля линейно независимы. Поэтому размерность орбиты алгебры Ли $\mathcal{G}_{RL}|_{N_\sigma}$ равна двум, а коразмерность орбиты точки θ, а следовательно и размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не выше чем k, равна $2k - 2$.

Итак, количество функционально независимых диффренциальных инвариантов порядка не выше чем k равно $2k - 2$. Все они исчерпываются построенными инвариантами $J_{k,1}$ и $J_{k,2}$.

Теорема доказана.

Вместо дифференциальных инвариантов $J_{k,1}$ и $J_{k,2}$ можно использовать функции

$$I_{k,1} = \frac{a_k b_0^{k-1}}{a_1 b_1^{k-1}}, \qquad I_{k,2} = \frac{b_k b_0^{k-1}}{b_1^k},$$

которые также являются дифференциальными инвариантами, что несложно проверить.

Построенная алгебра дифференциальных инвариантов может быть использована для классификации обобщенных уравнений Рапопорта – Лиса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады Акад. наук. 2017. Т. 472, № 6. С. 627–630.

2. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. Vol. 198. Pp. 139–148.

3. Баренблатт Г.И. Нелинейная фильтрация: прошлое, настоящее и будущее // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Наука, 1987. С. 15–27.

4. Bibikov P. Group classification of Rapoport-Leas equations // Lobachevskii J Math. 2017. Vol. 38, No. 1. P. 116.

5. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1988. 297 с.

6. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 336 с.

7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations // Analysis and Mathematical Physics. 2016. Vol. 7, No. 2. Pp. 107–115.

8. Lychagin V.V., Kruglikov B.S. Global Lie-Tresse theorem // Selecta Mathematica, New Series. 2016. C. DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.

9. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Natural spinor structures over Lorentzian manifolds // Journal of Geometry and Physics. 2016. Vol. 106. Pp. 1–5.

10. Akhmetzyanov A.V., Kushner A.G., Lychagin V.V. Mass and heat transport in the two-phase Buckley-Leverett model // Journal of Geometry and Physics. 2017. Vol. 113. Pp. 2–9.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кушнер Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики МГТУ ГА, ekushner@ro.ru.

INVARIANTS OF GENERALIZED RAPOPORT-LEAS EQUATIONS

Elena N. Kushner[1]

[1]*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

ABSTRACT

For the generalized Rapoport-Leas equations, algebra of differential invariants is constructed with respect to point transformations, that is, transformations of independent and dependent variables. The finding of a general transformation of this type reduces to solving an extremely complicated functional equation. Therefore, following the approach of Sophus Lie, we restrict ourselves to the search for infinitesimal transformations which are generated by translations along the trajectories of vector fields. The problem of finding these vector fields reduces to the redefined system decision of linear differential equations with respect to their coefficients. The Rapoport-Leas equations arise in the study of nonlinear filtration processes in porous media, as well as in other areas of natural science: for example, these equations describe various physical phenomena: two-phase filtration in a porous medium, filtration of a polytropic gas, and propagation of heat at nuclear explosion. They are vital topic for research: in recent works of Bibikov, Lychagin, and others, the analysis of the symmetries of the generalized Rapoport-Leas equations has been carried out; finite-dimensional dynamics and conditions of attractors existence have been found. Since the generalized Rapoport-Leas equations are nonlinear partial differential equations of the second order with two independent variables; the methods of the geometric theory of differential equations are used to study them in this paper. According to this theory differential equations generate subvarieties in the space of jets. This makes it possible to use the apparatus of modern differential geometry to study differential equations. We introduce the concept of admissible transformations, that is, replacements of variables that do not derive equations outside the class of the Rapoport-Leas equations. Such transformations form a Lie group. For this Lie group there are differential invariants that separate its regular orbits, which allow us to classify the generalized Rapoport-Leas equations.

Key words: jets, point transformations, differential invariants, invariant differentiations.

REFERENCES

1. Lychagin V.V., Kushner A.G., Akhmetzyanov A.V. *Attraktory v modelyakh fil'tratsii* [Attractors in Models of Porous Media Flow]. *Doklady Academii nauk* [*Doklady Mathematics*], 2017, vol. 472, No. 6, pp. 627–630. (in Russian)

2. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood. AIME Trans, 1953, vol. 198, pp. 139–148.

3. Barenblatt G.I. *Nelineynaya fil'tratsiya: proshloye, nastoyashcheye i budushcheye* [Nonlinear filtering: past, present, and future]. *Problemy teorii fil'tratsii i mekhanika protsessov povysheniya nefteotdachi* [Problems of the theory of filtration and mechanics of enhanced oil recovery processes]. M.: Nauka, 1987, pp. 15– 27. (in Russian)

4. Bibikov P. Group classification of Rapoport-Leas equations. Lobachevskii J Math, 2017, vol. 38, no. 1, p. 116.

5. Alekseevskiy D.V., Lychagin V.V., Vinogradov A.M. *Osnovnyye ponyatiya differentsial'noy geometrii* [Basic Ideas and Concepts of Differential Geometry]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya “Sovremenniye problemy matematiki. Fundamental’niye napravleniya”* [Results of Science and Engineering. A series of "Modern problems of mathematics. Fundamental directions]. M.: VINITI, vol. 28, 1988, 297 p. (in Russian)

6. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S., Lychagin V.V. *Vvedeniye v geometriyu nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the geometry of nonlinear differential equations]. M.: Nauka, 1986, 336p. (in Russian)

7. Lychagin V.V., Yumaguzhin V.A. Differential invariants and exact solutions of the Einstein equations. Analysis and Mathematical Physics, 2016, vol. 7, no 2, pp. 107–115.

8. Lychagin V.V., Kruglikov B.S. Global Lie-Tresse theorem. Selecta Mathematica, New Series. 2016. C. DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.

9. Lychagin V.V., **Yumaguzhin V.A.** Natural spinor structures over Lorentzian manifolds. Journal of Geometry and Physics, 2016, vol. 106, pp. 1–5.

10. Lychagin V.V., Kushner A.G., Akhmetzyanov A.V. Mass and heat transport in the two-phase Buckley-Leverett model. Journal of Geometry and Physics, 2017, vol. 113, pp. 2–9.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Elena N. Kushner, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, ekushner@ro.ru.

Поступила в редакцию	28.10.2017	Received	28.10.2017
Принята в печать	14.03.2018	Accepted for publication	14.03.2018