УДК 517.988.57+517.988.521

О МЕРАХ НЕКОМПАКТНОСТИ В НЕРАВЕНСТВАХ

Н.А. ЕРЗАКОВА[1]

[1]*Московский государственный технический университет гражданской авиации, г. Москва, Россия*

Меры некомпактности – это, по сути, числовые характеристики ограниченных подмножеств метрического пространства, равные нулю на относительно компактных подмножествах. Впервые количественную характеристику степени некомпактности (меру некомпактности) подмножества метрического пространства ввел в рассмотрение К. Куратовский в 1930 г. в связи с задачами общей топологии. Существуют различные меры некомпактности. Меры некомпактности – это простой и удобный инструмент для решения различных задач. Поэтому теория мер некомпактности до сих пор интенсивно развивается, находит все новые и новые приложения в различных областях математики. Так, в предлагаемой работе меры некомпактности используются при исследовании неравенства, точнее, обобщения одного неравенства, встречающегося в многочисленных публикациях и имеющего широкое приложение. Например, в трудах таких авторов, как Ю.А. Дубинский, Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженес, это неравенство доказывается для операторов вложения в банаховых пространствах (частном случае метрических пространств), затем используется для доказательства разрешимости нелинейных эллиптических и параболических уравнений. В отличие от этих авторов здесь при исследовании неравенства не предполагается компактность оператора вложения. Более того, в метрическом пространстве для аналога неравенства, записанного через произвольные числовые характеристики ограниченных подмножеств (не обязательно мер некомпактности), получены необходимые и достаточные условия справедливости этого аналога. Следствием полученного результата, в случае если числовая характеристика множества, на самом деле, мера некомпактности, является новый критерий компактности одного оператора (не обязательно линейного) при условии компактности другого.

Ключевые слова: нормированное пространство, метрическое пространство, мера некомпактности, оператор вложения.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена обобщениям одного неравенства, имеющего различные приложения и исследуемого в литературе. Так, например, в [1, 2] рассматриваются банаховы пространства E_0, E, F, причем $E_0 \subset E \subset F$ и вложение $E_0 \subset E$ компактно, пространства E, F рефлексивны. Тогда при этих предположениях доказывается, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \|u\|_E \le \varepsilon \|u\|_{E_0} + c_\varepsilon \|u\|_F .$$

В [3, 4] рассматривается множество $\Xi \subseteq E$, на котором определена операция умножения на действительные числа, т. е. если $u \in \Xi$, то $\lambda u \in \Xi$ для любого действительного числа λ. Кроме того, каждому элементу $u \in \Xi$ можно поставить в соответствие действительное число $[u]_\Xi$, обладающее следующими свойствами:

1) $[u]_\Xi \ge 0$, при этом $[u]_\Xi = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$;

2) для любого λ имеет место соотношение $[\lambda u]_\Xi = |\lambda| [u]_\Xi$;

3) вложение Ξ в E компактно, т. е.

$$\exists K > 0 : \|u\|_E \le K [u]_\Xi \forall u \in \Xi ;$$

из всякого бесконечного множества элементов $u \in \Xi$, для которых $[u]_{\Xi} \leq c$ ($c > 0$ – произвольная постоянная), можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в E. Тогда1

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_{\varepsilon} > 0 : \|u - v\|_E \leq \varepsilon([u]_{\Xi} + [v]_{\Xi}) + c_{\varepsilon}\|u - v\|_F$$

для любых $u, v \in \Xi$.

Результаты настоящего исследования, излагаемые в последующих двух разделах, являются обобщением некоторых результатов автора из [5].

В настоящей работе аналогичное неравенство будет записано сначала в нормированном пространстве, а затем и в метрическом пространстве для произвольных операторов, а не только для оператора вложения. Основная цель настоящей работы – получить аналог неравенства для числовых характеристик ограниченных подмножеств метрических пространств. Примером числовых характеристик ограниченных подмножеств метрических пространств являются меры некомпактности [6–14]. В последующих двух разделах будут доказаны необходимые и достаточные условия справедливости различных обобщений указанного неравенства.

ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Пусть E и F – произвольные нормированные пространства. Пусть $\Xi \subseteq E$ – некоторое подмножество, а θ – нуль в E. Пусть $M : \Xi \to R_+$ – функция на Ξ с вещественными неотрицательными значениями. Рассмотрим отображения, $A : \Xi \to E$ и $T : \Xi \to F$, удовлетворяющие следующему условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_{\varepsilon} > 0 : \|A(u)\|_E \leq \varepsilon M(u) + c_{\varepsilon}\|T(u)\|_F, \tag{1}$$

для всех u из некоторого подмножества Ξ.

Заметим, что неравенство (1), очевидно, выполняется для $u_0 \in \Xi$, если $\|A(u_0)\|_E = 0$. Из (1) также следует:

$\|A(u_0)\|_E = 0$, если $\|T(u_0)\|_F = 0$ для некоторого $u_0 \in \Xi$;

$\lim_{n\to\infty}\|A(u_n)\|_E = 0$, если $\lim_{n\to\infty}\|T(u_n)\|_F = 0$ и $\lim_{n\to\infty} M(u_n) = 0$ для последовательности $\{u_n\} \subseteq \Xi$.

Для произвольного множества $U \subseteq \Xi$ обозначим $\tau(U) = \sup_{u \in U} M(u)$, $\tilde{\tau}(U) = \inf_{u \in U} M(u)$. Множество $U \subseteq \Xi$ назовем M-ограниченным, если $\tau(U) < \infty$, и обладающим M-свойством, если $\tau(U) < \infty$ и $\tilde{\tau}(U) > 0$. Оператор $A : \Xi \to F$ назовем M-ограниченным, если $\tau(U) < \infty$ влечет ограниченность $A(U)$ в E для всех $U \subseteq \Xi$.

Теорема 1. Пусть E и F – произвольные нормированные пространства. Пусть $A : \Xi \to E$ и $T : \Xi \to F$ – M-ограниченные операторы. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Условие (1) выполнено для всех $u \in U$, если $U \subseteq \Xi$ обладает M-свойством.

(ii) Для любой последовательности $\{u_n\} \subseteq \Xi$, обладающей M-свойством,

$$\lim_{n\to\infty}\|T(u_n)\|_F = 0, \tag{2}$$

имеем также

$$\lim_{n\to\infty}\|A(u_n)\|_E = 0 . \tag{3}$$

Для любой последовательности $\{u_n\}\subseteq\Xi$, обладающей M-свойством и удовлетворяющей (2), имеем также

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|A(u_n)\|_E = 0 . \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что (i) выполнено. Докажем, что (ii) выполнено тоже. Пусть последовательность $\{u_n\}\subseteq\Xi$ обладает M-свойством. Тогда существуют такие числа $0 < r \le R < \infty$, что $r \le M(u_n) \le R$ для всех n. Предположим, что (2) верно и докажем (3). Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть c_ε – постоянная из (1) для выбранного ε. Тогда существует такой номер n_ε, что $\|T(u_n)\|_F \le \varepsilon / c_\varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$ и $\|A(u_n)\|_E \le \varepsilon R + \varepsilon$ при $n > n_\varepsilon$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем (3), и, следовательно, (ii) выполнено. Условие (iii) очевидно следует из (ii). Предположим теперь, что (iii) выполнено, а условие (i) нет. Тогда существуют $U\subseteq\Xi$, обладающее M-свойством, $\varepsilon > 0$, последовательности элементов $\{u_n\}\subseteq U$ и чисел $\{c_n\}$ ($c_n \to \infty$), такие что

$$\|A(u_n)\|_E > \varepsilon M(u_n) + c_n\|T(u_n)\|_F \tag{5}$$

для всех n. По предположению теоремы 1 оператор A является M-ограниченным. Следовательно, $\{A(u_n)\}$ ограничена в E по норме в силу M-ограниченности $\{u_n\}$. Поэтому неравенство (5) возможно только в случае, когда имеет место (2), что в силу предположения (iii) влечет (4). Получили противоречие с тем, что $\|A(u_n)\|_E > \varepsilon r$.

Пример. Пусть μ – произвольная мера в n-мерном евклидовом пространстве R^n и Ω – открытое множество, $\mu(\Omega) < \infty$. Пусть $L_p(\mu)$ обозначает пространство всех μ-измеримых функций с нормой $\|u\|_{L_p(\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^p d\mu\right)^{1/p}$ для $1 \le p < \infty$ и $\|u\|_{L_\infty(\mu)} = \inf\{t : \mu(D(u,t)) = 0\}$, где $D(u,t) = \{s : |u(s)| > t\}$. Тогда

$$\forall 0 < r \le R < \infty, \forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \|u\|_{L_p(\mu)} \le \varepsilon\|u\|_{L_\infty(\mu)} + c_\varepsilon\|u\|_{L_q(\mu)}$$

для всех $1 \le p < \infty$, $1 \le q < \infty$ и u ($r \le \|u\|_{L_\infty(\mu)} \le R$). Действительно, рассмотрим в роли Ξ пространство $L_\infty(\mu)$. Как известно, $L_\infty(\mu) \subset L_p(\mu)$ для всех $1 \le p < \infty$. В качестве функции $M : \Xi \to R_+$ возьмем норму в $L_\infty(\mu)$. Заметим, что оператор вложения $I : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ является M-ограниченным оператором для всех $1 \le p < \infty$. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset L_\infty(\mu)$ такова, что $r \le \|u_n\|_{L_\infty(\mu)} \le R$ для всех n, для некоторых чисел $0 < r \le R < \infty$. Предположим, что $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|u_n\|_{L_q(\mu)} = 0$. Тогда

$$r \lim_{n\to\infty} \mu(\sup pu_n)^{1/q} \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\|u_n\|_{L_q(\mu)} = 0 \to \lim_{n\to\infty} \mu(\sup pu_n) = 0 \to \underline{\lim}_{n\to\infty}\|u_n\|_{L_p(\mu)} \le R \lim_{n\to\infty} \mu(\sup pu_n)^{1/p} = 0$$

и по теореме 1 неравенство (1) выполнено.

Замечание. В примере доказано неравенство (1) в случае, когда A является оператором вложения, но вложение $L_\infty(\mu) \subset L_p(\mu)$ некомпактно.

Пусть (E, d) – произвольное метрическое пространство, $\Xi \subseteq E$ – некоторое подмножество. Пусть $M : \Xi \to R_+$ – функция на Ξ с вещественными неотрицательными значениями. Предположим $M(u) + M(v) = 0 \Leftrightarrow d(u, v) = 0$. Определяя по аналогии с нормированным пространством понятия M-ограниченного оператора и множества, обладающего M-свойством, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть (E, d) и (F, d_1) – произвольные метрические пространства. Пусть $A : \Xi \to E$ и $T : \Xi \to F$ – M-ограниченные операторы. Тогда следующие условия эквивалентны:

Для каждого $U \subseteq \Xi$, обладающего M-свойством,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : d(A(u), A(u)) \le \varepsilon(M(u) + M(v)) + c_\varepsilon d_1(T(u), T(v)), \tag{6}$$

для всех $u, v \in U$.

Для любых последовательностей $\{u_n\} \subseteq \Xi$, $\{v_n\} \subseteq \Xi$, обладающих M-свойством,

$$\lim_{n\to\infty} d_1(T(u_n), T(v_n)) = 0,$$

имеем также

$$\lim_{n\to\infty} d(A(u_n), A(v_n)) = 0.$$

Для любых последовательностей $\{u_n\} \subseteq \Xi$, $\{v_n\} \subseteq \Xi$, обладающих M-свойством,

$$\lim_{n\to\infty} d_1(T(u_n), T(v_n)) = 0,$$

имеем также

$$\varliminf_{n\to\infty} d(A(u_n), A(v_n)) = 0.$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ В НЕРАВЕНСТВЕ

Пусть (E, d) – произвольное метрическое пространство. Мера некомпактности $\beta(U) = \beta_E(U)$ подмножества U метрического пространства E – это точная нижняя грань таких $r > 0$, что всякое подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше r, конечно.

Другими словами, мера некомпактности $\beta(U) = \beta_E(U)$ подмножества U метрического пространства E – это точная верхняя грань таких $r > 0$, что существует бесконечное подмножество, расстояние между любыми двумя элементами которого не меньше r.

Мера некомпактности (МНК) β обладает рядом замечательных свойств [6, 1.1.4], среди которых правильность: $\beta(U) = 0$ тогда и только тогда, когда U относительно компактно.

Произвольную числовую характеристику ϕ ограниченных подмножеств метрического пространства E назовем МНК ϕ эквивалентной β, если

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0 : c_1\phi(V) \le \beta(V) \le c_2\phi(V) \forall V \subseteq E .$$

Теорема 3. Пусть (E,d) и (F,d_1) – произвольные метрические пространства. Пусть $A:\Xi \to E$ и $T:\Xi \to F$ – M-ограниченные операторы. Предположим, что (6) выполнено для всех $u,v \in U$. Тогда для каждого $U \subseteq \Xi$, обладающего M-свойством, имеет место следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \beta(A(V)) \le 2\varepsilon\tau(V) + c_\varepsilon \beta(T(V)) \forall V \subseteq U . \quad (7)$$

Доказательство. Пусть (6) выполнено для всех $u,v \in U$ и пусть V – произвольное подмножество U. Если $\beta(A(V)) = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\beta(A(V)) > 0$. Тогда по определению β

$$\forall 0 < \delta < \beta(A(V)) \exists \{u_n\} \subseteq V : d(A(u_n), A(u_m)) \ge \beta(A(V)) - \delta$$

для всех $n \ne m$. Также по определению β мы можем выбрать из последовательности $\{u_n\}$ элементы v_k и v_l с условием, что $d_1(T(v_k), T(v_l)) \le \beta(T(V)) + \delta$. Тогда из (6) получим

$$\beta(A(V)) - \delta \le d(A(v_k),\ A(v_l)) \le \varepsilon(M(v_k) + M(v_l)) + c_\varepsilon d_1(T(v_k),\ T(v_l)) \le 2\varepsilon\tau(V) + c_\varepsilon(\beta(T(V)) + \delta),$$

что в силу произвольности выбора ε и δ завершает доказательство (7).

Замечание. Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 3 останется верным для любой числовой характеристики ϕ ограниченных подмножеств метрических пространств эквивалентной β.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения теоремы 3 относительно операторов $A:\Xi \to E$ и $T:\Xi \to F$. Пусть ϕ, ϕ_1 – произвольные числовые характеристики ограниченных подмножеств соответственно в E и F. Тогда следующие условия эквивалентны:

(iv) Для каждого множества $U \subseteq \Xi$, обладающего M-свойством,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \phi(A(V)) \le 2\varepsilon\tau(V) + c_\varepsilon \phi_1(T(V)) \forall V \subseteq U . \quad (8)$$

(v) Для любой последовательности $\{V_n\} \subseteq \Xi$, такой что $\cup V_n$ обладает M-свойством и

$$\lim_{n\to\infty} \phi_1(T(V_n)) = 0$$

имеем также

$$\lim_{n\to\infty} \phi(A(V_n)) = 0 .$$

(vi) Для любой последовательности $\{V_n\} \subseteq \Xi$, такой что $\cup V_n$ обладает M-свойством и

$$\lim_{n\to\infty} \phi_1(T(V_n)) = 0$$

имеем также

$$\varliminf_{n\to\infty} \phi(A(V_n)) = 0 .$$

Доказательство. Пусть (iv) верно. Мы утверждаем, что (v) тоже выполняется. Предположим, что последовательность $\{V_n\} \subseteq \Xi$ такая, что $\cup V_n$ обладает M-свойством и $\lim_{n\to\infty} \phi_1(T(V_n)) = 0$. Тогда найдутся такие числа $0 < r \le R < \infty$, что $r \le M(u) \le R$ для всех $u \in \cup V_n$ и $r \le \tau(V_n) \le R$ для всех n. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ в неравенстве (8) и пусть c_ε - постоянная из (8) для выбранного $\varepsilon > 0$. Тогда существует такой номер n_ε, что $\phi_1(T(V_n)) \le \varepsilon / c_\varepsilon$ для всех $n > n_\varepsilon$ и $\phi(A(V_n)) \le \varepsilon 2R + \varepsilon$ при $n > n_\varepsilon$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем $\lim_{n\to\infty} \phi(A(V_n)) = 0$ и, следовательно, (v) выполнено. Условие (vi), очевидно, следует из (v). Предположим, что (vi) выполнено, а условие (iv) нет. Тогда существуют множество $U \subseteq \Xi$, обладающее M-свойством, последовательность подмножеств $\{V_n\}, V_n \subseteq U$ и чисел $\{c_n\}$ ($c_n \to \infty$), такие что $\phi(A(V_n)) > 2\varepsilon r + c_n \phi_1(T(V_n))$ для всех n. По предположению теоремы 4 оператор A является M-ограниченным. Следовательно, $\{A(u_n)\}$ ограничена в E по метрике в силу M-ограниченности $\cup V_n \subseteq U$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \phi_1(T(V_n)) = 0$, что в силу предположения (vi) влечет $\varliminf_{n\to\infty} \phi(A(V_n)) = 0$. Получили противоречие с тем, что $\phi(A(V_n)) > 2\varepsilon r$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К УЗКИМ ОПЕРАТОРАМ

Понятие узкого оператора было введено А.М. Пличко и М.М. Поповым в [15]. Приведем определение узкого оператора в удобной для нас форме.

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с непрерывной мерой, причем $\mu(\Omega) < \infty$. Пусть $S(\mu)$ линейное пространство классов эквивалентных μ-измеримых функций. Пусть X – F-пространство Кёте на (Ω, Σ, μ). Для произвольного множества $D \in \Sigma$, $\mu(D) > 0$, пусть J_D обозначает множество всех функций u, таких что u^2 – это характеристическая функция D и $\mu\{t : u(t) = 1\} = \mu\{t : u(t) = -1\}$. Пусть Y – произвольное банахово пространство, а $L(X,Y)$ обозначает пространство всех линейных непрерывных операторов. Оператор $A \in L(X,Y)$ называется узким, если $\forall D \in \Sigma, \mu(D) > 0, \forall \delta > 0 \exists u \in J_D : \|Au\|_Y \le \delta$.

Теорема 5. Пусть для всех $D \in \Sigma$ с $\mu(D) > 0$ существует функция $M : J_D \to R_+$ с $\tau(J_D) < \infty$. И пусть найдется M-ограниченный оператор $T : J_D \to E$ (не обязательно линейный) такой, что E – это некоторое нормированное пространство и $\forall \delta > 0 \exists u \in J_D : \|Tu\|_E \le \delta$. Тогда каждый оператор $A \in L(X,Y)$, удовлетворяющий условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : \|A(u)\|_Y \le \varepsilon M(u) + c_\varepsilon \|T(u)\|_E \tag{9}$$

для всех $u \in J_D$, является узким оператором.

Доказательство. Рассмотрим $D \in \Sigma$ с $\mu(D) > 0$. Пусть выполнены все предположения теоремы 5. Так как оператор T является M-ограниченным оператором, то в силу неравенства (9) оператор A также является M-ограниченным. По предположению теоремы 5 существует последовательность $\lim_{n\to\infty}\|T(u_n)\|_E = 0$ из элементов J_D. Если при этом $\lim_{n\to\infty} M(u_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty}\|A(u_n)\|_Y = 0$ в силу неравенства (9) и утверждение теоремы 5 выполнено. В противном случае множество $\{u_n\} \subseteq J_D$ обладает M-свойством и в силу теоремы 1 также $\lim_{n\to\infty}\|A(u_n)\|_Y = 0$, т. е. A является узким оператором.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В теореме 1 получены необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (1), записанного для нормированных пространств и для M-ограниченных операторов. Приводится пример, иллюстрирующий теорему 1. Теорема 2 содержит необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (6) для M-ограниченных операторов в метрических пространствах. В теореме 3 доказывается, что условия, при которых справедливо неравенство (6), являются достаточными для справедливости неравенства (7), записанного для меры некомпактности β. В теореме 4 доказываются необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (8), записанного для произвольных числовых характеристик ограниченных подмножеств метрического пространства. В теореме 5 доказывается достаточное условие того, что оператор является узким.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как хорошо известно, банаховы пространства являются частным случаем нормированных пространств, которые в свою очередь являются частным случаем метрических пространств. Оператор вложения является частным случаем M-ограниченного оператора. Поэтому неравенство (1) теоремы 1 настоящей работы является обобщением неравенства, рассмотренным в [1, 2], к тому, в отличие [1, 2], не предполагается вложение $E_0 \subset E$ компактно, а пространства E, F рефлексивными. Более того, как показано в примере настоящей работы, даже для оператора вложения не требуется компактность вложения для справедливости неравенства (1).

В теореме 2, в отличие от [3, 4], не предполагается компактность вложения $\Xi \subseteq E$, не требуется замкнутость Ξ относительно операции умножения на действительные числа. С этой точки зрения неравенство (6) обобщает аналогичное неравенство из [3, 4], к тому же записанное только для оператора вложения.

Теорема 3 настоящей работы обобщает аналогичный результат из [5], в котором в роли оператора T оператор вложения.

В теореме 3 доказывается, что из (6) следует (7) для меры некомпактности β, обратное, очевидно, не выполняется, т. е. из (7) в общем случае не следует (6). Поэтому неравенство (8), записанное для произвольных числовых характеристик ограниченных подмножеств метрического пространства, обобщает все предшествующие неравенства. В работе получены необходимые и достаточные условия справедливости (8). В качестве приложения основного результата работы приводится новый подход к проблеме узких операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

3. Дубинский Ю.А. Некоторые интегральные неравенства и разрешимость квазилинейных вырождающихся эллиптических систем дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1964. Том 64 (106), № 3. С. 458–480.

4. Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Матем. сб. 1965. Том 67 (109), № 4. С. 609–642.

5. Ерзакова Н.А. Меры некомпактности в исследовании неравенств // Известия вузов. 2000. № 9 (460). С. 3–8.

6. Меры некомпактности и уплотняющие операторы / Р.Р. Ахмеров, М.И. Каменский, А.С. Потапов, Б.Н. Садовский, А.Е. Родкина. Новосибирск: Наука, 1986. 264 с.

7. Banas J., Goebel K. Measures of noncompactness in Banach spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York, Basel, Marcel Dekker, 1980, 96 p.

8. Ayerbe Toledano J.M., Domínguez Benavides T., López Acedo G. Measures of noncompactness in metric fixed points theory. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1997, 208 p.

9. Appell J., De Pascale E. Su alcuni parametri connessi con la misura di noncompatezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili. Boll. Unione Mat. Ital. 1984, 3-B, pp. 497–515.

10. Erzakova N.A. Measures of Noncompactness in Regular Spaces // Canad. Math.Bull. 57. 2014, pp. 780–793.

11. Erzakova N.A. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results. J. Math.Anal. Appl. Vol. 428, 2015, pp. 1368–1376.

12. Erzakova N.A., Väth M. On strongly condensing operators. Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923), 2017, vol. 196, no. 1, pp. 304–323, doi:10.1007/s10231-016-0573-8.

13. Väth M. Ideal spaces, Lecture Notes Math., № 1664, Berlin, Heidelberg: Springer, 1997, 146 p.

14. Väth M. Volterra and integral equations of vector functions. New York, Basel, Marcel Dekker, 2000, 156 p.

15. Plichko A.M., Popov M.M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces, Dissertatioones Math. Rozprawy, 306, 1990, pp. 1–85.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ерзакова Нина Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет гражданской авиации, naerzakova@gmail.com.

ON MEASURES OF NONCOMPACTNESS IN INEQUALITIES

Nina A. Erzakova[1]
[1] *Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

ABSTRACT

Measures of noncompactness are numerical characteristics of bounded subsets of metric space, equal to zero on relatively compact subsets. The quantitative characteristic of measure of noncompactness of metric space subset was introduced by K. Kuratovskiy in 1930 in connection with problems of general typology. Different measures of noncompactness exist. Measures of noncompactness are a simple and useful instrument for any problem solving. So the theory of measures of noncompactness is still developing and it finds more and more new applications in different branches of mathematics. In this article measures of noncompactness are used to study inequalities, more exactly the extension of an equality, studied in many works and having wide application. For example in the works by Yu.A. Dubinskiy, J.-L. Lions and E. Magenes this inequality is proved for embedding operators in Banach spaces (a particular case of metric spaces). Then it is used to prove the solvability of nonlinear elliptic and parabolic equations. In contrast to these authors in this work the compactness of the embedding operator is not assumed in the study of the inequality. Furthermore, in metric space for the analogue of the inequality, written via any numerical characteristics of bounded subsets (not necessarily measures of noncompactness), the needed and sufficient conditions of the correctness of this analogue are received. In case if numerical characteristic of a set is a measure of noncompactness, the conclusion of this result is a new criterion of compactness of the operator (not necessarily linear) under the condition of compactness of another one.

The results of this work generalize some results achieved by the author previously.

Key words: normed space, metric space, measure of noncompactness, embedding operator.

REFERENCES

1. Lions Zh.-L., Madzhenes E. *Neodnorodnyie granichnyie zadachi i ih prilozheniya* [Problémes aux limites non limites non homogénes et applications]. M., Mir, 1971. 371 p. (in Russian)

2. Lions Zh.-L. *Nekotoryie metodyi resheniya nelineynyih kraevyih zadach* [Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires]. M., Mir, 1972. 588 p. (in Russian)

3. Dubinskiy Yu.A. *Nekotorye integral'nye neravenstva i razreshimost' kvazilinejnyh vyrozhdajushhihsja jelliptichkih system differencial'nyh uravnenij* [Some integral inequalities and the solvability of quasilinear degenerate elliptic systems of differential equations]. *Mat. sbornik*. [Math. collection], 1964, vol. 64 (106), no. 3, pp. 458–480. (in Russian)

4. Dubinskiy Yu.A. *Slabaja shodimost' v nelinejnyh jelliptichkih i parabolicheskih uravnenijah* [Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equations]. *Mat. sbornik*. [Math. collection]. 1965, vol. 67 (109), no. 4, pp. 609–642. (in Russian)

5. Erzakova N.A. Meryi nekompaktnosti v issledovanii neravenstv [Measures of noncompactness in the investigation of inequalities]. *Izvestiya VUZov* [Russian Math. (Izv.VUZ)], 2000, vol. 44, no. 9 (460), pp. 3–8. (in Russian)

6. Ahmerov R.R., Kamenskiy M.I., Potapov A.S., Sadovskiy B.N., Rodkina A.E. *Meryi nekompaktnosti i uplotnyayuschie operatoryi* [Measures of Noncompactness and Condensing Operators]. Novosibirsk, Nauka, 1986. 264 p. (in Russian)

7. Banas J., Goebel K. Measures of noncompactness in Banach spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York, Basel, Marcel Dekker, 1980. 96 p.

8. Ayerbe Toledano J.M., Domínguez Benavides T., López Acedo G. Measures of noncompactness in metric fixed points theory. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1997, 208 p.

9. Appell J., **De Pascale E.** Su alcuni parametri connessi con la misura di noncompatezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili. Boll. Unione Mat. Ital. 1984, 3-B, pp. 497–515.

10. Erzakova N.A. Measures of Noncompactness in Regular Spaces. Canad. Math.Bull. 57. 2014, pp. 780–793.

11. Erzakova N.A. Generalization of some M.A. Krasnosel'skii's results. J. Math. Anal. Appl., 2015, vol. 428, pp. 1368–1376.

12. Erzakova N.A., Väth M. On strongly condensing operators. Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-). 2017, vol. 196, no. 1, pp. 304–323, doi:10.1007/s10231-016-0573-8.

13. Väth M. Ideal spaces, Lecture Notes Math., №1664, Berlin, Heidelberg, Springer, 1997. 146 p.

14. Väth M. Volterra and integral equations of vector functions. New York, Basel, Marcel Dekker, 2000, 156 p.

15. Plichko A.M., Popov M.M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces, Dissertatioones Math. Rozprawy, 306, 1990, pp. 1–85.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Nina A. Erzakova, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Moscow State Technical University of Civil Aviation, naerzakova@gmail.com.