

УДК 514.7

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КДВ – БЮРГЕРСА В ДИССИПАТИВНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А.В. САМОХИН¹, Ю.И. ДЕМЕНТЬЕВ¹

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия

Рассматривается поведение решений солитонного типа для уравнения КдВ – Бюргерса в диссипативно неоднородной среде. Солитон движется слева направо и не меняет своей формы. Солитоны с большей амплитудой по ширине меньше, и скорость их движения больше. Целью настоящего исследования является изучение поведения солитонов, которые при движении по недиссипативной среде натываются на (финитное или бесконечное) препятствие с постоянной диссипацией; можно представлять себе импульс света, встречающий на своём пути частично поглощающий слой. При моделировании рассматривался случай с финитным диссипативным слоем, подобный, например, прохождению волны через стекло – воздух – стекло – воздух, а также прохождение из недиссипативной среды в диссипативную (подобие прохождения света из воздуха в воду). Предлагаемая работа является продолжением исследований авторов и Дубровина. Получены численные модели поведения волны при различных типах неоднородности. Диссипация приводит к ожидаемому уменьшению амплитуды, однако в случае финитных кусочно-постоянных вязких препятствий на пути волны возникают новые эффекты. После прохождения препятствия перед волной появляется небольшая рябь. Причём эта рябь распространяется впереди бегущей волны. При удалении основной волны от препятствия рябь удаляется от этой волны и становится более обширной. Итак, скорость движения ряби больше скорости движения основной волны, и рябь увеличивается по мере удаления от препятствия. Моделирование проводилось в среде Maple с использованием пакета PDETools. Отметим, что данные задачи вычислительно очень трудоёмки и требуют больших затрат машинного времени.

Ключевые слова: уравнение КдВ – Бюргерса, солитон, неоднородная диссипативная среда.

ВВЕДЕНИЕ

Волны в среде с дисперсией и диссипацией описываются уравнением Кортевега – де Фриза – Бюргерса (КдВ-Б)

$$u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - 2uu_x + \lambda u_{xxx}$$

В случае $\varepsilon = 0$ диссипация отсутствует, получившееся уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t = -2uu_x + \lambda u_{xxx}$$

является одним из наиболее известных уравнений, имеющих в качестве решения уединённые волны (солитоны).

В качестве примера приведём солитон, изображённый на рис. 1. Коэффициент λ в уравнении взят единицей. Переменную x рассмотрим на отрезке $[-35; 15]$. Солитон задаётся формулой $0,375 \tanh^2(0,25x + 3,75) + 0,25$.

Солитон движется слева направо и не меняет своей формы. Солитоны с большей амплитудой по ширине меньше, и скорость их движения больше, подробности см. [1].

Целью настоящего исследования является изучение поведения солитонов, которые при движении по недиссипативной среде натываются на (финитное или бесконечное) препятствие с постоянной диссипацией; можно представлять себе импульс света, встречающий на своём пути частично поглощающий слой.

Уравнение КдВ – Бюргерса, позволяющее описывать среды, в которых нелинейные процессы идут при одновременном эффекте дисперсии и диссипации, является довольно популярным

предметом исследования, особенно в последнее время. Предлагаемая работа является продолжением исследований авторов [2, 4] и работ [3, 5–11].

Расчёты выполнялись в среде Maple с использованием пакета PDETools.

ДИССИПАТИВНОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

Нас будет интересовать поведение решений солитонного типа в уравнениях с ненулевой диссипацией. Рассмотрим переменный коэффициент диссипации ε^2 .

$$u_t = 0,3 \cdot (1 + \tanh(2x)) \cdot u_{xx} - 2uu_x + u_{xxx}.$$

На рис. 2 изображён график диссипативного коэффициента $0,3 \cdot (1 + \tanh(2x))$.

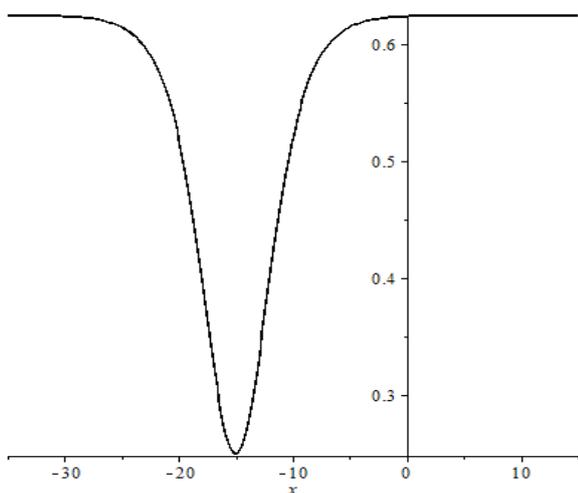


Рис. 1. Солитонное решение уравнения КдВ-Б
Fig. 1. Soliton solution of the KdV-B equation

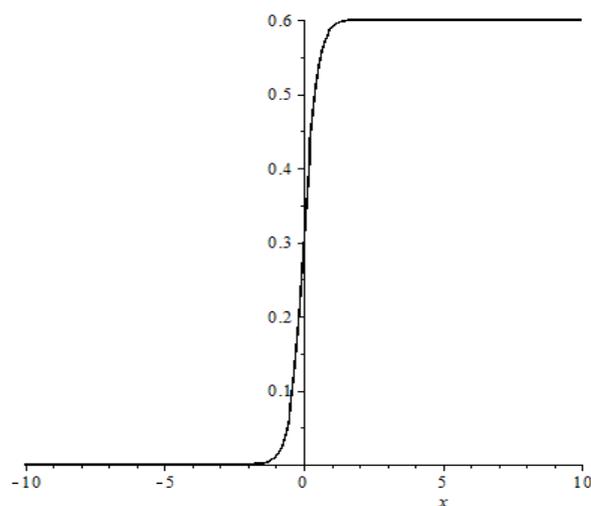


Рис. 2. График коэффициента диссипации
Fig. 2. Graph of the dissipation coefficient

Слева диссипации нет, справа – диссипация равна константе, при переходе через ноль коэффициент резко возрастает.

Таким образом, слева имеем практически уравнение КдВ, справа – практически уравнение КдВ – Бюргера.

Определим следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{t=0}; \\ u(-20,t) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{x=-20}; \\ u'_x(45,t) &= 0; \\ u'_x(-20,t) &= \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \right) \Big|_{x=-20}. \end{aligned}$$

На рис. 3 продемонстрировано поведение солитона при изменении типа уравнения.

Сначала солитон движется, не меняя формы и размера. При изменении типа уравнения волна начинает затухать. Это объясняется ненулевым коэффициентом при второй производной, проявляется действие диссипации.

Характер затухания волны напоминает экспоненциальный, что более наглядно иллюстрируется следующим примером.

Рассмотрим теперь то же уравнение $u_t = 0,3 \cdot (1 + \tanh(2x)) \cdot u_{xx} - 2uu_x + u_{xxx}$ с другими начально-граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{t=0}; \\ u(-20,t) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{x=-20}; \\ u'_x(200,t) &= 0; \\ u'_x(-20,t) &= \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25\right) \Big|_{x=-20}. \end{aligned}$$

На рис. 4 видно ярко выраженное затухание волны. Тем не менее ширина волны остается постоянной.

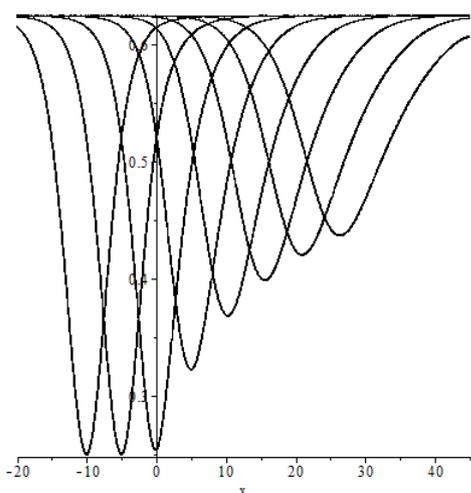


Рис. 3. Решения при $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$
Fig. 3. Solutions at $t = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$

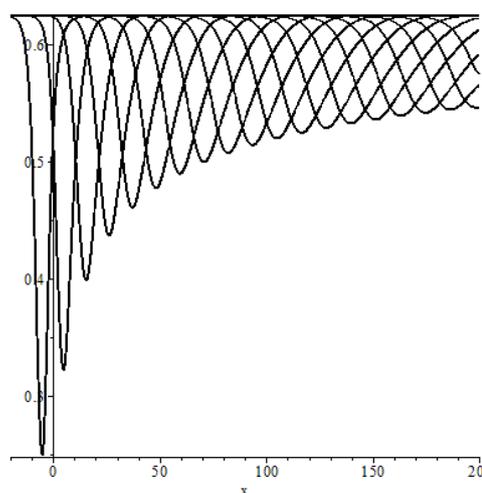


Рис. 4. Решения при t от 10 до 200 с шагом 10
Fig. 4. Solutions at $t = 10$ to 200 by step 10

Изменим одно граничное условие, чтобы посмотреть дальнейший характер поведения волны:

$$u'_x(10000,t) = 0.$$

На рис. 5 наблюдаем дальнейшее затухание волны.

Наконец, изменим граничное условие, чтобы изучить характер асимптотического поведения волны:

$$u'_x(100000,t) = 0.$$

Численные решения, полученные для последнего граничного условия, позволяют сделать вывод, что при стремлении t к бесконечности амплитуда волны стремится к нулю, а ширина волны остается постоянной, равной ширине первоначального солитона. Амплитуда волны при $t > 10000$ измеряется тысячными долями единицы, поэтому соответствующие графики мы здесь не приводим.

СТУПЕНЧАТОЕ ДИССИПАТИВНОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

Интересен случай скачкообразной смены типа уравнения. Исследования показали, что поведение решения в данном случае полностью аналогично поведению решения в случае глад-

кого изменения диссипативного коэффициента, описанного выше. Покажем это лишь на одном характерном примере.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = 0,3 \cdot \left(1 + \frac{x}{|x|}\right) \cdot u_{xx} - 2uu_x + u_{xxx}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25|_{t=0}; \\ u(-20,t) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25|_{x=-20}; \\ u'_x(200,t) &= 0; \\ u'_x(-20,t) &= \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25\right)|_{x=-20}. \end{aligned}$$

На рис. 6 изображён график диссипативного коэффициента $0,3 \cdot \left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$. Слева диссипации нет, справа – диссипация равна константе. Таким образом, слева имеем уравнение КдВ, справа – уравнение КдВ – Бюргерса. Видимых изменений в поведении волны для данного уравнения не наблюдается, что продемонстрировано на рис. 7: численная модель дает картину, идентичную поведению волн с рис. 4.

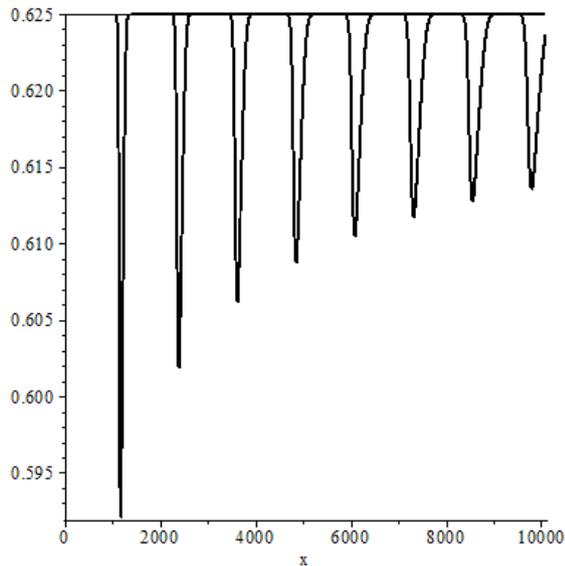


Рис. 5. Решения при t от 1000 до 10000 с шагом 1000
Fig. 5. Solutions at t = 1000 to 10000 by step 1000

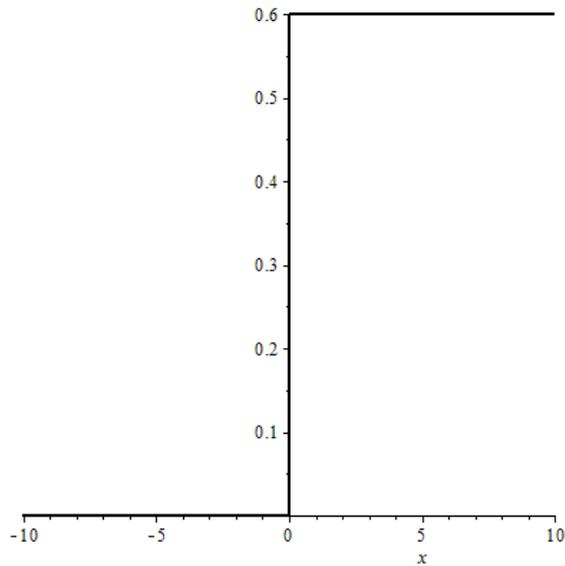


Рис. 6. График ступенчатого диссипативного коэффициента
Fig. 6. Graph of a stepwise dissipation coefficient

ФИНИТНЫЙ ДИССИПАТИВНЫЙ СЛОЙ

В предыдущих пунктах мы рассматривали прохождение волны через меняющуюся среду, например, из воздуха в воду. Теперь же будем иметь дело с финитным диссипативным слоем, например, возникающим при прохождении волны через стекло – воздух – стекло – воздух.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = (3 - 3 \tanh^2(3x)) \cdot u_{xx} - 2uu_x + u_{xxx}$$

На рис. 8 изображён график диссипативного коэффициента $3 - 3 \tanh^2(3x)$. Слева и справа диссипации практически нет. В центре находится узкий диссипативный слой.

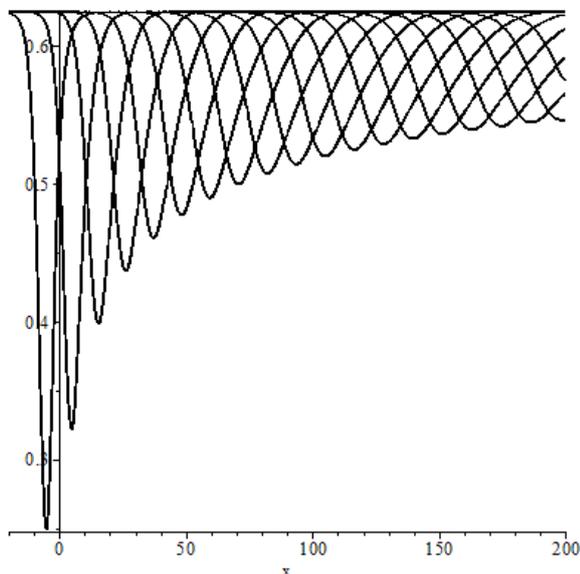


Рис. 7. Решения при t от 10 до 200 с шагом 10
Fig. 7. Solutions at t = 10 to 200 by step 10

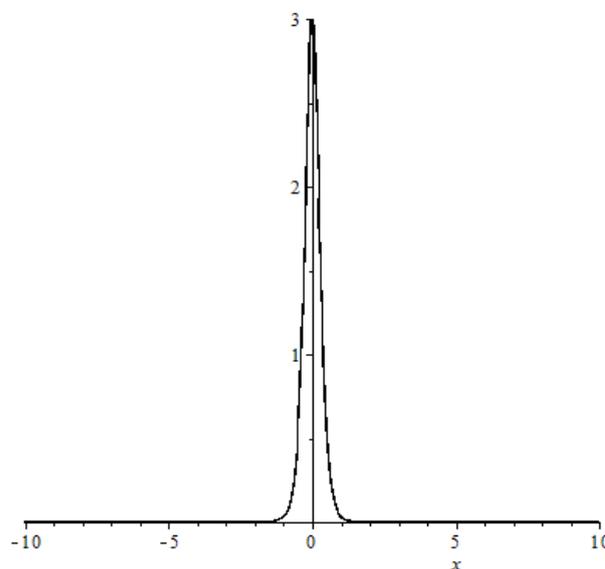


Рис. 8. График диссипативного коэффициента
Fig. 8. Graph of the dissipation coefficient

Начальные и граничные условия зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{t=0}; \\ u(-20,t) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{x=-20}; \\ u'_x(45,t) &= 0; \\ u'_x(-20,t) &= \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25\right) \Big|_{x=-20}. \end{aligned}$$

На рис. 9 показано прохождение волны через финитный диссипативный слой.

При возникновении препятствия волна уменьшает амплитуду. После прохождения препятствия сохраняется первоначальное движение волны, но с уменьшенной амплитудой.

Интересно отметить, что сразу после прохождения препятствия амплитуда волны является минимальной, затем происходит небольшое её увеличение и стабилизация.

На примере другого граничного условия продемонстрируем ещё один интересный эффект.

Рассмотрим то же уравнение и те же начально-граничные условия. Лишь условие на производную на правом конце заменим на следующее:

$$u'_x(1000,t) = 0.$$

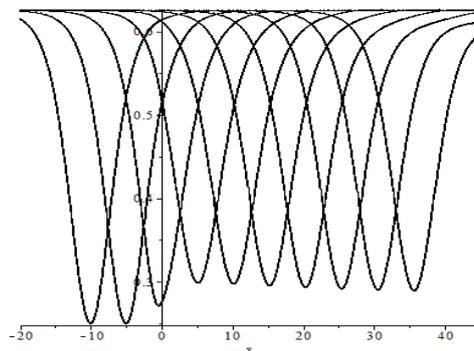


Рис. 9. Решения при t от 5 до 50 с шагом 10
Fig. 9. Solutions at t = 5 to 50 by step 10

После прохождения препятствия перед волной появляется небольшая рябь. Причём эта рябь распространяется впереди бегущей волны. При удалении основной волны от препятствия рябь удаляется от этой волны и становится более обширной. Итак, скорость движения ряби больше скорости движения основной волны, и рябь увеличивается по мере удаления от препятствия. Описанный эффект показан на рис. 10.

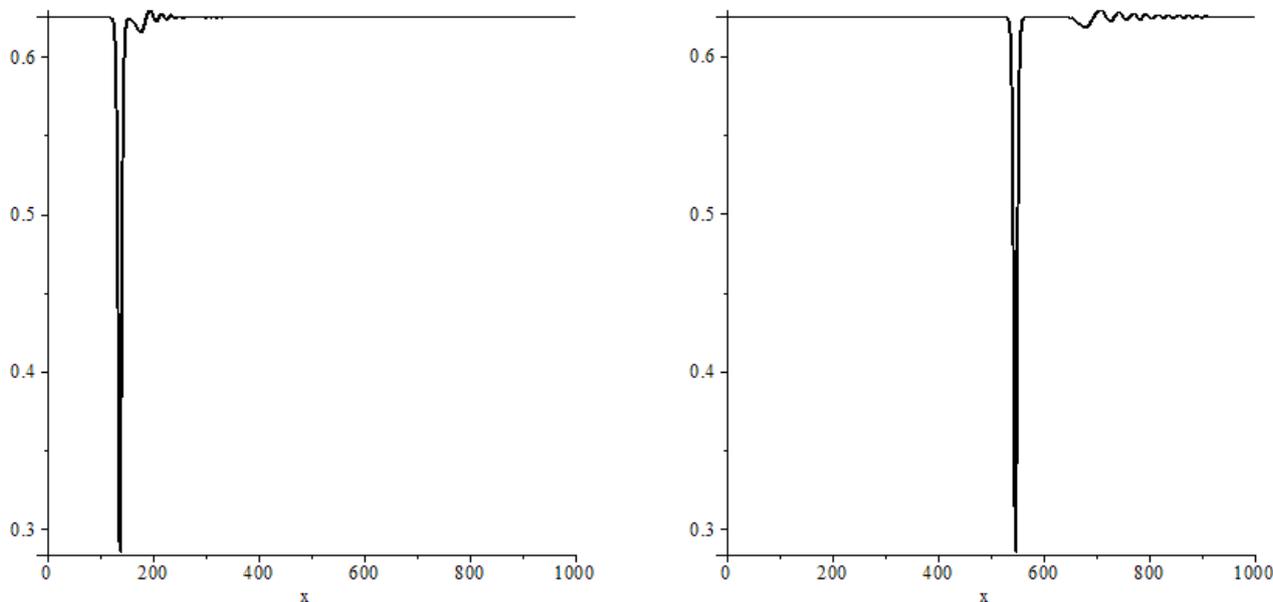


Рис. 10. Решения при $t = 150$ (слева) и при $t = 550$ (справа)
Fig. 10. Solutions at $t = 150$ (left) and at $t = 550$ (right)

СТУПЕНЧАТЫЙ ФИНИТНЫЙ ДИССИПАТИВНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрим ступенчатое возникновение и исчезновение диссипативного слоя:

$$u_t = \left(\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|} \right) \cdot u_{xx} - 2uu_x + u_{xxx}$$

На рис. 11 изображён график диссипативного коэффициента $\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x-1}{|x-1|}$.

Слева и справа диссипации нет. В центре диссипация равна некоторой константе. Таким образом, слева и справа имеем уравнение КдВ, а в центре – уравнение КдВ – Бюргерса. Начальные и граничные условия возьмём как в пункте 3:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{t=0}; \\ u(-20,t) &= 0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \Big|_{x=-20}; \\ u'_x(45,t) &= 0; \\ u'_x(-20,t) &= \left(0,375 \tanh^2(0,25(-t+x) + 3,75) + 0,25 \right) \Big|_{x=-20}. \end{aligned}$$

На рис. 12 показано поведение волны, аналогичное ситуации на рис. 9. После прохождения препятствия волна резко уменьшает амплитуду, потом амплитуда немного увеличивается и стабилизируется.

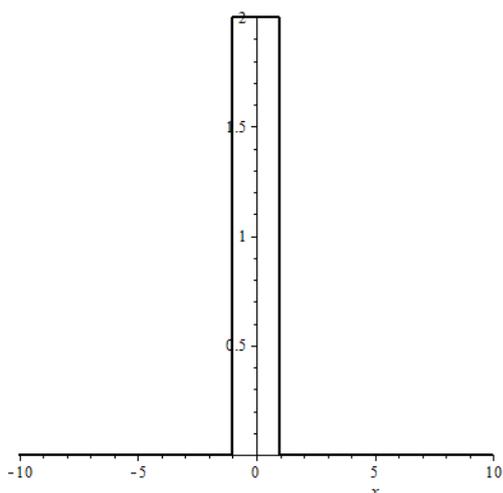


Рис. 11. График диссипативного коэффициента
Fig. 11. Graph of the dissipation coefficient

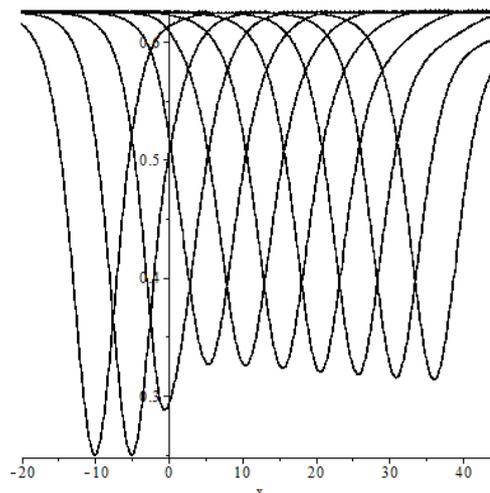


Рис. 12. Решения при t от 5 до 50 с шагом 10
Fig. 12. Solutions at t = 5 to 50 by step 10

Эффект ряби для такого вида диссипации также сохраняется, что показано на рис. 13. Для демонстрации эффекта взято граничное условие

$$u'_x(1000, t) = 0.$$

Остальные начально-граничные условия и уравнение прежние. Свойства ряби в данном случае такие же, как и на рис. 10.

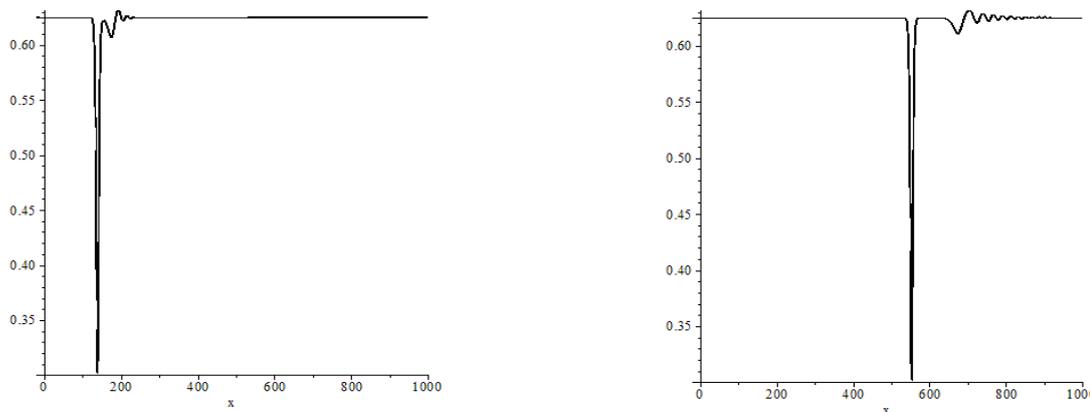


Рис. 13. Решения при t = 150 (слева) и при t = 550 (справа).
Fig. 13. Solutions at t = 150 (left) and at t = 550 (right)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны: учеб. пособие для вузов. М.: Физматлит, 2000. 272 с.
2. Самохин А.В. Решения уравнения Бюргера с периодическим возмущением на границе // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 220. С. 82–87.
3. Dubrovин В., Elaeva М. On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. ArXiv: 1301.7216v1math-ph., 30.01.2013, 16 p.
4. Дементьев Ю.И., Самохин А.В. Галилеево-инвариантные решения уравнения КдВ-Бюргера и нелинейная суперпозиция ударных волн // Научный Вестник МГТУ ГА. 2016. № 224. С. 24–33.

5. Chugainova A.P., Shargatov V.A. Stability of the breaks structure described by the generalized Kortweg-de Vries-Burgers equation, *Computational Math and Math Phys.*, 2016, vol. 56, issue 2, pp. 259–274.
6. Dubrovin B. On Hamiltonian Perturbations of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, II: Universality of Critical Behaviour, *Comm. Math. Phys.*, 2006, vol. 267, pp. 117–139.
7. Руденко О.В. Нелинейные пилообразные волны // УФН. 1995. № 9. С. 1011–1035.
8. Чугайнова А.П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса // Тр. МИАН. 2013. Т. 281. С. 215–223.
9. Чугайнова А.П., Шаргатов В.А. Устойчивость нестационарных решений обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015. Т. 55, № 2. С. 253–266.
10. Куликовский А.Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами: Волны рекомбинации // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 6. С. 1125–1131.
11. Pego R.L., Smereka P., Weinstein M.I. Oscillatory instability of traveling waves for a KdV-Burgers equation. *Physica D*. 1993, vol. 67, pp. 45–65.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Самохин Алексей Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ ГА, samohinalexey@gmail.com.

Дементьев Юрий Игоревич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики МГТУ ГА, yidem@mail.ru.

MODELLING SOLUTIONS TO THE KdV-BURGERS EQUATION IN THE CASE OF NONHOMOGENEOUS DISSIPATIVE MEDIA

Alexey V. Samokhin¹, Yuri I. Dementyev¹

¹Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia

ABSTRACT

The behavior of the soliton type solutions to the KdV-Burgers equation is studied numerically in the case of non-homogeneous dissipative media. A soliton moves from left to right and it does not change its form. The solitons with greater amplitude are narrower and move faster. The aim of the presented research is to study the behavior of the soliton that, while moving in nondissipative medium encounters a barrier (finite or infinite) with finite constant dissipation; one may imagine an impulse of light meeting on its way a partially absorbing layer. The modelling included the case of a finite dissipative layer similar to a wave passing through the air-glass-air as well as a wave passing from a nondissipative layer into a dissipative one (similar to the passage of light from air to water). The present paper is a continuation of the authors' publications. New results include a numerical model of the wave's behavior for different types of the media non-homogeneity. The dissipation predictably results in reducing the soliton's amplitude, but some new effects occur in the case of finite piecewise constant barrier on the soliton path: after the wave leaves the dissipative barrier it retains, on the whole, a soliton form yet some small and rapidly decreasing oscillations arises in front of the soliton. These oscillations are getting larger and spread as the soliton is moving of the barrier; the distance between the soliton and the oscillation grows. That is, the oscillations are faster than the soliton. The modelling used the Maple software *PDETools* packet; these activities were time and resources consuming.

Key words: Korteweg-de Vries-Burgers equation, soliton, nonhomogeneous dissipation media.

REFERENCES

1. Ryskin N.M., Trubetskov D.I. *Nelineiniye volny* [Nonlinear waves]. M., Fizmatlit, 2000, 272 p. (in Russian)

2. **Samokhin A.V., Dementyev Y.I.** *Resheniya uravneniya Burgersa s periodicheskim vozmuscshniyem na granitse* [Solutions to the Burgers equation with a periodic perturbation on the boundary]. *Civil aviation high technologies*, 2015, no. 220, pp. 82–87. (in Russian)
3. **Dubrovин B., Elaeva M.** On critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. ArXiv: 1301.7216v1math-ph., 30.01.2013, 16 p.
4. **Dementyev Y.I., Samokhin A.V.** *Galilyeyevo-invariantniye resheniya uravneniya Burgersa i nelineinaya superpostsiya udarnyh voln* [Galilean-invariant solutions to the Burgers equation and the nonlinear superposition of shock waves]. *Nauchnyi Vestnik moskovskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiyeya grazhdanskoi aviatsii* [Civil aviation high technologies], 2016, no. 224, pp. 24–33. (in Russian)
5. **Chugainova A.P., Shargatov V.A.** Stability of the breaks structure described by the generalized Kortweg-de Vries-Burgers equation, *Computational Math and Math Phys.*, 2016, vol. 56, issue 2, pp. 259–274.
6. **Dubrovин B.** On Hamiltonian Perturbations of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, II: Universality of Critical Behaviour, *Comm. Math. Phys.*, 2006, vol. 267, pp. 117–139.
7. **Rudenko O.V.** *Nelineinye piloobraznyye volny* [Nonlinear sawtooth-shaped waves]. *UFN*, 1995, no. 9, pp. 1011–1035. (in Russian)
8. **Chugainova A.P.** *Nestatsionarnyye resheniya obobshschonnogo uravneniya Kortewega-de Vriesa-Burgersa* [Non-stationary solutions of a generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation]. *Trudy MIAN* [Proceedings of MIAS], 2013, vol. 281, pp. 215–223.
9. **Chugainova A.P., Shargatov V.A.** *Ustoichivost nestatsionarnyh reshenii obobshschonnogo uravneniya Kortewega-de Vriesa-Burgersa* [Stability of non-stationary solutions of a generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation]. *J. Vychisl. Matem i Matem. Fiziki* [Comp. Math. and Math. Physics]. 2015, vol. 55, № 2, pp. 253–266. (in Russian)
10. **Kulikovskiy A.G.** *O poverkhnostyakh razryva razdelyaushchikh idealnyye sredy s razlichnymi svoystvami: Volny rekombinatsii* [On break surfaces separating ideal media with different properties: Recombination waves]. *Prikladnaya Matematika i Mehanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1968, vol. 32, issue 6, pp. 1125–1131. (in Russian)
11. **Pego R.L., Smereka P., Weinstein M.I.** Oscillatory instability of traveling waves for a KdV-Burgers equation. *Physica D*. 1993, vol. 67, pp. 45–65.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexey V. Samokhin, Doctor of Engineering Sciences, Professor of Higher Mathematics Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, a.samohin@mstuca.aero.

Yury I. Dementyev, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Head of Higher Mathematics Chair, MSTUCA, Moscow State Technical University of Civil Aviation, y.dementyev@mstuca.aero.