

УДК 536.21

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА С ШАРОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

О.В. ПУГАЧЕВ¹, З.Т. ХАН¹

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия

Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное количество работ. Нами предложен новый подход к решению задачи об эффективной теплопроводности, использующий моделирование процесса теплопроводности броуновским движением виртуальных частиц тепла. При таком методе рассматривается оценка температуропроводности, теоретически вычисляемая для однородного материала, и статистически оценивается ее значение для композита. В настоящей работе сравниваются два метода нахождения эффективного коэффициента теплопроводности композитов при помощи моделирования процесса теплопроводности броуновским движением виртуальных частиц тепла. Рассмотрен композит с шаровыми включениями материала, имеющего теплоемкость и теплопроводность иные, чем у матрицы. В компьютерном эксперименте моделируется процесс теплопроводности через плоский слой композита, нагретый с одной стороны в начальный момент. Статистически находится либо смещение центра тепловой энергии, либо вероятность прохождения виртуальной частицы тепла через слой за некоторое время, чтобы найти доверительный интервал для эффективного коэффициента теплопроводности. Результаты сравниваются с теоретическими оценками, предложенными другими авторами.

Ключевые слова: эффективный коэффициент теплопроводности, композит, компьютерное моделирование, броуновское движение, доверительный интервал.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию теплопроводности композитов посвящено значительное количество работ, например, [1, 2, 3]. В работах [4, 5, 6] были применены новые подходы к задаче оценки эффективного коэффициента теплопроводности материала с шаровыми включениями. Использовались методы вариационного исчисления, при этом рассматривалась упрощенная модель окрестности включения.

Современные компьютеры позволяют применить другой подход к решению задачи об эффективной теплопроводности. Процесс теплопроводности можно моделировать броуновским движением виртуальных частиц тепла. Идея состоит в том, чтобы сформулировать оценку температуропроводности, теоретически вычисляемую для однородного материала, и статистически оценить ее для композита.

БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ТЕПЛА

Пусть пространство заполнено изотропным материалом, имеющим объемную теплоемкость C и коэффициент теплопроводности λ , тогда уравнение теплопроводности имеет вид $u_t = a\Delta u$, где $a = \lambda / C$ – коэффициент температуропроводности.

Если компоненты ξ_t, η_t, ζ_t трехмерного случайного процесса – независимые винеровские процессы с распределением $\mathcal{N}(0, 2at)$, то решение уравнения теплопроводности можно получить с помощью винеровского процесса: пусть трехмерная случайная величина (X_0, Y_0, Z_0) имеет плотность распределения $u(0, x, y, z)$, тогда трехмерная случайная величина с координатами $X_t = X_0 + \xi_t, Y_t = Y_0 + \eta_t, Z_t = Z_0 + \zeta_t$ будет иметь плотность распределения $u(t, x, y, z)$.

В данной математической модели процесс теплопроводности представляется как случайное блуждание виртуальных частиц тепловой энергии. Эти частицы представляют собой выборку из распределения, плотность которого в каждый момент времени про-

порциональна плотности тепловой энергии (температуре, умноженной на объемную теплоемкость).

Если рассматривается ограниченное тело U и на его поверхности нет теплообмена с окружающей средой путем теплопроводности или излучения, то решение уравнения теплопроводности при помощи случайных процессов модифицируется: виртуальной частице при выборе очередного шага запрещено покидать область U .

Будем рассматривать композит (тело U), состоящий из матрицы (области U_1) – материала с объемной теплоемкостью C_1 и теплопроводностью λ_1 и включений (объединения областей U_2) материала объемной теплоемкости C_2 и теплопроводности λ_2 . Тепловой контакт между ними будем считать идеальным. В каждой из областей U_1, U_2 теплопроводность моделируется случайными блужданиями частиц (коэффициенты температуропроводности $a_1 = \lambda_1/C_1$ и $a_2 = \lambda_2/C_2$ могут различаться). Из U_1 в U_2 частицы переходят беспрепятственно, а из U_2 в U_1 – с вероятностью λ_1/λ_2 .

Чтобы оценить эффективную теплопроводность композита, проводится вычислительный эксперимент, результат которого сопоставляется с теоретически известным результатом для однородного материала. В пространстве $Oxyz$ будем рассматривать плоский слой композита

$$U = \{(x,y,z): 0 < x < b\}.$$

Под эффективной температуропроводностью композита в направлении оси Ox будем понимать такую величину \tilde{a} , что в таком же слое однородного материала с температуропроводностью \tilde{a} температура будет распространяться столь же быстро, как в рассматриваемом композите. Что можно понимать под быстротой распространения тепла, уточним в параграфах 2 и 3.

Пусть имеется слой $\{0 < x < b\}$ композита, эффективную температуропроводность \tilde{a} которого нужно оценить. Частицы будут стартовать с поверхности $\{x = 0\}$, их начальные координаты y и z будут распределены равномерно и независимо. Но если включения имеют нулевую теплопроводность, то не допускается попадание начальных положений частиц внутрь включений.

Чтобы найти эффективную теплопроводность, нужно будет умножить эффективную температуропроводность на среднюю объемную теплоемкость, равную

$$C_1(1 - Q) + C_2Q,$$

где Q – доля объема, занимаемая включениями. В случае нетеплопроводных включений ($\lambda_2 = 0$) следует считать $C_2 = 0$.

СМЕЩЕНИЕ ЦЕНТРА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ

Пусть U – тело в пространстве (x,y,z) . Обозначим через ρ плотность тепловой энергии, т.е. температуру (отсчитываемую от выбранного нуля), умноженную на объемную теплоемкость: $\rho = Ci$. Будем называть статическими моментами тепловой энергии величины

$$M_x = \iiint xp(x,y,z)dxdydz, M_y = \iiint yp(x,y,z)dxdydz, M_z = \iiint zp(x,y,z)dxdydz.$$

Разделив их на тепловую энергию E тела, получаем координаты центра тепловой энергии. Идея метода, предложенного в нашей работе [7]: оценить эффективную температуропроводность по смещению центра тепловой энергии. Сначала рассмотрим слой $\{0 < x < b\}$ однородного материала с коэффициентом температуропроводности a с теплоизолированными по-

верхностями. Пусть в начальный момент ($t = 0$) тепловая энергия распределена с единичной поверхностной плотностью в бесконечно тонком слое у поверхности $\{x = 0\}$, т. е. $\rho(x, y, z) = \delta(x)$, где δ – дельта-функция Дирака. Температура u не зависит от y, z и не будет зависеть в дальнейшем, т. е. $u = u(x, t)$. Решив методом Фурье одномерное уравнение теплопроводности с граничными условиями $u = 0$, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{b} \exp \left(-\frac{\pi^2 n^2 a t}{b^2} \right) \right).$$

Найдем статический момент тепловой энергии и разделим на $E = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = M_x(t) &= \frac{1}{b} \left(\frac{b^2}{2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2b^2}{\pi^2 (2k+1)^2} \exp \left(-\frac{\pi^2 (2k+1)^2 a t}{b^2} \right) \right) = \\ &= \frac{b}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \left(-\frac{\pi^2 (2k+1)^2 a t}{b^2} \right) \right) = bX(\tau), \end{aligned}$$

где $\tau = at/b^2$ – безразмерная переменная, и функция

$$X(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp \left(-\pi^2 (2k+1)^2 \tau \right) \right)$$

также безразмерна. График функции $X(\tau)$ показан на рис. 1.

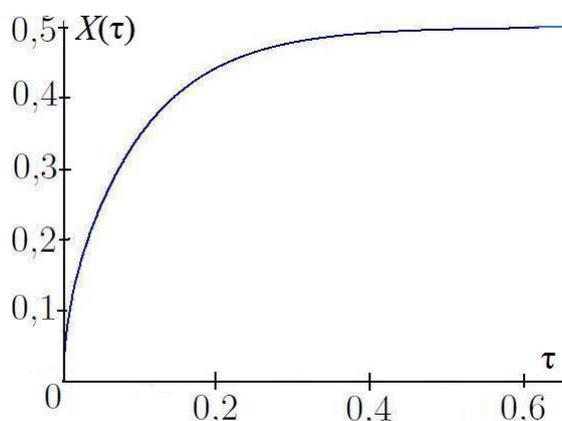


Рис. 1. График функции $X(\tau)$
Fig. 1. The graph of $X(\tau)$ function

Теперь рассмотрим слой $\{0 < x < b\}$ с теплоизолированными поверхностями, изготовленный из композита с размерами неоднородностей намного меньше b , эффективный коэффициент температуропроводности \tilde{a} которого мы хотим найти. Будем проводить следующий вычислительный эксперимент. Пусть n частиц стартуют с поверхности $\{x = 0\}$ и совершают броуновское движение (параграф 1), отражаясь от теплоизолированных поверхностей $\{x = 0\}$ и $\{x = b\}$. В некоторый момент времени t вычислим среднее значение координаты x этих частиц. Его математическое ожидание равно $\bar{x}(t)$.

Вычислим дисперсию координаты x одной частицы:

$$D_x(t) = \int_0^b (x - \bar{x}(t))^2 u(x, t) dx = \int_0^b x^2 u(x, t) dx - \bar{x}(t) = b^2 D(\tau),$$

где функция

$$D(\tau) = \frac{1}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \exp(-\pi^2 n^2 \tau) - X^2(\tau)$$

безразмерна. Построим ее график (рис. 2).

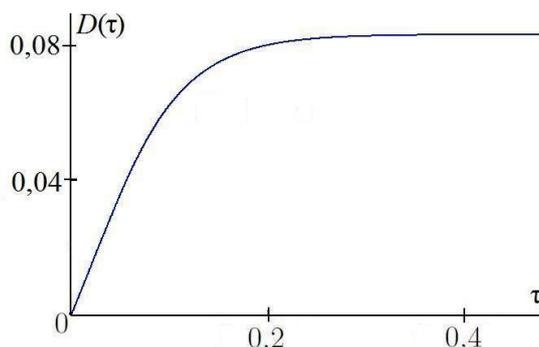


Рис. 2. График функции $D(\tau)$
Fig. 2. The graph of $D(\tau)$ function

Для n частиц имеем $D_{x_{cp}}(t) = D_x(t)/n = b^2 D(\tau)/n$. Если в вычислительном эксперименте получено значение \hat{x} , то точечную оценку эффективного коэффициента температуропроводности a находим из уравнения

$$bX(\tau) = \hat{x} \Rightarrow \tau = X^{-1}(\hat{x}/b) \Rightarrow a = \frac{b^2}{t} X^{-1}(\hat{x}/b).$$

Согласно центральной предельной теореме, α -доверительный интервал для \hat{x} имеет вид

$$|\bar{x} - \hat{x}| < \frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b,$$

где значение τ получено из (1); u_p – квантиль уровня $p = (1+\alpha)/2$ стандартного нормального распределения, например, для $\alpha = 0,95$ берут $u_p = u_{0,975} = 1,96$. Нам нужно так подобрать t , чтобы минимизировать радиус доверительного интервала для a , который в линейном приближении равен

$$\frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b \cdot \frac{\partial a}{\partial \hat{x}} = \frac{q\sqrt{D(\tau)}}{\sqrt{n}} b \cdot \frac{b^2}{tb} (X^{-1})'(\hat{x}/b) = \frac{qb^2}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{D(\tau)}}{tX'(\tau)} = \frac{qa}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{D(\tau)}}{\tau X'(\tau)}.$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦЫ СКВОЗЬ СЛОЙ

Как было показано в [8], вероятность прохождения виртуальной частицы через слой однородного материала с коэффициентом температуропроводности a толщиной b за время t составляет

$$P = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi \left(-\frac{(2k+1)b}{\sqrt{2at}} \right) = \Psi(\tau),$$

где $\tau = at/b^2$ – безразмерное время, а функция $\Psi(\tau)$ задана формулой

$$\Psi(\tau) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Phi \left(-\frac{(2k+1)}{\sqrt{2\tau}} \right),$$

ее график показан на рис. 3.

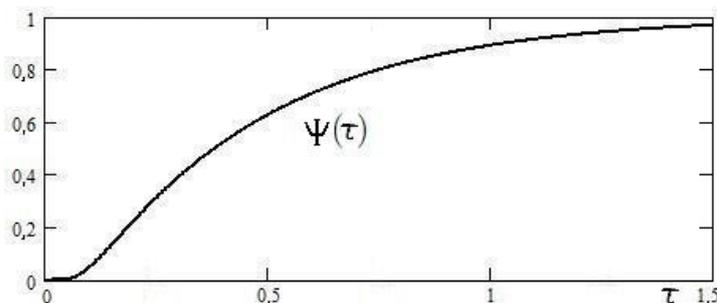


Рис. 3. График функции $\Psi(\tau)$
Fig. 3. The graph of $\Psi(\tau)$ function

Проведем $n > 1000$ вычислительных экспериментов, и пусть в m из них частица успела за время меньше T дойти до поверхности $\{x = b\}$. Физический смысл такого эксперимента – приложив к поверхности $\{x = 0\}$ равномерный источник тепла, оценить, насколько быстро оно доходит до поверхности $\{x = b\}$. Обозначим $q = m/n$. Согласно центральной предельной теореме, α -доверительный интервал для P имеет вид

$$P_1 = q - u_\rho(q(1-q)/n)^{1/2} < P < q + u_\rho(q(1-q)/n)^{1/2} = P_2,$$

где u_ρ – квантиль уровня $\rho = (1 + \alpha)/2$ стандартного нормального распределения.

Следовательно, α -доверительный интервал для \tilde{a} имеет вид

$$\frac{b^2}{T} \Psi^{-1}(P_1) < \tilde{a} < \frac{b^2}{T} \Psi^{-1}(P_2). \quad (2)$$

Поскольку функция Ψ задана весьма сложной формулой, а обратная ей функция требует многократного вычисления Ψ , имеет смысл заменить формулу (2) более простой, используя дифференцируемость функции Ψ :

$$\left| \tilde{a} - \frac{b^2}{T} \Psi^{-1}(q) \right| < u_\rho \sqrt{q(1-q)/n} (\Psi^{-1})'(q).$$

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ τ

В таблице 1 сравнивается точность оценок безразмерного времени τ методом, описанным в параграфах 3 (левая половина таблицы) и 2 (правая половина).

Столбцы в левой половине: $\Psi(\tau)$ – вероятность прохождения виртуальной частицы сквозь слой за время, соответствующее безразмерному времени τ ; σ_τ – среднеквадратичная по-

грешность эмпирического значения $\Psi(\tau)$ при объеме выборки $n = 10000$ частиц; σ_τ – среднеквадратичная погрешность оценки τ ; $\sigma_{\text{отн}}$ – относительная среднеквадратичная погрешность оценки τ (в процентах), т. е. $\sigma_{\text{отн}} = 100 \sigma_\tau / \tau$.

Столбцы в правой половине: $X(\tau)$ – безразмерное смещение центра тепловой энергии за время, соответствующее безразмерному времени τ ; σ_c – среднеквадратичная погрешность эмпирического значения $X(\tau)$ при объеме выборки $n = 10000$ частиц; σ_τ – среднеквадратичная погрешность оценки τ ; $\sigma_{\text{отн}}$ – относительная среднеквадратичная погрешность оценки τ (в процентах).

В таблице оставлены пустыми те строки, где получается относительная погрешность оценки τ выше 10 %, т. к. эти результаты не представляют практической ценности.

Таблица 1
Table 1

Сравнение двух методов оценки τ
Comparison of two methods for evaluation of τ

τ	$\Psi(\tau)$	$\Psi'(\tau)$	σ_P	σ_τ	$\sigma_{\text{отн}}$	$X(\tau)$	$X'(\tau)$	σ_c	σ_τ	$\sigma_{\text{отн}}$
0,02						0,160	3,99	0,0012	0,0003	1,5
0,04	0,001	0,14	0,0003	0,0021	5,2	0,226	2,81	0,0017	0,0006	1,5
0,06	0,008	0,60	0,0009	0,0015	2,5	0,276	2,23	0,0021	0,0009	1,6
0,08	0,025	1,10	0,0016	0,0014	1,8	0,316	1,82	0,0023	0,0013	1,6
0,1	0,051	1,47	0,0022	0,0015	1,5	0,349	1,49	0,0025	0,0017	1,7
0,15	0,136	1,83	0,0034	0,0019	1,3	0,402	0,92	0,0028	0,0031	2,0
0,2	0,228	1,81	0,0042	0,0023	1,2	0,444	0,56	0,0028	0,0051	2,5
0,3	0,393	1,49	0,0049	0,0033	1,1	0,479	0,21	0,0029	0,0139	4,6
0,4	0,526	1,17	0,0050	0,0043	1,1	0,492	0,08	0,0029	0,0375	9,4
0,5	0,629	0,92	0,0048	0,0053	1,1					
0,6	0,710	0,72	0,0045	0,0063	1,1					
0,8	0,823	0,44	0,0038	0,0087	1,1					
1	0,892	0,27	0,0031	0,0116	1,2					

Мы видим, что метод, описанный в параграфе 2, менее эффективен в вычислительном отношении. Минимальная относительная погрешность, которую он может дать при оптимальном выборе τ , почти в 1,4 раза выше, чем при методе из параграфа 3. Это означает, что для получения такой же точности он потребует объем выборки вдвое больше. В дальнейшем будем использовать метод из параграфа 3.

УПОРЯДОЧЕННОЕ И ХАОТИЧНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим шаровые включения одинакового размера, расположенные в узлах кубической решетки, и будем оценивать эффективную теплопроводность вдоль одной из осей решетки, которую примем за ось Ox . Искомый безразмерный результат будет зависеть от единственного параметра – отношения $r = R/D$ радиуса включения к шагу кубической решетки, $0 < r < 0,5$. От самого значения D результат не будет зависеть, так что в вычислениях можем положить $D = 1$.

Смоделируем диффузионный процесс в слое толщиной $b = 4$ (рис. 4, слева). Мы будем также рассматривать теплопроводность в направлении произвольной оси h в слое такой же толщины (рис. 4, справа). Частицы будут стартовать с поверхности $\{h = 0\}$, пусть их начальные координаты распределены равномерно, лишь с оговоркой, что если включения имеют нулевую теплопроводность, то начальным положениям частиц запрещается попадать внутрь включений.

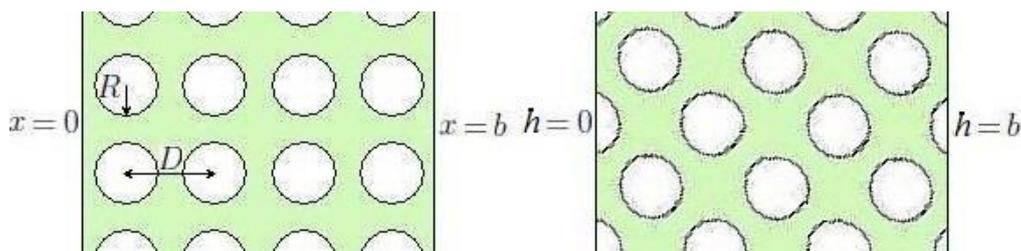


Рис. 4. Упорядоченное расположение шаровых включений
Fig. 4. A regular distribution of spherical inclusions

Теперь пусть включения радиусом $R < 0,5D$ расположены хаотично с плотностью $1/D^3$ (рис. 5).

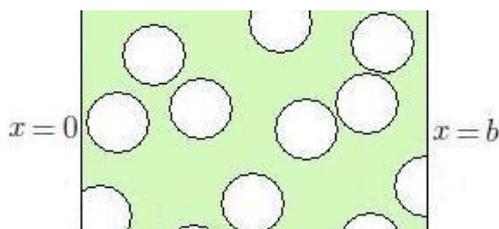


Рис. 5. Хаотичное расположение шаровых включений
Fig. 5. A chaotic distribution of spherical inclusions

Все частицы будут стартовать из начала координат. Для каждой частицы будем заново задавать случайное расположение центров 256 шаров во фрагменте слоя

$$\{0 < x < 4, |y| < 4, |z| < 4\},$$

не допуская наложения одного шара на другой, а в случае $\lambda_2 = 0$ также не допуская наложения шара на начало координат. Чтобы не терять частицы, уходящие через боковые грани $\{y = 4\}$, $\{y = -4\}$, $\{z = 4\}$, $\{z = -4\}$, будем отражать их от этих плоскостей: если $y > 4$, то пусть $y = 8 - y$ и т. д.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Прежде всего выясним, как оптимально задать время T для оценки τ . Был рассмотрен тестовый пример: включения – шары радиуса $r = 0,4$ из такого же материала, как матрица. Здесь эффективная теплопроводность равна 1 и заранее известно истинное значение $\tau = aT/b^2 = T/16$. Мы взяли число частиц $n = 10000$ и шаг времени $dt = 0,0005$. Результаты вычислительных экспериментов показали, что эффективность вычислений максимальна при $T = 3$. При увеличении T она снижается медленно, а при уменьшении T снижается быстро. Из полученных результатов можно сделать следующий практический вывод.

1. Если включения имеют меньшую теплопроводность, чем матрица, то оптимальное ограничение времени блуждания частиц $T = 4$.
2. Если включения имеют большую теплопроводность, чем матрица, то оптимальное ограничение времени блуждания частиц $T = 3$.

Рассмотрим композит с шаровыми включениями одинакового радиуса r , $0 < r < 0,5$, расположенными со средней объемной плотностью 1. Были рассмотрены значения теплопроводности и объемной теплоемкости включений, отличающиеся от тех же свойств материала матрицы не более чем в 4 раза, а также случай нетеплопроводных включений.

Для проверки гипотезы о том, что эффективная теплопроводность одинакова в случае хаотичных и упорядоченных шаровых включений, был рассмотрен случай самых крупных включений ($r = 0,45$). Были взяты выборки объема 10000, статистическая оценка эффективной теплопроводности при обоих вычислительных экспериментах имела среднеквадратичную отно-

сительную погрешность около 1,2 %, и поскольку эти эксперименты независимы, относительная среднеквадратичная разность между ними должна была составить около 1,7 %. Ни среднее значение этих разностей, ни сумма их квадратов, ни корреляции с логарифмами теплопроводности и теплоемкости включений не дали оснований отвергнуть данную гипотезу.

Подтверждение гипотезы об одинаковости эффективной теплопроводности в случае хаотичных и упорядоченных шаровых включений позволило нам усреднить результаты для упорядоченных и хаотичных включений. Поскольку теперь мы имеем выборки объема 20000, среднеквадратичная относительная погрешность составила около 0,85 %. Полученные результаты представлены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2
Table 2

Радиусы включений $r = 0,3$
Radii of inclusions $r = 0,3$

λ_2	C_2	0,25	0,5	1	2	4	(3)	0,25	0,5	1	2	4
0		0,835	0,835	0,835	0,835	0,835	0,839	-5	-5	-5	-5	-5
0,25		0,890	0,888	0,915	0,938	0,996	0,891	-1	-3	26	53	118
0,5		0,931	0,941	0,925	0,949	0,998	0,934	-3	8	-9	16	69
1		1,016	1,009	1	1,006	1,021	1	16	9	0	6	21
2		1,124	1,087	1,080	1,091	1,117	1,087	34	0	-7	3	27
4		1,209	1,188	1,185	1,170	1,208	1,180	25	7	5	-9	23

Таблица 3
Table 3

Радиусы включений $r = 0,45$
Radii of inclusions $r = 0,45$

λ_2	C_2	0,25	0,5	1	2	4	(3)	0,25	0,5	1	2	4
0		0,513	0,513	0,513	0,513	0,513	0,519	-12	-12	-12	-12	-12
0,25		0,661	0,656	0,685	0,732	0,805	0,661	-1	-8	36	106	217
0,5		0,809	0,782	0,792	0,819	0,878	0,787	28	-6	6	40	115
1		1,046	1,004	1	1,013	1,039	1	46	4	0	13	39
2		1,442	1,344	1,317	1,294	1,349	1,316	95	21	0	-17	25
4		1,979	1,773	1,637	1,627	1,670	1,708	159	38	-41	-47	2

Сравним наши результаты с теоретически предсказанными в работе [4], где получена формула для эффективной теплопроводности двухкомпонентного композита с шаровыми включениями

$$\hat{\lambda} / \lambda_1 = \frac{1 - 2b\alpha}{1 + b\alpha}, \text{ где } b = \frac{1 - \lambda_2 / \lambda_1}{2 + \lambda_2 / \lambda_1}; \quad (3)$$

α – объемная концентрация включений. В правых половинах таблиц 2 и 3 показаны относительные разности (в промилле) между нашими результатами и вычисленными по формуле (3).

Мы видим, что полученные нашим методом эффективные коэффициенты теплопроводности мало отличаются от теоретически предсказанных, если коэффициент температуропроводности композита $a_2 = \lambda_2 / C_2$ не сильно (менее чем в 4 раза) отличается от коэффициента температуропроводности матрицы $a_1 = \lambda_1 / C_1$. Если же он отличается в 4 раза и более, наш результат заметно отличается в большую сторону.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
2. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Научова думка, 1984. 111 с.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективный коэффициент теплопроводности композита с шаровыми включениями // Тепловые процессы в технике. 2012. № 10. С. 470–474.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 76–85.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок коэффициента теплопроводности композита с шаровыми включениями. Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2013. № 7. С. 299–318. DOI: 10.7463/0713.0569319.
7. Пугачев О.В., Хан З.Т. Нахождение эффективной теплопроводности композита методом моментов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, серия «Естественные науки». 2016. № 4. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-28-39.
8. Пугачев О.В., Хан З.Т. Теплопроводность композита с нетеплопроводными шаровыми включениями // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электр. журнал. 2015. № 5. С. 205–217. DOI: 10.7463/0515.0776224.
9. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
10. Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H. Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance. Journal of Applied Physics. 1997. Vol. 81. P. 6692–6699.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пугачев Олег Всеволодович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, orugachev@ya.ru.

Хан Зо Тун, аспирант кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, aungsitthi51@gmail.com.

MODELLING OF HEAT CONDUCTIVITY OF COMPOSITE MATERIALS WITH BALL INCLUSIONS

Oleg V. Pugachev¹, Han Zaw Tun¹

¹*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

ABSTRACT

A number of papers deals with the heat conductivity of composite materials: Zarubin *et al* used new approaches to the problem of evaluation of the effective heat conductivity coefficients of composite material with ball inclusions. We used variational analysis for a simplified model in a vicinity of inclusion. Contemporary computers allow implementing another approach to solving the problem of the effective heat conductivity: it may be modelled by

the Brownian motion of virtual heat particles. The main idea is to obtain the exact formula for the heat conductivity for a homogeneous material and subsequently obtain a statistical evaluation of this formula for a composite material.

In the present paper we compare two methods for finding the effective heat conductivity coefficients of composite materials by modeling the process of heat conduction via the Brownian motion of virtual heat particles. We consider a composite with ball inclusions of a material with heat conductivity and heat capacity coefficients differing from those of the matrix material. In a computational experiment, we simulate the process of heat conduction through a flat layer of the composite material, which has been heated on one side at the initial moment. In order to find the confidence interval for the effective heat conductivity coefficient, we find, by means of statistics, either the displacement of the center of heat energy, or the probability of a virtual particle to pass through the layer during a certain time. We compare our results with theoretical assessments suggested by other authors.

Key words: effective heat conductivity coefficient, composite material, computer simulation, Brownian motion, confidence interval.

REFERENCES

1. **Dulnev G.N., Zarichnyak Yu.P.** *Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov.* [Heat conductivity of mixtures and composite materials.]. Leningrad: *Energia* [Leningrad: *Energia*], 1974. 264 p. (in Russian)
2. **Khoroshun L.P., Soltanov N.S.** *Termouprugost' dvukhkomponentnykh smesei* [Thermoelasticity of two-component mixtures]. Kiev: *Naukova Dumka* [Kiev: *Naukova Dumka*], 1984. 111 p. (in Russian)
3. **Shermergor T.D.** *Teoria uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of micro-heterogeneous media]. Moscow, Nauka, 1977. 399 p. (in Russian)
4. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu.** *Effektivny koefitsient teploprovodnosti kompozita s sharovymi vklucheniami* [Effective heat conductivity coefficient of a composite material with ball inclusions]. *Teplovyie processy v tekhnike* [Thermal processes in technology], 2012, no. 10, pp. 470–474. (in Russian)
5. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** *Effektivnye koefitsienty teploprovodnosti kompozita s ellipsoidalnymi vklucheniami* [Effective coefficients of heat conductivity of composites with ellipsoidal inclusions]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana* [Vestnik BMSTU]. Ser. *Estestvennye nauki* [ser. Natural sciences], 2012, № 3, pp. 76–85.
6. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu.** *Sravnitelny analiz ocenok koefitsienta teploprovodnosti kompozita s sharovymi vklucheniami* [Comparing analysis of evaluations of heat conductivity coefficients of composite materials with ball inclusions]. *Nauka i obrazovanie* [Science and education]. Electronic edition, 2013, № 7, pp. 299–318. DOI: 10.7463/0713.0569319.
7. **Pugachev O.V., Han Z.T.** *Nahozhdeniye effektivnoi teploprovodnosti kompozita metodom momentov* [Evaluation of effective heat conductivity of composite materials by the method of momenta]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki* [Vestnik BMSTU, ser. Natural Sciences], 2016, no. 4. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-28-39. (in Russian)
8. **Pugachev O.V., Han Z.T.** *Teploprovodnost' kompozita s neteploprovodnymi sharovymi vklucheniyami* [Heat conductivity of composite materials with included balls of zero heat conductivity]. *Nauka i obrazovaniye. MGTU im. N.E. Baumana. Elektronnyi zhurnal* [Science and Education. BMSTU. Electronic journal], 2015, no. 5, pp. 205–217. DOI: 10.7463/0515.0776224. (in Russian)
9. **Chen Y.-M., Ting J.-M.** Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*. 2002, vol. 40, pp. 359–362.
10. **Nan C.-W., Birringer R., Clarke D.R., Gleiter H.** Effective thermal conductivity of particulate composites with interfacial thermal resistance. *Journal of Applied Physics*, 1997, vol. 81, pp. 6692–6699.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Oleg V. Pugachev, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics Chair, Bauman Moscow State Technical University, opugachev@ya.ru.

Zaw T. Han, post-graduate student, Applied Mathematics Chair, Bauman Moscow State Technical University, aungsitthi51@gmail.com.