УДК 533.6.011

ДОЗВУКОВОЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ НЕИЗОЭНТРОПИЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Г.Б. СИЗЫХ[1]
[1]*Московский физико-технический институт (государственный университет), г. Москва, Россия*

Дозвуковой принцип максимума справедлив для дозвуковых стационарных безвихревых течений газа. Согласно этому принципу, если модуль скорости не постоянен всюду, то его максимум достигается на границе и только на границе рассматриваемой области течения. Это свойство используется при разработке формы летательных аппаратов с максимальным критическим значением числа Маха: считается, что если в набегающем потоке и на поверхности обтекаемого тела местное число Маха меньше единицы, то в течении нет звуковых точек. Известное доказательство дозвукового принципа максимума существенным образом опирается на предположение о том, что во всей рассматриваемой области течения давление является функцией плотности. Для идеального (роль диффузии молекул пренебрежимо мала) совершенного (закон Менделеева – Клапейрона) газа давление является функцией плотности, если во всей рассматриваемой области течения энтропийная функция постоянна. Приведен пример дозвукового стационарного безвихревого течения газа, в котором энтропийная функция имеет различные значения на разных линиях тока, а давление не является функцией плотности. Применение дозвукового принципа максимума к такому течению было бы необоснованно. Приведенный пример показывает содержательность вопроса о месте точек максимума модуля скорости дозвуковых стационарных безвихревых неизоэнтропийных течений газа. Для выяснения закономерностей расположения таких точек был проведен анализ полных (без каких-либо упрощающих допущений) уравнений Эйлера в общем пространственном случае. Предложено новое доказательство дозвукового принципа максимума. Это доказательство не опирается на предположение об изоэнтропийности. Тем самым показано, что требование изоэнтропийности можно исключить из условий дозвукового принципа максимума. Дозвуковой принцип максимума оказывается верным и для неизоэнтропийных дозвуковых стационарных безвихревых течений идеального совершенного газа.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, дозвуковой принцип максимума, безвихревые течения, изоэнтропийность.

ВВЕДЕНИЕ

В движущейся частице идеального (роль диффузии молекул пренебрежимо мала) совершенного (закон Менделеева – Клапейрона) газа давление p связано с плотностью ρ соотношением $p = s\rho^k$, где энтропийная функция $s > 0$ не меняется во время движения (здесь $k > 1$ – показатель адиабаты). Поэтому величина s одинакова во всех точках любой линии тока стационарного течения. В некоторых течениях энтропийная функция может быть различной на разных линиях тока. Если же величина s принимает одно и то же значение во всех точках течения, то такое течение называется изоэнтропийным. Здесь и далее предполагается, что во всей рассматриваемой области движется один и тот же газ, и показатель адиабаты $k > 1$ имеет одинаковое значение во всех точках. Это относится как к изоэнтропийным, так и неизоэнтропийным течениям. То есть в данной статье причиной неизоэнтропийности считается только различие s на разных линиях тока.

В статье [1] для стационарных дозвуковых безвихревых течений газа, в которых давление является функцией плотности, получен так называемый дозвуковой принцип максимума. Доказательство можно найти в [2, гл. II]. Согласно этому принципу, максимум модуля скорости, если он не постоянен всюду, достигается на границе и только на границе течения. В этой теореме в качестве границ течения могут выступать как поверхности обтекаемых тел, так и воображаемые поверхности, ограничивающие рассматриваемую область течения. Доказательство этого принципа существенным образом опирается на предположение о том, что во всей рассматриваемой области течения давление является функцией плотности. Для изоэнтропийных течений $s = const$ во всех точках, и, следовательно, давление идеального совершенного газа

$p = s\rho^k$ является функцией плотности. Поэтому в формулировке дозвукового принципа максимума для идеального совершенного газа требование о том, чтобы давление являлось функцией плотности, можно заменить требованием изоэнтропийности.

Применение оператора ротора к (векторному) уравнению Эйлера [3] для безвихревого течения приводит к равенству нулю векторного произведения двух градиентов: $[\nabla p, \nabla\rho] = 0$. Это равенство в случае $\nabla\rho \neq 0$ в (открытой) области означает существование функции $p = p(\rho)$, а в случае $\nabla\rho = 0$ – постоянство плотности. В первом случае справедлив дозвуковой принцип максимума. Второй случай соответствует безвихревому течению несжимаемой жидкости, и принцип максимума модуля скорости вытекает из теории гармонических функций. В обоих случаях дозвуковой принцип максимума оказывается верным без дополнительного предположения об изоэнтропийности. Отсюда напрашивается вывод о том, что требование изоэнтропийности в формулировке дозвукового принципа максимума является необязательным. Но такой вывод был бы неверным. Это связано с тем, что возможны неизоэнтропийные безвихревые течения, в которых условие $\nabla\rho \neq 0$ нарушено не в (открытых) областях, а в некоторых внутренних точках, линиях или поверхностях. В таких течениях множество точек, в которых $\nabla\rho = 0,$ не является открытым, и поэтому невозможно применение теории гармонических функций. Применение же дозвукового принципа максимума также может оказаться невозможным, поскольку давление не будет являться функцией плотности. Поясним это на примере течения газа между двумя соосными цилиндрами. Первый цилиндр имеет радиус r_0, второй – радиус $3r_0$. Расположим декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы ось Ox_3 совпадала с осью цилиндров. Обозначим V_1, V_2, V_3 – компоненты скорости газа. Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнениям Эйлера [3], уравнению неразрывности [3] и условию сохранения энтропийной функции p/ρ^k вдоль линий тока удовлетворяет набор функций V_1, V_2, V_3, ρ и p, вычисленных по формулам

$$V_1 = V_0 r_0 x_2 / r^2,\ V_2 = -V_0 r_0 x_1 / r^2,\ V_3 = V_0,$$
$$\rho = \rho_0\left(4r_0^2 + (r - 2r_0)^2\right)/r_0^2,\ p = 5\rho_0 V_0^2 + \rho_0 V_0^2\left[\ln(r/r_0) + \left(4r_0/r\right) - \left(4r_0^2/r^2\right)\right],$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а положительные константы r_0, ρ_0, V_0 имеют размерность длины, плотности и скорости соответственно. Предполагается, что координаты x_1, x_2, x_3 имеют размерность длины. Эти формулы описывают течение, в котором частицы жидкости движутся по цилиндрическим поверхностям с общей осью симметрии Ox_3. Скорость с компонентами V_1, V_2, V_3 имеет нулевую завихренность. Первое слагаемое в выражении для давления $(5\rho_0 V_0^2)$ подобрано таким образом, что в зазоре между цилиндрами $(r_0 \le r \le 3r_0)$ выполнено неравенство $\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} < \sqrt{kp/\rho}$. То есть течение является дозвуковым.

Несложно проверить, что во всем зазоре между цилиндрами $(r_0 \le r \le 3r_0)$ давление строго монотонно возрастает с ростом радиуса r. Из выражения для плотности видно, что она строго монотонно убывает с ростом радиуса r на участке $r_0 \le r < 2r_0$. И наоборот, плотность строго монотонно возрастает с ростом радиуса r на участке $2r_0 < r \le 3r_0$. Поэтому по отдельности на участках $r_0 \le r < 2r_0$ и $2r_0 < r \le 3r_0$ давление является функцией плотности. Но во всем зазоре между цилиндрами $(r_0 \le r \le 3r_0)$ давление не является функцией плотности. Следовательно, к этому стационарному дозвуковому безвихревому течению нельзя применить дозвуковой принцип максимума.

Приведенный пример показывает существенность требования изоэнтропийности для дозвукового принципа максимума. Однако это связано лишь с особенностями «старого» доказательства [1, 2]. В данной статье показано, что дозвуковой принцип максимума остается верным и для неизоэнтропийных течений, то есть для течений, в которых энтропийная функция может принимать разные значения на разных линиях тока. Тем самым показано, что требование изоэнтропийности является несущественным и может быть исключено из условий дозвукового принципа максимума.

В данной статье рассматриваются области течения, в которых нет разрывов аэродинамических параметров. Достаточная для дальнейшего исследования гладкость всех аэродинамических параметров в таких областях предполагается естественным свойством течений газа, что является одной из общепризнанных гипотез теории непрерывной сплошной среды.

СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ТОЧЕК ТОРМОЖЕНИЯ

Рассмотрим стационарное безвихревое ($rot\,\vec{V}=0$, где $\vec{V}$ – скорость) течение идеального совершенного газа в общем пространственном случае. Такое течение может быть неизоэнтропийным. В силу возможной неизоэнтропийности нельзя считать, что полная энтальпия

$$h_0 = s\rho^{k-1}k/(k-1)+V^2/2>0$$

одинакова на разных линиях тока. Но, независимо от этого, энтропийная функция s не меняется вдоль линий тока. Поэтому из уравнений Эйлера [3] следует, что полная энтальпия h_0 сохраняется вдоль каждой линии тока.

В данном разделе будем считать, что в рассматриваемой области течения нет точек торможения, то есть что модуль скорости $V=\left|\vec{V}\right|$ и, следовательно, параметр Чаплыгина $\tau = V/\sqrt{2h_0}$ всюду отличны от нуля. Поэтому в каждой точке существует единичный вектор, касательный к линии тока $\vec{e}=\vec{V}/V$. Тогда уравнение неразрывности $div(\rho\vec{V})=div(\sqrt{2h_0}\rho\tau\vec{e})=0$, с учетом $(\vec{e}\cdot\nabla h_0)=0$, можно представить в виде

$$div\,\vec{e}\,+(\vec{e}\cdot\nabla)\,ln(\rho\tau)=0.$$

Подставим в это равенство плотность, полученную из выражения для полной энтальпии:

$$\rho=(1-\tau^2)^{\frac{1}{k-1}}\left(h_0(k-1)/sk\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Учитывая, что $(\vec{e}\cdot\nabla(h_0(k-1)/sk))=0$, получим

$$div\vec{e}\;-2\tau^2(k-1)^{-1}(1-\tau^2)^{-1}(\vec{e}\cdot\nabla)\,ln\tau+(\vec{e}\cdot\nabla)\,ln\tau=0.$$

Далее, поскольку $(\vec{e}\cdot\nabla)\,ln\tau=(\vec{e}\cdot\nabla)\,ln(\tau\sqrt{2h_0})=(\vec{e}\cdot\nabla)lnV$, имеем

$$div\vec{e}=(\alpha\tau^2-1)(1-\tau^2)^{-1}(\vec{e}\cdot\nabla\lambda),\;\alpha=(k+1)/(k-1)>1,\;\lambda=lnV. \qquad (1)$$

Из условия отсутствия завихренности $rot(V\vec{e})=0$ находим

$$rot\,\vec{e}=[\vec{e},\nabla\lambda]. \tag{2}$$

Докажем, что величина $\lambda=lnV$ не может достигать максимального значения во внутренней точке течения, если только не является константой. Вычисляя ротор от обеих частей (2) и используя формулу для ротора векторного произведения, получим

$$rot\,rot\,\vec{e}=(\nabla\lambda\cdot\nabla)\vec{e}-(\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda+\vec{e}\,\Delta\lambda-(div\,\vec{e})\nabla\lambda\,,$$

где Δ – оператор Лапласа. Поскольку производная единичного вектора $\vec{e}$ по любому направлению перпендикулярна $\vec{e}$ (и, следовательно, $(\vec{e}\cdot(\nabla\lambda\cdot\nabla)\vec{e})=0$), последнее уравнение после скалярного умножения на вектор $\vec{e}$ дает

$$(\vec{e}\cdot rot\,rot\,\vec{e})=-(\vec{e}\cdot((\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda))+\Delta\lambda-(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)\,div\,\vec{e}\,.$$

Преобразуем левую часть этого равенства, используя известное векторное тождество $\nabla\,div\,\vec{e}\equiv rot\,rot\,\vec{e}+\Delta\vec{e}$. После перестановки слагаемых получим:

$$\Delta\lambda-(\vec{e}\cdot\nabla div\,\vec{e})-(\vec{e}\cdot((\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda))-(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)\,div\,\vec{e}=-(\vec{e}\cdot\Delta\vec{e})\,.$$

Второе слагаемое в левой части выразим с помощью (1), учитывая при этом, что в силу $(\vec{e}\cdot\nabla h_0)=0$ верно равенство $(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)=(\vec{e}\cdot\nabla ln\tau)$. Имеем

$$\begin{gathered}\Delta\lambda-(\alpha\tau^2-1)(1-\tau^2)^{-1}(\vec{e}\cdot\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda))-2\tau^2(\alpha-1)(1-\tau^2)^{-2}(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)^2-\\-(\vec{e}\cdot((\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda))-(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)\,div\vec{e}=-(\vec{e}\cdot\Delta\vec{e})\,.\end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим множитель $(\vec{e}\cdot\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda))$ во втором слагаемом левой части этого уравнения. Используя известную формулу для градиента скалярного произведения, имеем

$$\begin{gathered}\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)=(\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda+(\nabla\lambda\cdot\nabla)\,\vec{e}+[\vec{e},rot\nabla\lambda]+[\nabla\lambda,rot\,\vec{e}]=\\=(\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda+(\nabla\lambda\cdot\nabla)\,\vec{e}+[\nabla\lambda,rot\,\vec{e}]\,.\end{gathered}$$

Как уже было замечено выше, производная единичного вектора $\vec{e}$ по любому направлению перпендикулярна $\vec{e}$, и поэтому $(\vec{e}\cdot(\nabla\lambda\cdot\nabla)\vec{e})=0$. Далее, используя (2), получаем, что

$$[\nabla\lambda,rot\,\vec{e}]=[\nabla\lambda,[\vec{e},\nabla\lambda]]=(\nabla\lambda\cdot\nabla\lambda)\vec{e}-(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)\,\nabla\lambda\,,$$

и, следовательно,

$$(\vec{e}\cdot\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda))=(\vec{e}\cdot((\vec{e}\cdot\nabla)\nabla\lambda))+(\nabla\lambda\cdot\nabla\lambda)-(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)^2\,.$$

Поэтому уравнение (3) можно записать в виде

$$\Delta\lambda-(1+(\alpha\tau^2-1)(1-\tau^2)^{-1})(\vec{e}\cdot\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda))+(\vec{b}\cdot\nabla\lambda)=-(\vec{e}\cdot\Delta\vec{e})\,, \tag{4}$$

где

$$\vec{b} = -(\alpha\tau^2 - 1)(1-\tau^2)^{-1}\nabla\lambda + \{((\alpha\tau^2 - 1)(1-\tau^2)^{-1} - 2\tau^2(\alpha - 1)(1-\tau^2)^{-2})(\vec{e}\cdot\nabla\lambda) - div\vec{e}\}\,\vec{e}\,. \qquad (5)$$

Учитывая первое из равенств (1), упростим выражение (5):

$$\vec{b} = -(\alpha\tau^2 - 1)(1-\tau^2)^{-1}\nabla\lambda - 2\tau^2(\alpha - 1)(1-\tau^2)^{-2}(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)\vec{e}\,.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть e_1, e_2, e_3 и b_1, b_2, b_3 – координаты единичного вектора $\vec{e}$ и вектора $\vec{b}$ в этой системе. Для любых $i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3$ верно дифференциальное равенство

$$\frac{\partial^2(e_k^2)}{\partial x_i^2} = 2\left(\frac{\partial e_k}{\partial x_i}\right)^2 + 2e_k\frac{\partial^2 e_k}{\partial x_i^2}\,.$$

Сложим девять таких равенств, соответствующих различным комбинациям $i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3$:

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\nabla e_1)^2 + 2(\nabla e_2)^2 + 2(\nabla e_3)^2 + 2e_1\Delta e_1 + 2e_2\Delta e_2 + 2e_3\Delta e_3$$

или

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\nabla e_1)^2 + 2(\nabla e_2)^2 + 2(\nabla e_3)^2 + 2(\vec{e}\cdot\Delta\vec{e})\,.$$

Учитывая, что e_1, e_2, e_3 – координаты единичного вектора, имеем $\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \Delta\,(1) = 0$. Следовательно:

$$0 = 2(\nabla e_1)^2 + 2(\nabla e_2)^2 + 2(\nabla e_3)^2 + 2(\vec{e}\cdot\Delta\vec{e})\,.$$

Поэтому уравнение (4) может быть записано в виде

$$\Delta\lambda - (1 + (\alpha\tau^2 - 1)(1-\tau^2)^{-1})(\vec{e}\cdot\nabla(\vec{e}\cdot\nabla\lambda)) + (\vec{b}\cdot\nabla\lambda) = (\nabla e_1)^2 + (\nabla e_2)^2 + (\nabla e_3)^2\,.$$

Обозначим $\beta = 1 + (\alpha\tau^2 - 1)(1-\tau^2)^{-1}$ и запишем левую часть через частные производные по координатам x_1, x_2, x_3:

$$(1-\beta e_1^2)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1^2} + (1-\beta e_2^2)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_2^2} + (1-\beta e_3^2)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_3^2} - 2\beta e_1e_2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1\partial x_2} - 2\beta e_1e_3\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_1\partial x_3} - 2\beta e_2e_2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_2\partial x_2} +$$

$$+ b_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial\lambda}{\partial x_2} + b_3\frac{\partial\lambda}{\partial x_3} = (\nabla e_1)^2 + (\nabla e_2)^2 + (\nabla e_3)^2\,. \qquad (6)$$

Для исследования свойств решений уравнения (6) воспользуемся одним из следствий теоремы Хопфа [4, 5], приведенным в [6]. Сформулируем это следствие.

Пусть во всех точках ограниченной области G *коэффициенты* a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} *уравнения*

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+a_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+2a_{13}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}+2a_{23}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}+$$
$$+b_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+b_3\frac{\partial u}{\partial x_3}+cu=f \quad (7)$$

являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A. *Пусть, далее, для любой точки* $M(x_1,x_2,x_3)\in G$ *существуют* $\omega=\omega(x_1,x_2,x_3)>0$ *и* $\delta=\delta(x_1,x_2,x_3)>0$ *такие, что замкнутый шар* $\bar{U}(M,\omega)$ *с центром в точке* M *и радиусом* ω *целиком лежит в области* G *и в нем все коэффициенты уравнения (7) ограничены и выполняется неравенство* $\det A>\delta$. *Тогда в случае* $c=0$, $f\ge 0$, *если решение* $u\in C^2(G)$ *уравнения (7) непрерывно в замкнутой области* $\bar{G}$, *то* $u\le \max\limits_{\partial G} u$ *во всей области* G. *При этом, если* $u\ne const$ *в* G, *то равенство* $u=\max\limits_{\partial G} u$ *возможно только на* ∂G.

Если уравнение (6) используется для поиска решения уравнений Эйлера, следствием которых оно является, нельзя считать, что коэффициенты при производных являются известными функциями координат. Однако если уравнение (6) используется для выяснения свойств его решения в предположении, что такое решение существует, то эти коэффициенты можно считать некоторыми известными функциями координат. Такой подход (считать коэффициенты известными функциями) неоднократно использовался в доказательствах, например, в [2, 7–10]. Рассмотрим уравнение (6) как уравнение вида (7). Т. е. будем считать коэффициенты при производных λ в левой части (6) заданными функциями координат x_1,x_2,x_3.

Поскольку местная скорость газа равна скорости звука при $\tau=1/\sqrt{\alpha}$, то во всей области дозвукового течения без точек торможения выполняется неравенство $0<\tau<1/\sqrt{\alpha}$. Поэтому $0<\beta<1$, и использование критерия Сильвестра показывает, что коэффициенты при вторых производных λ в уравнении (6) являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы. В силу непрерывности параметров течения, величина β отграничена от единицы. Поэтому существует такое число $\delta>0$, что во всех точках течения выполнено условие $\det A=1-\beta>\delta$. Кроме того, величина $1-\tau^2$ отграничена от нуля, и все коэффициенты как при вторых, так и при первых производных λ в уравнении (6) ограничены. Правая часть (6) неотрицательна, что в приведенной выше формулировке следствия теоремы Хопфа соответствует требованию $f\ge 0$. Следовательно, уравнение (6) и его решение удовлетворяют приведенному выше следствию теоремы Хопфа. Поэтому если величина λ не постоянна, то ее максимум (и, следовательно, максимум модуля скорости) достигается на границе и только на границе области течения. Таким образом, дозвуковой принцип максимума доказан для неизоэнтропийного течения без точек торможения.

СЛУЧАЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧЕК ТОРМОЖЕНИЯ

Теперь рассмотрим дозвуковое стационарное безвихревое течение идеального совершенного газа, в котором могут быть точки торможения. (Течение может быть неизоэнтропийным.) Дозвуковой принцип максимума будет доказан, если из предположения о достижении максимума V во внутренней точке ограниченной области течения последует, что величина V одинакова во всех точках этой области.

Допустим, что в некоторой внутренней точке P ограниченной области течения G модуль скорости достигает своего максимального значения V_{max}. Достаточно рассмотреть случай $V_{max} > 0$.

Точка P по предположению является внутренней, то есть существует такая окрестность U точки P, в которой $V > V_{max} / 2$. Эта окрестность является областью (открытым связным множеством), в которой нет точек торможения. Поэтому непустым будет множество $G' \subset G$, определяемое как объединение всех областей, в которых $V > V_{max} / 2$ и содержащих точку P. Это объединение является областью, и в этой области, согласно доказанному выше варианту дозвукового принципа максимума (при отсутствии точек торможения), скорость всюду равна V_{max}.

Допустим, что область G' не совпадает с областью G. Тогда существует точка $P' \in \partial G'$, являющаяся внутренней точкой G. В силу непрерывности скорости $V(P') = V_{max}$. Следовательно, существует окрестность $U' \subset G$ точки P', в которой $V > V_{max} / 2$. Но тогда объединение $G'' = G' \cup U'$ является областью, содержащей точку P, и в которой $V > V_{max} / 2$. Область G'' содержит в себе область G' и не совпадает с ней. Это противоречит определению области G'. Полученное противоречие показывает, что $G' = G$. Итак, доказано следующее утверждение, в котором отсутствует требование изоэнтропийности.

Дозвуковой принцип максимума. *В дозвуковом стационарном безвихревом течении идеального совершенного газа модуль скорости, если не является константой во всей ограниченной области течения G, достигает своего максимального значения на границе и только на границе области G.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известное ранее доказательство дозвукового принципа максимума [1, 2] не позволяло исключить изоэнтропийность из условий этого принципа. Приведено новое доказательство. В этом доказательстве свойство изоэнтропийности не используется. То есть требование изоэнтропийности является несущественным для справедливости дозвукового принципа максимума. Таким образом, если модуль скорости (дозвукового стационарного безвихревого течения идеального совершенного газа) не постоянен всюду, то его максимум достигается на границе и только на границе рассматриваемой области течения. Полученный результат расширяет область применения дозвукового принципа максимума для качественного анализа течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shiffman M. On the Existence of Subsonic Flows of a Compressible Fluid. J. Ration. And Analysis. 1952, vol. 1, pp. 605–652.

2. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.

3. Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. 256 с.

4. Hopf E. Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927, vol. 19, pp. 147–152.

5. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 256 с.

6. Беспорточный А.И., Бурмистров А.Н., Сизых Г.Б. Вариант теоремы Хопфа // ТРУДЫ МФТИ. 2016. Т. 8, N 1. С. 115–122.

7. Gilbarg D., Shiffman M. On Bodies Achieving Extreme Value of the Critical Mach Number. I. J. Ration. And Analysis. 1954, vol. 3, no. 2, pp. 209–230.

8. Бурмистров А.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б. Принцип максимума для решения уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами // ТРУДЫ МФТИ. 2014. Т. 6, № 4. С. 97–102.

9. Сизых Г.Б. Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // ТРУДЫ МФТИ. 2015. Т. 7, № 2 (26). С. 108–112.

10. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, N 5. С. 53–56.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Сизых Григорий Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, o1o2o3@yandex.ru.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR SUBSONIC FLOW WITH VARIABLE ENTROPY

Grigory B. Sizykh[1]
[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

ABSTRACT

Maximum principle for subsonic flow is fair for stationary irrotational subsonic gas flows. According to this principle, if the value of the velocity is not constant everywhere, then its maximum is achieved on the boundary and only on the boundary of the considered domain. This property is used when designing form of an aircraft with a maximum critical value of the Mach number: it is believed that if the local Mach number is less than unit in the incoming flow and on the body surface, then the Mach number is less then unit in all points of flow. The known proof of maximum principle for subsonic flow is based on the assumption that in the whole considered area of the flow the pressure is a function of density. For the ideal and perfect gas (the role of diffusion is negligible, and the Mendeleev-Clapeyron law is fulfilled), the pressure is a function of density if entropy is constant in the entire considered area of the flow. Shows an example of a stationary subsonic irrotational flow, in which the entropy has different values on different stream lines, and the pressure is not a function of density. The application of the maximum principle for subsonic flow with respect to such a flow would be unreasonable. This example shows the relevance of the question about the place of the points of maximum value of the velocity, if the entropy is not a constant. To clarify the regularities of the location of these points, was performed the analysis of the complete Euler equations (without any simplifying assumptions) in 3-D case. The new proof of the maximum principle for subsonic flow was proposed. This proof does not rely on the assumption that the pressure is a function of density. Thus, it is shown that the maximum principle for subsonic flow is true for stationary subsonic irrotational flows of ideal perfect gas with variable entropy.

Key words: Euler equations, subsonic maximum principle, irrotational flow, flow with variable entropy.

REFERENCES

1. Shiffman M. On the Existence of Subsonic Flows of a Compressible Fluid. J. Ration. And Analysis. 1952, vol. 1, pp. 605–652.

2. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. Surveys in Applied Mathematics. Vol. 3. New York, John Wiley & Sons Inc. 1958. 164 p.

3. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge University Press. 1895. 604 p.

4. Hopf E. Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927, vol. 19, pp. 147–152.

5. Miranda C. Partial Differential Equations of Elliptic Type. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag. 1970. 370 p.

6. Besportochnyy A.I., Burmistrov A.N., Sizykh G.B. *Variant teoremy Hopfa* [Version of the Hopf Theorem]. *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT], 2016, vol. 8, no. 1, pp. 115–122. (in Russian)

7. Gilbarg D., Shiffman M. On Bodies Achieving Extreme Value of the Critical Mach Number. I.J. Ration. And Analysis. 1954, vol. 3, no. 2, pp. 209–230.

8. Burmistrov A.N., **Kovalev V.P.**, **Sizykh G.B.** *Printsip maksimuma dlia resheniia uravneniia ellipticheskogo tipa neogranichennymi koeffitsientami* [Maximum Principle for the Solution of an Elliptic Equation With Unbounded Coefficients]. *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT], 2014, vol. 6, no. 4, pp. 97–102. (in Russian)

9. Sizykh G.B. *Priznak nalichiia tochki tormozheniia v ploskom bezvihrevom techenii ideal-nogo gaza* [Sign of the Presence of Braking Points in a Planar Irrotational Flow of an Ideal Gas]. *Trudy MFTI* [Proceedings of MIPT], 2015, vol. 7, no. 2, pp. 108–112. (in Russian)

10. Golubkin V.N., Sizykh G.B. Maximum Principle for Bernoulli Function. TsAGI Science Journal. 2015, vol. 46, issue 5, pp. 485–490.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Grigory B. Sizykh, PhD, Associate Professor of Moscow Institute of Physics and Technology, o1o2o3@yandex.ru.