

УДК 629.7.054.07

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТОЯЧЕЙ ВОЛНЫ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРНОГО ГИРОСКОПА

О.С. ХАЛЮТИНА<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ООО «Экспериментальная мастерская НаукаСофт», г. Москва, Россия

Традиционно задача автономной навигации решается путем счисления пилотажно-навигационных параметров полета летательного аппарата. С ростом требований к точности определения ПНПП совершенствуются и датчики первичной навигационной информации: гироскопы и акселерометры. В настоящее время разрабатываются и внедряются в практику гироскопы нового типа, так называемые твердотельные волновые гироскопы. Работа посвящена проблеме повышения точности измерений угловых скоростей полусферическим резонаторным гироскопом. Снижение точностных характеристик ПРГ вызвано наличием дефектов в распределении массы по объему его конструкции. Выполнен синтез управления для системы оптимального гашения искажений параметров стоячей волны, обусловленных влиянием массового дефекта резонатора. В работе ставилась задача исследовать и аналитически компенсировать влияние дефекта на параметры стоячей волны (ее амплитуды и частоты). Исследования выполнялись методом математического моделирования в среде Simulation пакета SolidWorks для случая, когда характеристики чувствительного элемента ПРГ соответствовали технологическим чертежам конкретного типа резонатора. В качестве метода синтеза был выбран метод обратных задач динамики. Результаты исследований представлены в виде графиков амплитудно-частотных характеристик выходного сигнала резонатора. Моделирование выполнялось для случаев: идеального распределения массы; наличия дефекта массы; наличия дефекта массы показаны с применением синтезированного управляющего воздействия. Оценка эффективности предлагаемых алгоритмов управления определена по результатам моделирования выходного сигнала резонатора при условии идеального конструктивного его исполнения и при наличии в нем массового дефекта. При этом полагается, что сигналы возбуждения стоячих волн в том и другом случаях имеют одинаковые амплитуды, и частоты. В этом случае выходной сигнал при наличии компенсирующего воздействия должен в наибольшей степени совпадать с идеальным сигналом.

**Ключевые слова:** полусферический резонаторный гироскоп, точность измерения, оптимальное управление, концепция обратных задач динамики.

Традиционно задача автономной навигации решается путем счисления пилотажно-навигационных параметров полета (ПНПП) летательного аппарата (ЛА). С ростом требований к точности определения ПНПП совершенствуются и датчики первичной навигационной информации: гироскопы и акселерометры. В настоящее время разрабатываются и внедряются в практику гироскопы нового типа, так называемые твердотельные волновые гироскопы (ТВГ) [6]. Принцип действия ТВГ основан на свойстве стоячей волны сохранять свое положение в инерциальном пространстве при повороте основания гироскопа.

Обычно чувствительный элемент ТВГ изготавливается в виде полусферического резонаторного гироскопа (ПРГ). В случае если гироскоп не имеет «массовых» погрешностей, т. е. распределение массы по сфере не имеет отклонений от заданного, то при входном гармоническом сигнале выходной сигнал также имеет правильную гармоническую форму. В работе ставилась задача: исследовать и аналитически компенсировать влияние дефекта на параметры стоячей волны (ее амплитуды и частоты). Исследования выполнялись методом математического моделирования в среде Simulation пакета SolidWorks для случая, когда характеристики чувствительного элемента ПРГ соответствовали технологическим чертежам конкретного типа резонатора.

На рис. 1 представлен график колебаний резонатора при воздействии на него гармонического сигнала заданной амплитуды и периода воздействия при условии, что массовые дефекты отсутствуют.

Дальнейшие исследования связаны с анализом влияния массовых дефектов на величину и форму выходного сигнала, и при их наличии необходимо синтезировать такое управление,

которое устраняет эти возмущения. Синтез управления основан на применении концепции обратных задач динамики [4], [8].

Расчеты проводились для дефектов, массы которых равны  $9 \cdot 10^{-4}$  и  $72 \cdot 10^{-4}$  г, что в два и в шестнадцать раз соответственно превышает максимальный допустимый дисбаланс масс, известный из технологических чертежей. Рассмотрены варианты расположения дефекта под углами  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  и  $60^\circ$  относительно вертикальной оси рабочей плоскости (рис. 2). Максимальный размер сетки, используемой для исследования, был установлен равным 0,6 мм.

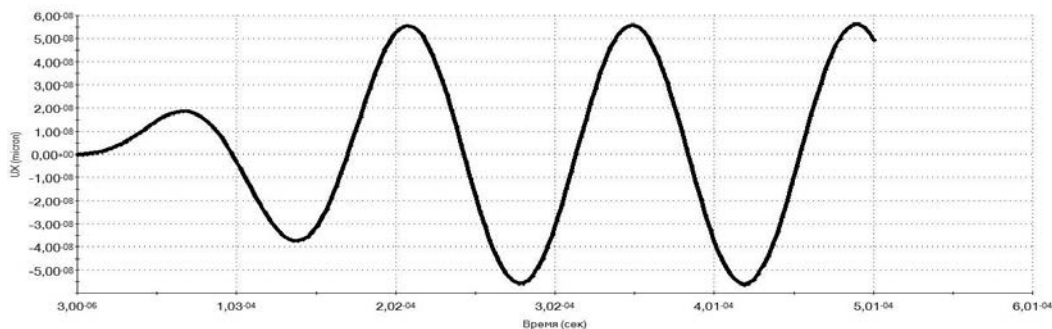


Рис. 1. График колебаний резонатора при воздействии на него гармонического сигнала  
Fig. 1. Graph oscillations of the resonator when subjected to a harmonic signal

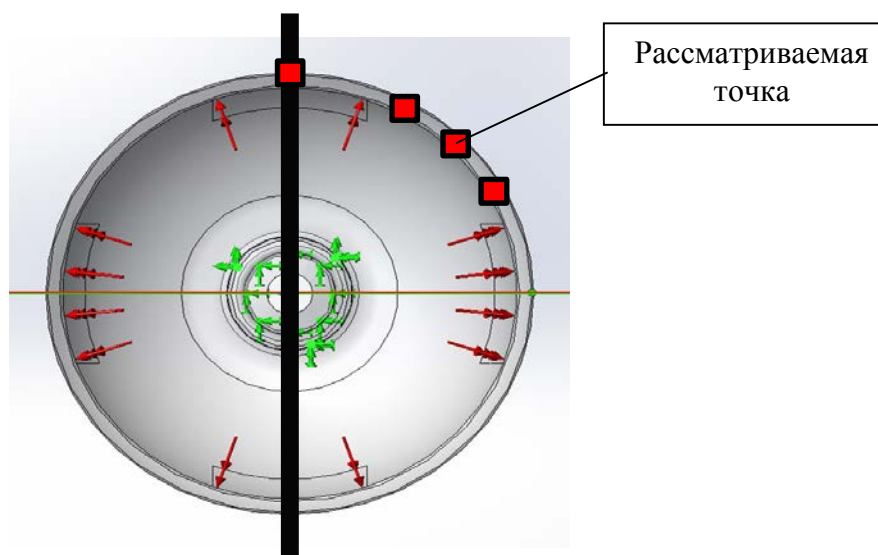


Рис. 2. Варианты расположения дефекта  
Fig. 2. Possible defect location

На рис. 3 приведена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) идеального резонатора для точки, расположенной на ободе в области приложения силы, причем АЧХ рассматривается в проекции на вертикальную ось рабочей плоскости (рис. 3).

На рис. 4 приведена АЧХ резонатора для той же точки, но с массовым дефектом  $9 \cdot 10^{-4}$  г, расположенным под углами  $45^\circ$  относительно вертикальной оси рабочей плоскости.

Анализ результатов моделирования показывает, что дефект по массе оказывает существенное влияние как на амплитуду, так и на частоту выходного сигнала. С целью удаления влияния неуравновешенной массы обычно используется так называемая балансировка [1, 5, 6, 7]. Методы балансировки обычно делят на две группы. К первой относятся способы удаления строго определенных масс в некоторых отдельных точках, которые являются технически сложными. Это делают, например, с помощью лазера [1]. Ко второй же группе относится поверхностная обработка материала, например, химическое или ионное травление [5]. Есть и другие методы балансировки, основанные на иных физических принципах, к которым и относится ме-

тод, базирующийся на использовании дополнительных внешних воздействий на резонатор. Величина внешних корректирующих сил рассчитывается на основе математических моделей, описывающих поведение резонатора. Синтез управления или дополнительного внешнего воздействия может выполняться с использованием любых известных методов оптимального управления. В статье предложено определять управление согласно методу обратных задач динамики [4, 8], который позволяет непосредственно учитывать функциональные особенности в законе управления.

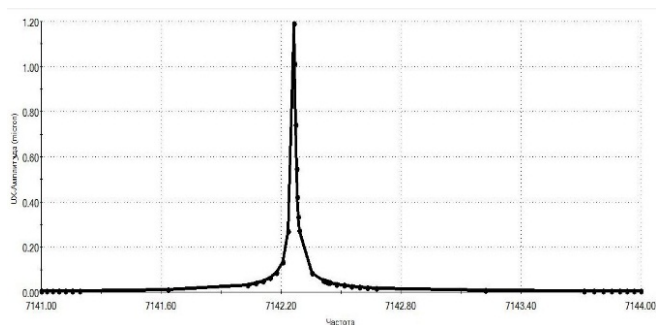


Рис. 3. АЧХ идеального резонатора  
Fig. 3. AFC of the ideal resonator

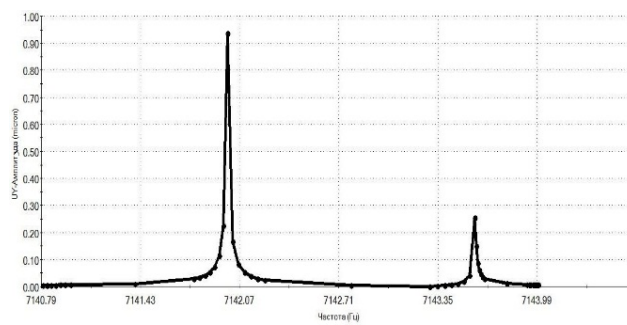


Рис. 4. АЧХ резонатора с массовым дефектом  
Fig. 4. AFC of resonator with a mass defect

Существуют физические модели для резонаторов в виде полусферы, замкнутого кольца, представляющие собой совокупность алгебраических, дифференциальных обыкновенных и частных производных уравнений. Однако такие модели не позволяют в полной мере использовать методы синтеза оптимального управления для достижения поставленной цели. В статье предлагается использовать редуцированные модели, отражающие основную физическую сущность резонатора.

Анализ результатов моделирования показывает, что модель резонатора представляет собой линейное звено второго порядка с малым коэффициентом затухания. Для определения параметров этого звена можно воспользоваться известными соотношениями [2, 3]:

$$\frac{Q}{\omega\xi} = 1,$$

где  $\omega$  – собственная частота колебаний,  $\xi$  – коэффициент затухания,  $Q$  – добротность резонатора.

Коэффициент усиления определяется как отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала, который задается исследователем. Запишем редуцированную модель резонатора в виде дифференциального уравнения второго порядка

$$T_0^2 \ddot{w} + 2T_0\xi_0 \dot{w} + w = K_0 F_{ex}.$$

На рис. 5 изображена структурная схема резонатора и системы возбуждения колебаний в нем. На схеме приняты следующие обозначения: блок 1 (не обозначен) соответствует математической модели гироскопа с учетом допущений, блок 2 представляет собой модуль электромагнитных возбуждений резонатора,  $w_{вых}$  – выходной сигнал стоячей волны,  $F_{ex}$  – сила, возбуждающая и поддерживающая колебания.

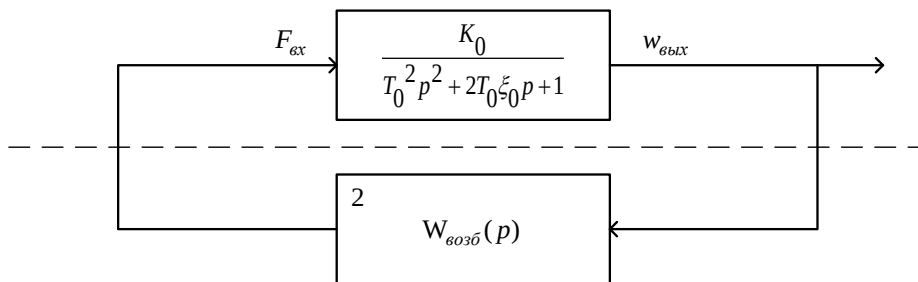


Рис. 5. Структурная схема резонатора и системы возбуждения колебаний в нем  
Fig. 5. Block diagram of the resonator and the oscillation excitation system in it

При массовых дефектах в амплитудно-частотной характеристике резонатора наблюдается наличие дополнительных колебаний или в частотной области резонансных пиков, которые меньше по амплитуде, чем основной. На рис. 6 представлена структурная схема резонатора с одним массовым дефектом. На схеме блок 3 отражает возникновение дополнительного колебательного звена со своей, но большей резонансной частотой, своими коэффициентом затухания и коэффициентом передачи. Следует отметить, что с ростом частоты дополнительных колебаний их амплитуды уменьшаются.

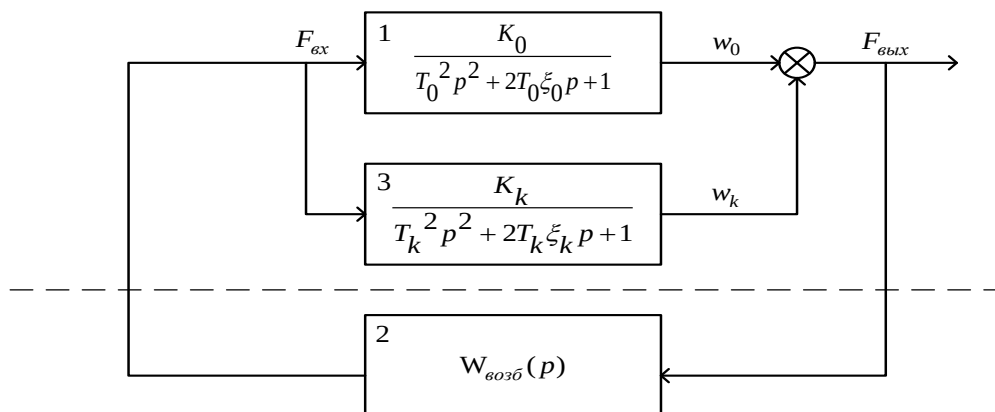


Рис. 6. Структурная схема резонатора с одним массовым дефектом  
Fig. 6. Block diagram of the resonator with a single mass defect

В общем случае задача управления параметрами стоячей волны сводится к тому, чтобы устранить помехи, создаваемые массовыми дефектами, т. е. необходимо (рис. 7) добиться выполнения следующего условия [4]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w_0 + \Delta w_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w_0 + (w_k + w_u)) = w_0, \quad (1)$$

где  $w_0$  – основной выходной сигнал (стоячей волны) резонатора,  $w_u$  – слагаемое, обусловленное действием управляющего воздействия (блок 4), которое и подлежит определению. При этом возмущение  $w_k$  определяется выражением

$$w_k = A_k \sin(\omega t) \sin(k\varphi), \quad (2)$$

где  $\sin(k\varphi)$  отражает изменение амплитуды в зависимости от окружного угла (рис. 2), а  $\sin(\omega t)$  – изменение амплитуды во времени в фиксированной точке резонатора (рис. 2).

В общем случае любое дополнительное воздействие на резонатор оказывает влияние на весь спектр частот. В предположении, что резонатор удовлетворяет принципу суперпозиции условие (1) эквивалентно условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w_k + w_u) = 0, \quad (3)$$

где символ  $\infty$  в условиях рассматриваемой задачи интерпретируется как время, равное времени переходного процесса.

Для синтеза оптимального управления  $F_u$  воспользуемся концепцией обратных задач динамики [8].

Возмущения, влияние которых на работу резонатора необходимо уменьшить, также описываются дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$T_k^2 \ddot{w}_k + 2T_k \xi_k \dot{w}_k + w_k = K_k F_u. \quad (4)$$

В соответствии с [8] потребуем, чтобы ошибка (3) стремилась к нулю в соответствии с решением однородного дифференциального уравнения:

$$\ddot{w}_k + \lambda_1 \dot{w}_k + \lambda_0 w_k = 0, \quad (5)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1 > 0$  – условие устойчивости решения уравнения.

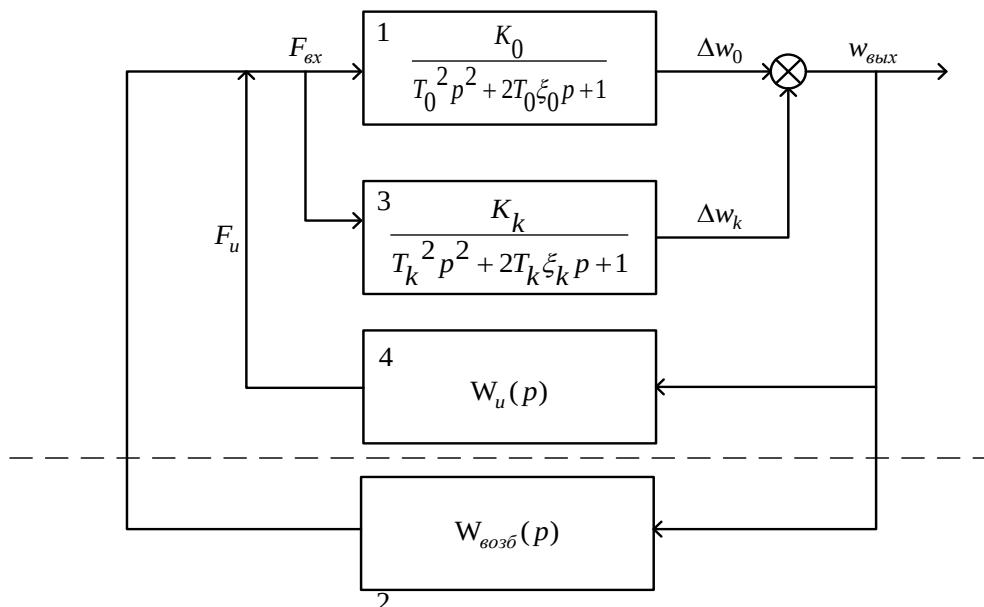


Рис. 7. Условие устранения влияния массового дефекта  
Fig. 7. Conditions to eliminate the influence of mass defect

Из уравнений (5) и (4) определим выражение для управляющей силы:

$$F_u = \frac{-((2T_k \xi_k \dot{w}_k + 2T_k \xi_k w_k) + (\lambda_1 \dot{w}_k + \lambda_0 w_k) T_k^2)}{K_k}. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой закон управления, записанный в параметрическом виде относительно неизвестных  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , который, будучи подставленным в уравнение регулятора (4), обеспечивает системе изменение ошибки по закону, определяемому решением однородного дифференциального уравнения 2-го порядка (5).

При подстановке (6) в (4) получаем математическую модель замкнутой системы управления. Для анализа свойств замкнутой системы управления запишем ее передаточную функцию, представляющую собой связь дополнительной гармоники  $w_k$  и гармоники, порожденной действием управления. Из (4) и (6) следует, что

$$W(p) = 1. \quad (7)$$

Из (7) следует, что выходной сигнал системы управления точно соответствует параметрам «дефектной» гармоники, что означает выполнение условия (3).

Следующий этап синтеза управления заключается в определении неизвестных параметров  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ . Величины этих параметров будем определять из минимума функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left( (w_k + w_u)^2 + q F_u^2 \right) dt, \quad (8)$$

где  $q$  – коэффициент, учитывающий «штраф» на величину управления.

Заметим, что функционал (8) представляет собой скалярную функцию двух переменных. Тогда из необходимых условий минимума скалярной функции  $J(\lambda_1, \lambda_2)$  двух переменных определяем неизвестные параметры как решение системы вида

$$\frac{\partial J(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial J(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Для упрощения их поиска воспользуемся инженерным подходом. Будем считать, что коэффициент затухания  $\xi \geq 1$ , тогда систему управления, представленной в операторной форме, можно записать в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев:

$$\frac{K_u}{p^2 + \lambda_1 p + \lambda_0} = \frac{K_u}{(p + \beta_1)(p + \beta_2)},$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{T_{u1}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{T_{u2}}.$$

Здесь  $T_{u1}, T_{u2}$  – постоянные времени соответствующих апериодических звеньев.

Выберем время регулирования системы как

$$t_u \approx 3 \max(T_{u1}, T_{u2}) = 1 \text{ с.}$$

Тогда для определенности полагаем, что постоянная времени  $T_{u1}$  является наибольшей.

Следовательно,  $T_{u1} = \frac{1}{3}$ .

Величину постоянной времени второго звена выберем из условия, что его рабочий диапазон находится левее по оси частот хотя бы на одну декаду, чем первое звено, т. к. в этом случае оно не оказывает существенного влияния на величину времени регулирования. Тогда можно записать, что

$$T_{u2} = \frac{1}{9}.$$

Определим неизвестные параметры закона управления:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(-\beta_1 - \beta_2) = \beta_1 + \beta_2 = 12; \\ \lambda_0 &= (-\beta_1)(-\beta_2) = \beta_1\beta_2 = 27.\end{aligned}\tag{9}$$

Помимо коэффициентов  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  для определения управляющей силы, необходимо определить и  $w_u$ . Тогда, исходя из (1), (6) и (9) и принимая в (1)  $\sin(\omega t) = 1$ , получаем

$$\ddot{w}_u + 12\dot{w}_u + 27w_u = A_k(\omega^2 \sin(\omega t) - 12\omega \cos(\omega t) - 27 \sin(\omega t)).$$

Решая данное уравнение с начальными условиями:  $w_u(0) = 0$ ,  $\dot{w}_u(0) = 0$  получаем

$$w_u = \frac{1}{6}A_k\omega(e^{-9t} - e^{-6t}) - A_k \sin(\omega t).\tag{10}$$

Подставляя (1), (9) и (10) в (6), получаем закон управления:

$$\begin{aligned}F_u &= \frac{A_k}{K_u} \left( \omega \left( \frac{1}{6} + 2T_u\xi_u \right) (e^{-9t} - e^{-6t}) + \frac{1}{2}T_u^2\omega(12e^{-6t} - 27e^{-9t}) + \right. \\ &\quad \left. + (A_kT_u^2\omega^2 - 1)\sin(\omega t) + 2\omega T_u\xi_u \cos(\omega t) \right).\end{aligned}\tag{11}$$

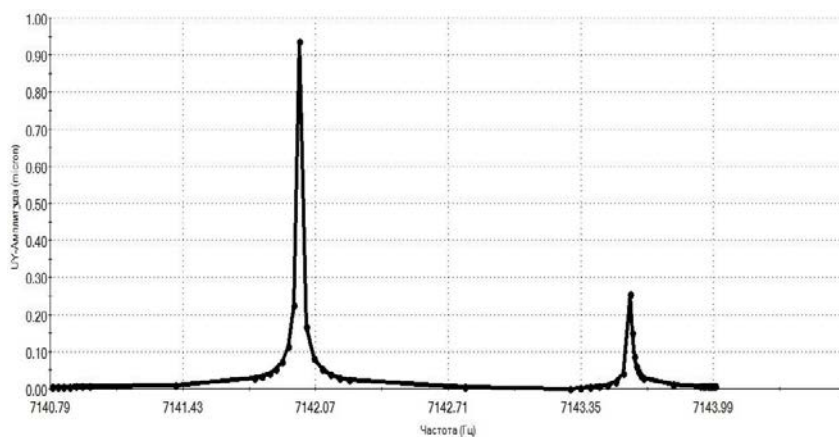
Здесь через  $T_u$  и  $\xi_u$  обозначены параметры управляющего звена.

В итоге, не учитывая в (11) малые слагаемые и слагаемые, не влияющие на установившийся режим, получаем

$$F_u = -\frac{A_k}{K_u} \sin(\omega t).\tag{12}$$

Оценку эффективности предлагаемых алгоритмов управления будем определять по результатам моделирования выходного сигнала резонатора при условии идеального конст-

руктивного его исполнения и при наличии в нем массового дефекта. При этом полагается, что сигналы возбуждения стоячих волн в том и другом случаях имеют одинаковые и амплитуды, и частоты. В этом случае выходной сигнал при наличии компенсирующего воздействия должен в наибольшей степени совпадать с идеальным сигналом. На рис. 8 представлен спектр выходного сигнала при наличии массового дефекта, из которого следует, что наличие дефекта побуждает возникновение второй резонансной частоты, а следовательно, и искажение выходного сигнала.



**Рис. 8.** Спектр выходного сигнала при наличии массового дефекта  
**Fig. 8.** The spectrum of the output signal in the presence of mass defect

Промышленностью выпускается большое число типоразмеров ИИБ, которые значительно различаются как по точности, так и по стоимости. Например, разброс уходов акселерометров составляет около 3 порядков, а разброс уходов гироскопов – около 6 порядков.

Совместное использование аппаратуры БИНС и СРНС в предлагаемом комплексе позволит исключить недостатки каждой из систем в отдельности и объединить их достоинства. Так, ИНС имеет весьма малую шумовую ошибку определения таких параметров, как ускорение и угловая скорость объекта по трем осям, однако систематическая погрешность со временем нарастает. С другой стороны, АП СРНС имеет большую шумовую погрешность в определении координат и скорости движения ЛА, но не имеет нарастания во времени погрешности, поскольку нет интегрирования во времени. Использование периодической коррекции результатов измерений ИНС данными от АП СРНС позволит как добиться уменьшения шумовой ошибки, присущей СРНС, так и компенсировать уходы параметров, обусловленные ИНС. В итоге предлагаемый комплекс позволит обеспечить непрерывное измерение и документирование таких параметров полета ВС, как скорость, координаты, угловое положение и скорость изменения положения строительных осей в пространстве, а также линейные ускорения ЛА в трех направлениях, соответствующих ориентации в пространстве строительных осей объекта.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белкин А.А. Разработка технологии и оборудования для балансировки полусферического резонатора волнового твердотельного гироскопа лазерным излучением: дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2000.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. Журавлев В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.
4. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.



5. Лунин Б.С. Физико-химические основы разработки полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов. М.: Изд-во МАИ, 2005. 224 с.
6. Лунин Б.С., Матвеев В.А., Басараб М.А. Волновой твердотельный гироскоп. Теория и технология. М.: Радиотехника, 2014. 176 с.
7. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 168 с.
8. Харьков В.П. Структурно-параметрический синтез управления динамическими системами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Халюткина Ольга Сергеевна**, младший научный сотрудник лаборатории навигации и управления научно-конструкторского отдела ООО «Экспериментальная мастерская НаукаСофт», okhalutina@xlab-ns.ru.

## OPTIMIZATION OF HEMISPHERICAL RESONATOR GYROSCOPE STANDING WAVE PARAMETERS

**Olga S. Khalyutina<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>LLC "Experimental laboratory NaukaSoft", Moscow, Russia

## ABSTRACT

Traditionally, the problem of autonomous navigation is solved by dead reckoning navigation flight parameters (NFP) of the aircraft (AC). With increasing requirements to accuracy of definition NFP improved the sensors of the primary navigation information: gyroscopes and accelerometers. the gyroscopes of a new type, the so-called solid-state wave gyroscopes (SSVG) are currently developed and put into practice. The work deals with the problem of increasing the accuracy of measurements of angular velocity of the hemispherical resonator gyroscope (HRG). The reduction in the accuracy characteristics of HRG is caused by the presence of defects in the distribution of mass in the volume of its design. The synthesis of control system for optimal damping of the distortion parameters of the standing wave due to the influence of the mass defect resonator is adapted. The research challenge was: to examine and analytically offset the impact of the standing wave (amplitude and frequency) parameters defect. Research was performed by mathematical modeling in the environment of SolidWorks Simulation for the case when the characteristics of the sensitive element of the HRG met the technological drawings of a particular type of resonator. The method of the inverse dynamics was chosen for synthesis. The research results are presented in graphs the amplitude-frequency characteristics (AFC) of the resonator output signal. Simulation was performed for the cases: the perfect distribution of weight; the presence of the mass defect; the presence of the mass defects are shown using the synthesized control action. Evaluating the effectiveness of the proposed control algorithm is determined by the results of the resonator output signal simulation provided the perfect constructive and its performance in the presence of a mass defect in it. It is assumed that the excitation signals are standing waves in the two cases are identical in both amplitude and frequency. In this case, if the output signal of the compensating effects should coincide with the ideal signal at the most.

**Key words:** hemispherical resonator gyroscope (HRG), measurement accuracy, optimal control, the concept of inverse problems of dynamics.

## REFERENCES

1. Belkin A.A. *Razrabotka tehnologii i oborudovaniya dlja balansirovki polusfericheskogo rezonatora volnovogo tverdotel'nogo giroskopa lazernym izlucheniem* [Development of technology and equipment for balancing a hemispherical resonator gyro wave solid-state laser]. *Diss. kand. tehn. nauk*. [Dissertation of the PhD], 2000. (in Russian)
2. Zhuravlev V.F., Klimov D.M. *Prikladnye metody v teorii kolebanij* [Applied methods in the theory of vibrations] *Nauka* [Science], 1988, 326 p. (in Russian)

3. **Zhuravljov V.F., Linch D.D.** *Elektricheskaja model' volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Electric model hemispherical resonator gyro]. *Izv. RAN. MTT*, 1995, vol. 5, p. 12. (in Russian)
4. **Krut'ko P.D.** *Obratnye zadachi dinamiki upravljaemyh sistem. Linejnye modeli* [Inverse problems of the dynamics of control systems. Linear models]. *Nauka* [Science], 1987, 304 p. (in Russian)
5. **Lunin B.S.** *Fiziko-himicheskie osnovy razrabotki polusfericheskikh rezonatorov volnovyh tverdotel'nyh giroskopov* [Physical and chemical bases of working out of hemispherical resonators of wave solid-state gyroscopes]. *Izd-vo MAI* [Publishing house of MAI], 2005, 224 p. (in Russian)
6. **Lunin B.S., Matveev V.A., Basarab M.A.** *Volnovoj tverdotel'nyj giroskop. Teorija i tehnologija* [Hemispherical resonator gyro. Theory and Technology]. *Radiotekhnika* [Radio engineering], 2014, 176 p. (in Russian)
7. **Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alehin A.V.** *Proektirovanie volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Designing a hemispherical resonator gyro]. *MGTU im. N.Je. Bauman* [MSTU named after N.E. Bauman], 1997, 168 p. (in Russian)
8. **Khar'kov V.P.** *Strukturno-parametricheskij sintez upravlenija dinamicheskimi sistemami* [Structurally-parametrical synthesis of dynamic systems management]. *Izv. AN SSSR. Tehn. Kibernetika* [News of USSR Academy of Sciences, Tech. cybernetics], 1991, vol. 2. (in Russian)

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Khalyutina Olga Sergeevna**, Junior Research Fellow, Research Associate Laboratory of Navigation and Management Science and Engineering Department of LLC "Experimental Laboratory NaukaSoft", [okhalutina@xlab-ns.ru](mailto:okhalutina@xlab-ns.ru).