

УДК 629.7.08

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОПТИМИЗАЦИИ РАБОТЫ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМАЛЬНОГО РАСХОДА ТОПЛИВА НА ЭТАПЕ СНИЖЕНИЯ ВОЗДУШНОГО СУДНА

Ю.М. ЧИНЮЧИН¹, В.А. БЕЛКИН¹

¹Московский государственный технический университет гражданской авиации,
г. Москва, Россия

Математически доказывается состоятельность метода потенциально возможного повышения топливной эффективности гражданских воздушных судов (ВС), основанного на оптимизации процесса летно-технической эксплуатации ВС. Математический аппарат и построенная математическая модель пространственного движения ВС позволяют анализировать поведение ВС на предпосадочном отрезке полета и выстраивать оптимальную траекторию полета по критерию минимального расхода топлива с закрепленным временем.

Для эффективного решения задачи осуществляется выбор и реализация оптимальных траекторий полета. Предлагается алгоритм решения задачи оптимального управления полетом гражданского ВС с целью наиболее точной реализации выбранной программной траектории в условиях ограниченного расписанием времени. Оптимизация указанного процесса проведена при помощи решения двухточечной краевой канонической системы, основанной на принципе максимума Понтрягина.

Представлены необходимые для постановки задачи исходные данные и условия. Для упрощения требуемых вычислений построена математическая модель и дано ее эквивалентное представление, при этом задачи управления по каналам тяги и угла атаки объединены в виде функции управления тягой. Далее составлена в математическом виде краевая задача и представлен аналитический аппарат ее решения. Построены оптимальные траектории снижения ВС, отражающие характер изменения угла атаки и тяги.

Перспективность данного приема подтверждена экономической состоятельностью и эффективностью данного метода, в частности, проведено сравнение суммарного расхода топлива ВС на полученной оптимальной траектории снижения с классической траекторией, на которой присутствуют прямолинейные участки, что позволило дополнительно подтвердить вывод об экономической целесообразности и эффективности метода постоянного снижения ВС при производстве полетов.

Ключевые слова: топливная эффективность, оптимизация, постоянное снижение, принцип максимума Понтрягина.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были рассмотрены вопросы, касающиеся актуальности и принципиальной возможности внедрения системы постоянного снижения (CDO) в процессе полета воздушного судна.

Физические процессы, имеющие место в технике, как правило, управляемы, т. е. могут осуществляться различными способами в зависимости от воли человека. В связи с этим возникает вопрос о нахождении наилучшего в том или ином смысле или, как говорят, оптимального управления процессом. Речь может идти, например, об оптимальности в смысле быстродействия, т. е. о достижении цели процесса за кратчайшее время, о достижении этой цели с минимальной затратой энергии, достижении цели за заданное время и т. п. Математически сформулированные, эти вопросы являются задачами вариационного исчисления, которое и обязано им своим возникновением [2, 6–10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управляющие переменные:

$$P(t); \alpha_n(t). \quad (1)$$

Начальные условия:

$$t_0 = 0, V(0) = V_0, \theta(0) = \theta_0, h(0) = y(0) = h_0, x_0 = 0, m(0) = M_0. \quad (2)$$

Конечные (граничные) условия:

$$t_1 - \text{задана}, \theta(t_1) = \theta_1, y(t_1) = y_1, x(t_1) = x_1, \\ \theta(t_1), V(t_1), m(t_1) - \text{свободные}. \quad (3)$$

Показатель качества:

$$J = \int_0^{t_1} \mu_{\text{сек}}[P(t)] dt. \quad (4)$$

Критерий оптимальности:

$$J^* = \min_{t_1, P(t)} J. \quad (5)$$

Формулировка задачи оптимизации:

Среди всех допустимых управляющих функций $P(t)$, $\alpha_n(t)$ найти такие, при которых ВС выводится из заданного начального состояния $V_0, \theta_0, h_0, M_0, x_0 = 0$ в частично заданное конечное состояние t_1, θ_1, y_1, x_1 и величина

$$J = \int_0^{t_1} \mu(P(t)) dt \quad (6)$$

принимает минимальное значение (минимальный расход топлива)

$$J^* = \min_{t_1, P(t)} J.$$

2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ДВУХКАНАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Запишем систему уравнений, описывающую движение самолета в атмосфере, как

$$m \frac{dV}{dt} = P \cos(\alpha + \varphi_p) - Q - mg \sin \theta; \quad (7)$$

$$mV \frac{d\theta}{dt} = P \sin(\alpha + \varphi_p) + Y - mg \cos \theta; \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \theta; \quad \frac{dx}{dt} = V \cos \theta; \quad \frac{dm}{dt} = -\mu(t).$$

Запишем функцию управления в следующем виде:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} P(t) \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Далее функцию управления необходимо поместить в функционал управления

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mu(P(t)) dt \rightarrow \min,$$

где t_0 принимает значение 0, а последующие значения определяются по гамильтониану Н:

$$H = (-1) \cdot \mu(P(t)) + \lambda_v \cdot \left(\frac{P(t)}{m} - \frac{mg \sin \theta}{m} - \frac{Q(\alpha_n, V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}, x, y, \beta)}{m} \right) + \\ + \lambda_\theta \cdot \left(\frac{P(t)}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V} + \frac{Y(\alpha_n, V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}, x, y, \beta)}{mV} \right) + \lambda_x V \cos \theta + \lambda_y V \sin \theta - \lambda_m \cdot \mu(P(t)). \quad (10)$$

Для упрощения вычислений перейдем к эквивалентной модели представления управления [2, 3].

3. ЭКВИВАЛЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Задачу управления по двум каналам – тяги и угла атаки мы сводим к эквивалентной и убираем угол атаки в функцию управления тягой, последняя будет меняться и по величине и по вектору, а следовательно, функция управления примет следующий вид [4, 5]:

$$P(t) = \begin{bmatrix} P(t)e_v \\ P(t)e_{nv} \end{bmatrix} \leftarrow \bar{u}, \quad (11)$$

где вектор $\bar{e} \rightarrow \begin{pmatrix} e_v \\ e_{nv} \end{pmatrix}$.

Тяга ТРД меняется по закону

$$P = P(t) = \mu \cdot w(x; y) \rightarrow \mu = \frac{P(t)}{w(x; y)}. \quad (12)$$

Величина $w(x, y)$ показывает конечную скорость истечения газа из сопла ТРД, при этом P_{max} , P_{min} – рабочие режимы тяги, тогда

$$P(t) = \delta(t)(P_{max} - P_{min}) + P_{min}, \quad (13)$$

где $\delta(t)$ принимает значение 0 или 1.

Запишем уравнения движения для случая эквивалентной математической модели, когда моделируется тяга по вектору и величине:

$$m \frac{dV}{dt} = P(t) \cdot e_v - mg \sin \theta - Q; \quad (14)$$

$$m \frac{d\theta}{dt} = P(t)e_n - mg \cos \theta + Y; \quad (15)$$

$$Q = C_x(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot V_a^2 \cdot S \cos(\theta - \beta) + C_y(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \sin(\theta - \beta) \cdot V_a^2 = \\ = C_x(\alpha_n) \cdot \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \cdot V_a^2(V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}) \cos(\theta - \beta) + \\ + C_y(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \cdot \sin(\theta - \beta) \cdot V_a^2(V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}); \quad (16)$$

$$Y = -C_x(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot V_a^2 \cdot \sin(\theta - \beta) + C_y(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \cos(\theta - \beta) \cdot V_a^2 = \\ -C_x(\alpha_n) \cdot \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \cdot V_a^2(V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}) \sin(\theta - \beta) + \\ + C_y(\alpha_n) \frac{\rho(x, y)}{2} \cdot S \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot V_a^2(V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}), \quad (17)$$

при этом $V_a = (V \cos \theta - V_{air} \cdot \cos \gamma_{air}; V \sin \theta - V_{air} \cdot \sin \gamma_{air})$;

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta; \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \theta; \quad \frac{dm}{dt} = -\mu(t).$$

Запишем гамильтониан H в следующем виде:

$$\begin{aligned} H = & (-1) \cdot \frac{(\delta(t)(P_{\max} - P_{\min}) + P_{\min})}{W(x,y)} \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2} + \lambda_v \cdot \left(\frac{P(t)}{m} e_v - \frac{mg \sin \theta}{m} - \frac{Q(\alpha_n, V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}, x, y, \beta)}{m} \right) + \\ & + \lambda_\theta \times \left(\frac{P(t)}{mV} e_{nv} - \frac{g \cos \theta}{V} + \frac{Y(\alpha_n, V, \theta, V_{air}, \gamma_{air}, x, y, \beta)}{mV} \right) + \\ & + \lambda_x V \cos \theta + \lambda_y V \sin \theta - \lambda_m \cdot \frac{P(t)}{W(x,y)} \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial e_v} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial e_{nv}} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \delta(t)} = 0.$$

Продифференцировав гамильтониан по переменной e_v и e_{nv}

$$\frac{\partial H}{\partial e_v} = 0 = (-1) \frac{P(t)}{W(x,y)} \cdot \frac{2 \cdot e_v}{2 \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2}} + \frac{\lambda_v}{m} P(t) - \lambda_m \frac{P(t)}{W(x,y)} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot e_v}{2 \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2}}, \quad (19)$$

получим

$$e_v (1 + \lambda_m) \cdot \frac{P(t)}{W(x,y)} = \frac{\lambda_v P(t)}{m}, \quad (20)$$

а для управляющего косинуса получим

$$\cos(\alpha + \varphi_p) \rightarrow e_v = \frac{\lambda_v \cdot W(x,y)}{m(1 + \lambda_m)}. \quad (21)$$

Продифференцируем гамильтониан по переменной e_{nv} , тогда

$$\frac{\partial H}{\partial e_{nv}} = 0 = (-1) \cdot \frac{P(t)}{W(x,y)} \cdot \frac{2 \cdot e_{nv}}{2 \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2}} + \lambda_\theta \frac{P(t)}{mV} - \lambda_m \frac{P(t)}{W(x,y)} \cdot \frac{2 \cdot e_{nv}}{2 \cdot \sqrt{e_v^2 + e_{nv}^2}}, \quad (22)$$

а выражение для управляющего синуса будет иметь вид

$$\sin(\alpha + \varphi_p) \rightarrow e_{nv} = \frac{\lambda_\theta \cdot W(x,y)}{m \cdot V \cdot (1 + \lambda_m)}, \quad (\varphi_p = \text{const}); \quad (23)$$

$$\text{tg}(\alpha + \varphi_p) = \frac{e_{nv}}{e_v} = \frac{\frac{\lambda_\theta W(x,y)}{mV(1 + \lambda_m)}}{\frac{\lambda_v W(x,y)}{m(1 + \lambda_m)}} = \frac{\lambda_\theta}{\lambda_v \cdot V}. \quad (24)$$

Выражение для α будет иметь вид

$$\alpha = \arctg \frac{\lambda_\theta}{\lambda_v \cdot V} + \varphi_p \leftarrow \alpha(V, \lambda_\theta, \lambda_v), \quad (25)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \delta} = 0 = & (-1) \frac{P_{\max} - P_{\min}}{W(x,y)} + \lambda_v \cdot \frac{(P_{\max} - P_{\min})}{m} \cdot e_v + \lambda_\theta \cdot \frac{(P_{\max} - P_{\min})}{mV} \cdot e_{nv} - \lambda_m \cdot \frac{(P_{\max} - P_{\min})}{W(x,y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow & (P_{\max} - P_{\min}) \cdot \left(\lambda_v \cdot \frac{1}{m} \cdot e_v + \lambda_\theta \cdot \frac{1}{mV} \cdot e_{nv} \right) - (1 + \lambda_m) \cdot \frac{(P_{\max} - P_{\min})}{W(x,y)}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\Psi(\lambda_v, \lambda_\theta, m, V, x, y) = \frac{\lambda_v^2}{m^2} \frac{W(x,y)}{(1+\lambda_m)} + \frac{\lambda_\theta^2}{m^2 V^2} \frac{W(x,y)}{(1+\lambda_m)} - \frac{(1+\lambda_m)}{W(x,y)}, \quad (27)$$

при этом

$$\begin{aligned} \delta &= 1, \text{ при } \Psi(\dots) > 0; \\ \delta &= 0, \text{ при } \Psi(\dots) < 0 \\ &\Downarrow \\ \delta(\Psi) &= \delta(\text{sign}(\Psi)). \end{aligned}$$

Гамильтониан принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= (-1) \frac{(\delta(\Psi) \cdot (P_{max} - P_{min}) + P_{min})}{W(x,y)} + \lambda_v \left(\frac{P(t)}{m} \cdot \frac{\lambda_v W(x,y)}{m(1+\lambda_m)} - g \sin \theta - \frac{Q(\alpha_n, \dots)}{m} \right) + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t)}{mV} \cdot \frac{\lambda_\theta W(x,y)}{V_m(1+\lambda_m)} - \frac{g \cos \theta}{V} - \frac{Y(\alpha_n, \dots)}{mV} \right) + \lambda_x V \cos \theta + \lambda_y V \sin \theta - \frac{\lambda_m P(t)}{W(x,y)} \\ &\text{при } \alpha_n = \alpha + \beta - \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Геометрическая интерпретация $\alpha_n = \alpha + \beta - \theta$ принимает вид

$$C_y(\alpha_n) = C_y \Big|_{\alpha=0}^{\alpha} \cdot \alpha_n = C_y^\alpha \cdot (\alpha + \beta - \theta), \quad (29)$$

где $\alpha = \alpha(V, \lambda_\theta, \lambda_v)$.

Заменим $C_x(\alpha_n)$ на $C_x(C_y)$ – из аэродинамической поляры.

Продифференцируем гамильтониан по переменной V :

$$\begin{aligned} \theta \frac{d\lambda_v}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V} = -\lambda_v \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta(\beta, \theta, V, V_{air}, x, y, \lambda_m, \lambda_v)}{\partial V} + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t) \cdot \lambda_\theta \cdot W(x,y) \cdot (-2)}{m^2(1+\lambda_m)V^3} + \frac{g \cos \theta}{V^2} - \frac{1}{mV^2} Y(\dots) + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial V} \right) + \lambda_x \cos \theta + \lambda_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (30)$$

Продифференцируем гамильтониан по переменной θ :

$$\frac{d\lambda_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \lambda_v \left(-g \cos \theta - \frac{1}{m} \frac{\partial Q(\dots)}{\partial \theta} \right) + \lambda_\theta \left(\frac{g \sin \theta}{V} + \frac{1}{mV} \frac{\partial Y(\dots)}{\partial \theta} \right) - \lambda_x V \sin \theta + \lambda_y V \cos \theta. \quad (31)$$

Продифференцируем гамильтониан по переменной x :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = (-1) \cdot P(t) \cdot \frac{(-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \lambda_v \frac{P(t) \lambda_v}{m^2(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial x} + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t) \lambda_\theta}{m^2 V^2 (1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial x} \right) + \lambda_m \frac{P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (32)$$

Продифференцируем гамильтониан по переменной y :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = (-1) \cdot \frac{P(t) \cdot (-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \lambda_v \cdot \frac{P(t) \cdot \lambda_v}{m^2 \cdot (1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial y} + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t)}{m^2 V^2} \cdot \frac{\lambda_\theta}{(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial y} \right) + \frac{\lambda_m \cdot P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (33)$$

Продифференцируем гамильтониан по переменной m :

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_v \cdot \left(\frac{P(t)\lambda_v \cdot W(x,y)(-2)}{(1+\lambda_m)m^3} + \frac{Q(\dots)}{m^2} \right) + \lambda_\theta \cdot \left(\frac{P(t)\lambda_\theta - W(x,y)(-2)}{V^2 \cdot m^3(1+\lambda_m)} - \frac{Y(\dots)}{V} \cdot \frac{1}{m^2} \right). \quad (34)$$

К полученным 5 уравнениям добавим 5 уравнений исходной системы, при этом вместо e_{nv} и e_v подставим соответствующие выражения.

Краевые условия в момент t_1 будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} V \\ \theta \\ x \\ y \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_v(t_1)=0 \\ \lambda_\theta(t_1)=0 \\ x_1 \\ y_1 \\ \lambda_m(t_1)=0 \end{pmatrix} - \text{«замещение» должно выполняться в } t_1,$$

т. к. V , θ и m – «свободные». (35)

4. СОСТАВЛЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ СНИЖЕНИЯ

1. Для составления краевой задачи представим систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P(t) \cdot e_v - mg \sin \theta - Q; \\ m \frac{d\theta}{dt} &= P(t) e_n - mg \cos \theta + Y; \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta; \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta; \\ \frac{dm}{dt} &= -\mu(t). \end{aligned} \quad (36)$$

2. Выпишем дополнительные уравнения, полученные из гамильтониана:

$$\frac{d\lambda_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_v \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta(\beta, \theta, V, V_{air}, x, y, \lambda_m, \lambda_v)}{\partial v} + \lambda_\theta \left(\frac{P(t) \cdot \lambda_\theta \cdot W(x,y)(-2)}{m^2(1+\lambda_m)V^3} + \frac{g \cos \theta}{V^2} - \frac{1}{mV^2} Y(\dots) + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial V} \right) + \lambda_x \cos \theta + \lambda_y \sin \theta; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \lambda_v \left(-g \cos \theta - \frac{1}{m} \frac{\partial Q(\dots)}{\partial \theta} \right) + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{g \sin \theta}{V} + \frac{1}{mV} \frac{\partial Y(\dots)}{\partial \theta} \right) - \lambda_x V \sin \theta + \lambda_y V \cos \theta; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = (-1) \cdot P(t) \cdot \frac{(-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \lambda_v \frac{P(t)\lambda_v}{m^2(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial x} + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t)\lambda_\theta}{m^2V^2(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial x} \right) + \lambda_m \frac{P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = (-1) \cdot \frac{P(t)(-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \lambda_v \cdot \frac{P(t) \cdot \lambda_v}{m^2 \cdot (1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial y} + \\ &+ \lambda_\theta \left(\frac{P(t)}{m^2V^2} \cdot \frac{\lambda_\theta}{(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{mV} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial y} \right) + \frac{\lambda_m \cdot P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \lambda_v \cdot \left(\frac{P(t)\lambda_v \cdot W(x,y)(-2)}{(1+\lambda_m)m^3} + \frac{Q(\dots)}{m^2} \right) + \\ &+ \lambda_\theta \cdot \left(\frac{P(t)\lambda_\theta - W(x,y)(-2)}{V^2 \cdot m^3(1+\lambda_m)} - \frac{Y(\dots)}{V} \cdot \frac{1}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

3. Произведем обратные замены:

$$\alpha = \arctg \frac{\lambda_\theta}{\lambda_v \cdot V} + \varphi_p \leftarrow \alpha(V, \lambda_\theta, \lambda_v); \quad (42)$$

$$\cos(\alpha + \varphi_p) \rightarrow e_v = \frac{\lambda_v \cdot W(x,y)}{m(1+\lambda_m)}; \quad (43)$$

$$\sin(\alpha + \varphi_p) \rightarrow e_{nv} = \frac{\lambda_\theta \cdot W(x,y)}{m \cdot v \cdot (1+\lambda_m)}. \quad (44)$$

4. Получим уравнения в новом виде с подстановкой управляющих косинусов:

$$m \frac{dv}{dt} = P(t) \cdot \cos\left(\arctg \frac{\lambda_\theta}{\lambda_v \cdot v} + \varphi_p\right) - mg \sin\theta - Q; \quad (45)$$

$$m \frac{d\theta}{dt} = P(t) \cdot \sin\left(\arctg \frac{\lambda_\theta}{\lambda_v \cdot v} + \varphi_p\right) - mg \cos\theta + Y; \quad (46)$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos\theta; \quad (47)$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin\theta; \quad (48)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\mu(t); \quad (49)$$

$$\frac{d\lambda_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_v \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial \theta(\beta, \theta, v, V_{air}, x, y, \lambda_m, \lambda_v)}{\partial v} + \lambda_\theta \left(\frac{P(t) \cdot \lambda_\theta \cdot W(x,y)(-2)}{m^2(1+\lambda_m v^3)} + \frac{g \cos\theta}{v^2} - \frac{1}{m v^2} Y(\dots) + \frac{1}{m v} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial v} \right) + \lambda_x \cos\theta + \lambda_y \sin\theta; \quad (50)$$

$$\frac{d\lambda_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \lambda_v \left(-g \cos\theta - \frac{1}{m} \frac{\partial Q(\dots)}{\partial \theta} \right) + \lambda_\theta \left(\frac{g \sin\theta}{v} + \frac{1}{m v} \frac{\partial Y(\dots)}{\partial \theta} \right) - \lambda_x v \sin\theta + \lambda_y v \cos\theta; \quad (51)$$

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = (-1) \cdot P(t) \cdot \frac{(-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + \lambda_v \frac{P(t) \lambda_v}{m^2(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial x} + \lambda_\theta \left(\frac{P(t) \lambda_\theta}{m^2 v^2 (1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} + \frac{1}{m v} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial x} \right) + \lambda_m \frac{P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}; \quad (52)$$

$$\frac{d\lambda_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = (-1) \cdot \frac{P(t)(-1)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + \lambda_v \cdot \frac{P(t) \cdot \lambda_v}{m^2 \cdot (1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{m} \cdot \lambda_v \cdot \frac{\partial Q(\dots)}{\partial y} + \lambda_\theta \left(\frac{P(t)}{m^2 v^2} \cdot \frac{\lambda_\theta}{(1+\lambda_m)} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} + \frac{1}{m v} \cdot \frac{\partial Y(\dots)}{\partial y} \right) + \frac{\lambda_m \cdot P(t)}{W(x,y)^2} \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}; \quad (53)$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m}. \quad (54)$$

5. На основании результатов, получаемых с применением приведенного математического аппарата, представляется возможность построения оптимальных траекторий снижения ВС. На рис. 1, 2, 3 продемонстрированы графики изменения собственно траектории снижения, угла атаки и тяги для принятых в качестве примера: начальной скорости – 150 м/с; начальной массы ВС – 57500 кг; начальной высоты – 3000 м; конечной высоты – 1500 м; дистанции – 15000 м; продолжительности – 180 с.

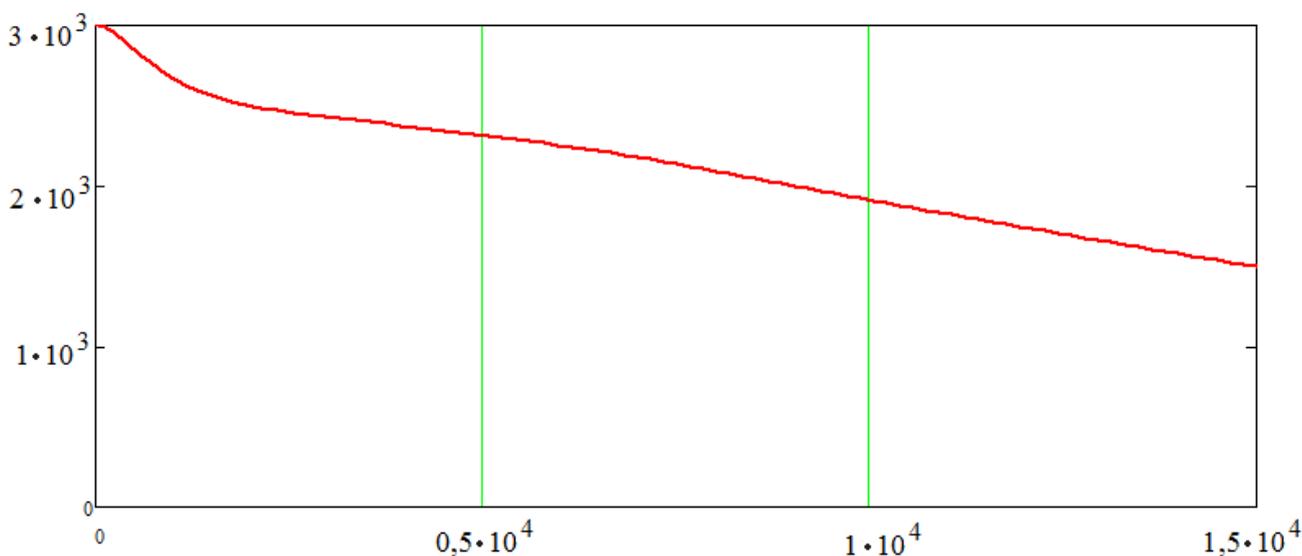


Рис. 1. Изменение траектории: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<4>}$
Fig. 1. Trajectory change: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<4>}$

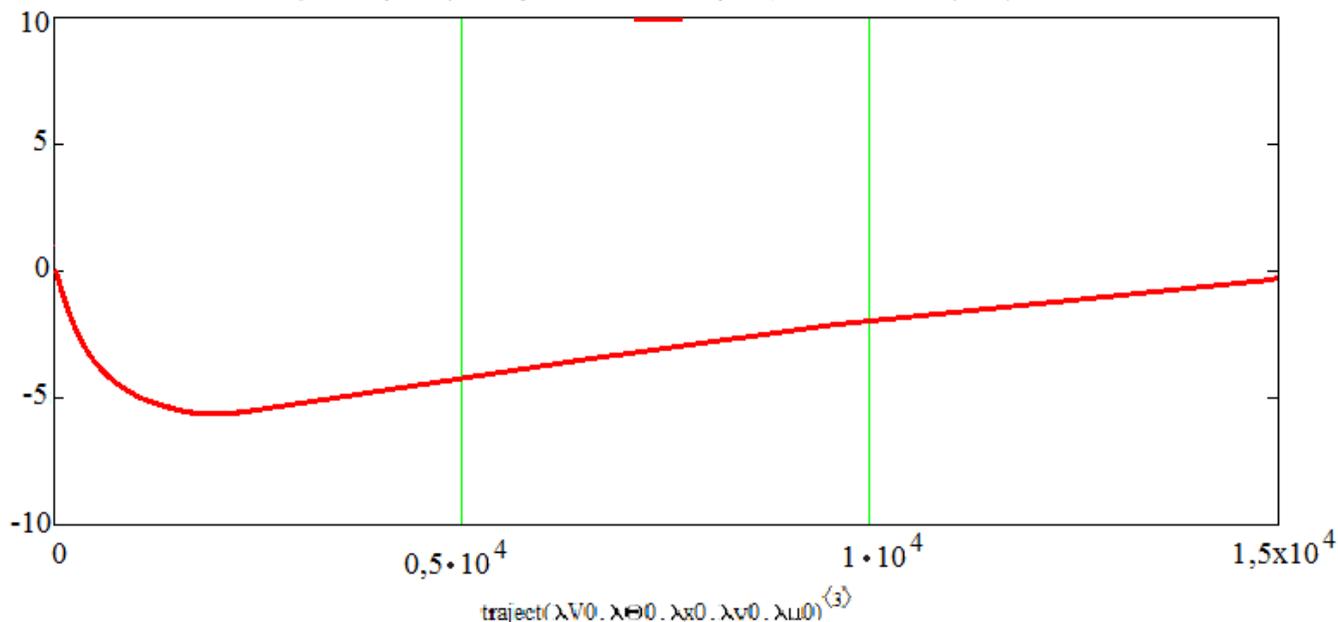


Рис. 2. Изменение угла атаки: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<9>}$
Fig. 2. Change of angle of attack: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<9>}$

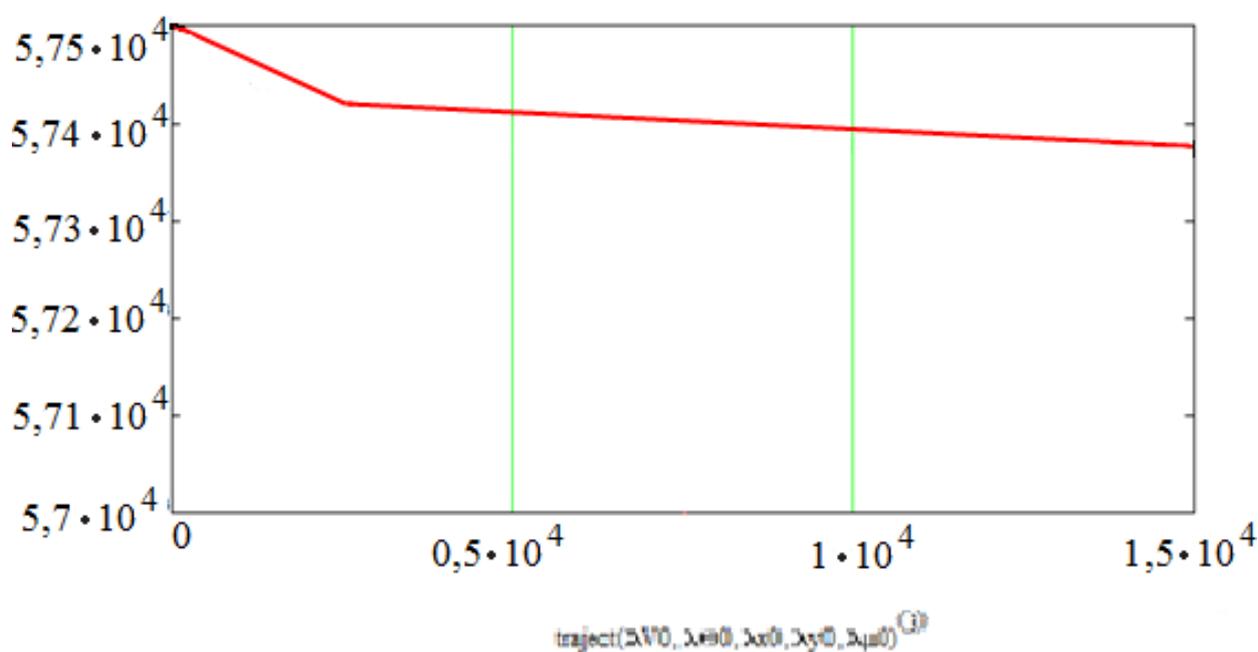


Рис. 3. Изменение тяги: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<5>}$
Fig. 3. Change of thrust: $\text{traject}(\lambda V_0, \lambda \theta_0, \lambda x_0, \lambda y_0, \lambda \mu_0)^{<5>}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Приведенный выше математический аппарат и построенная математическая модель пространственного движения ВС позволили проанализировать поведение ВС на предподсадочном отрезке полета и построить оптимальную траекторию полета по критерию минимального расхода топлива с закрепленным временем.

2. Сравнение суммарного расхода топлива ВС на полученной оптимальной траектории снижения с классической траекторией, на которой присутствуют прямолинейные участки, поз-

волит сделать вывод об экономической эффективности метода постоянного снижения ВС при производстве полетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белкин В.А.** К проблеме повышения топливной эффективности гражданских самолетов // Научный Вестник МГТУ ГА. 2015. № 219. С. 121–126.
2. **Смирнов Н.Н., Чинючин Ю.М.** Основы теории технической эксплуатации летательных аппаратов: учебник. М.: МГТУ ГА, 2015. 505 с.
3. **Найда В.А.** Инженерные основы летно-технической эксплуатации летательных аппаратов. М.: МГТУ ГА, 2003. 108 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983.
5. Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек М.: Мир, 1991.
6. ICAO. Doc. 9931. Руководство по производству полетов в режиме постоянного снижения (CDO). Издание первое – 2010.
7. Официальный сайт федерального авиационного управления США [Электронный ресурс]. URL: http://www.faa.gov/nextgen/library/media/getSmart_PBN.pdf
8. ICAO. Doc. 10013. Эксплуатационные возможности уменьшения расхода топлива и эмиссии. Издание первое – 2014.
9. Указание Министерства гражданской авиации от 20 ноября 1990 г. № 499/у. О введении в действие «Методических рекомендаций по выбору оптимально-потребной энерговооруженности». М.: МГА СССР, 1990. 14 с.
10. **Чинючин Ю.М.** Технологические процессы технического обслуживания летательных аппаратов: учебник. М.: МГТУ ГА, Университетская книга, 2008. 408 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Чинючин Юрий Михайлович, профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой технической эксплуатации летательных аппаратов и авиадвигателей МГТУ ГА, yu.chinyuchin@mstuca.aero.

Белкин Виктор Александрович, аспирант кафедры технической эксплуатации летательных аппаратов и авиационных двигателей МГТУ ГА, boolatov@mail.ru.

MATHEMATICAL ASPECTS OF AIRCRAFT ENGINES RUNNING OPTIMIZATION FOR MINIMUM FUEL CONSUMPTION WHILE LANDING

Yuriy M. Chinyuchin¹, Viktor A. Belkin¹

¹*Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia*

ABSTRACT

The consistency of the potential increase of fuel efficiency, based on aircraft maintenance optimization, is mathematically proved. The mathematical apparatus and a set mathematical model of aircraft spatial motion allow to analyze aircraft behavior on the stage before landing and to draw optimal flight path for minimum fuel consumption with fixed time.

For effective problem solving the choice and realization of optimal flight paths are made. The algorithm for the problem of optimal civil aircraft flight control aimed at the most accurate realization of chosen soft path under limited time

conditions is proposed. The optimization of the given process is made by solving a point-to-point boundary canonical system based on the Pontryagin maximum principle.

The necessary initial data and conditions for the statement of problem are given. The mathematical model for the simplification of calculations is created and its equivalent representation is given by uniting problems of controls by thrust channels and the angle of attack as the thrust control function. The boundary-value problem is mathematically composed and the analytical apparatus of its solution is presented. Optimal aircraft landing paths reflecting the behavior of the angle of attack and thrust are constructed.

The potential of this method is proved by the economic justifiability and its effectiveness, in particular the comparison of total aircraft fuel consumption on obtained optimal path to the classic path on which there are rectilinear sections what allowed to confirm the conclusion about the economical expedience and effectiveness of the method of aircraft constant landing while making flights.

Key words: fuel efficiency, optimization, constant landing, the Pontryagin maximum principle.

REFERENCES

1. **Belkin V.A.** *K probleme povyisheniya toplivnoy effektivnosti grazhdanskih samoletov* [To the problem of increase of fuel efficiency of civil aircraft]. The Scientific Bulletin of the MSTUCA, 2015, no. 219, pp. 121–126. (in Russian)
2. **Smirnov N.N., Chinyuchin Yu.M.** *Osnovyi teorii tehnikeskoy ekspluatatsii letatelnykh apparatov. Uchebnik* [The Bases of theory of technical exploitation of the aircraft. Textbook]. Moscow, The MSTUCA, 2015, 505 p. (in Russian)
3. **Nayda V.A.** *Inzhenernyye osnovyi letno-tehnikeskoy ekspluatatsii letatelnykh apparatov.* [Engineering basics of flight and technical operation of aircraft. Tutorial]. Moscow, The MSTUCA, 2003, 108 p. (in Russian)
4. **Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.** *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, *Izd-vo Nauka* [Publishing House of Science], 1983. (in Russian)
5. **Holodniok M., Klich A., Kubichek M., Marek M.** *Metody analiza nelineynykh dinamicheskikh modeley* [Methods of analysis of nonlinear dynamic models]. Moscow, *Izd-vo Mir* [Publishing House 'World'], 1991. (in Russian)
6. ICAO. Doc. 9931. *Rukovodstvo po proizvodstvu poletov v rezhime postoyannogo snizheniya (CDO).* [Management of the operations in a constant decline (CDO)]. *Izдание pervoe* [First Edition], 2010. (In Russian).
7. The official website for US Federal Aviation Administration [electronic resource]. URL: http://www.faa.gov/nextgen/library/media/getSmart_PBN.pdf
8. ICAO. Doc. 10013. *Ekspluatatsionnyye vozmozhnosti umensheniya rashoda topliva i emissii* [Performance possibility of reducing fuel consumption and emissions]. *Izдание pervoe* [The First Edition], 2014. (in Russian)
9. *Ukazanie Ministerstva grazhdanskoj aviatsii ot 20 noyabrya 1990 g. no. 499/u. O vvedenii v deystvie «Metodicheskikh rekomendatsiy po vyboru optimalno-potrebnoy energovooruzhennosti»* [Order of the Ministry of Civil Aviation on November 20, 1990 № 499 / y. On introduction of the "Guidelines for the selection of optimal power availability needs."]. Moscow, 1990, 14 p. (in Russian)
10. **Chinyuchin Yu.M.** *Tehnologicheskie protsessy tehnikeskogo obsluzhivaniya letatelnykh apparatov. Uchebnik* [Technological Processes of Technical Servicing of aircrafts: a textbook]. Moscow, The MSTUCA, Universitetskaya kniga. 2008. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Chinyuchin Yuriy Michaylovich, Professor, Doctor of Science, Head of the Aircraft and Aircraft Engines Maintenance Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, yu.chinyuchin@mstuca.aero.

Belkin Victor Alexandrovich, Post Graduate of the Aircraft and Aircraft Engines Maintenance Chair, Moscow State Technical University of Civil Aviation, boolatov@mail.ru.